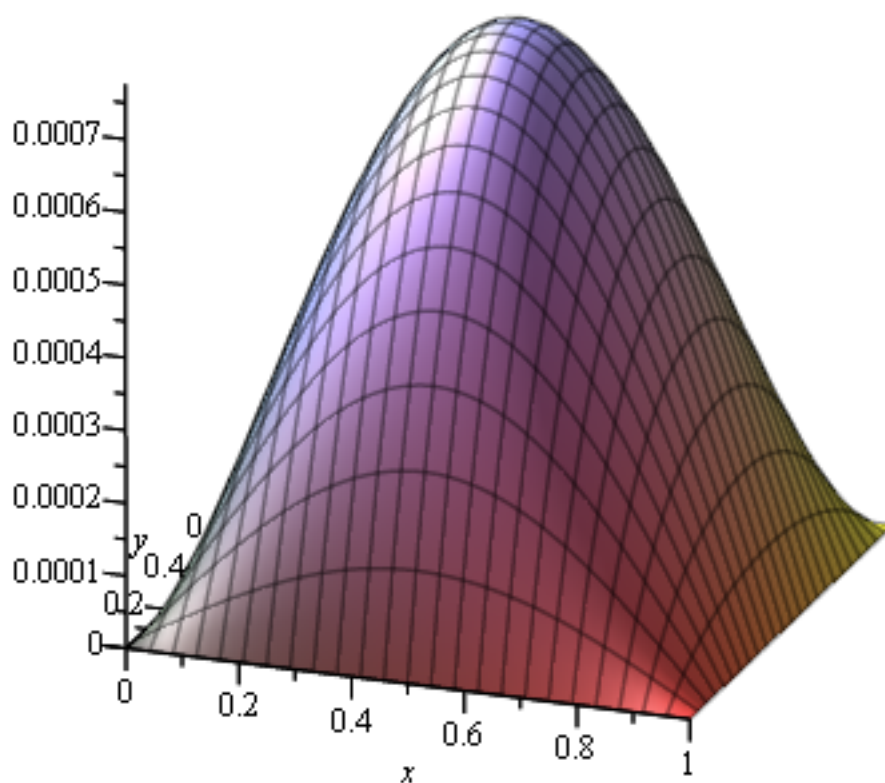


# Déformation d'une membrane



## Étudiants :

Joran Marie      Audrey Hoareau  
David Quéré      Tristan Loembé  
Clément Beretta      Ali Benkassou

## Enseignant responsable :

Bernard Gleyse



**Date de remise du rapport :** 25/06/18

**Référence du projet :** STPI<sup>1</sup>/P6/2018-14

**Intitulé du projet :** Déformation d'une membrane

**Type de projet :** Bibliographie, modélisation

**Objectifs du projet :** L'objectif de ce projet est de modéliser la déformation d'une membrane élastique rectangulaire. Pour cela, notre étude a été décomposée en trois parties : une modélisation physique, une résolution mathématique et une simulation numérique.

---

1. INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES DE ROUEN DÉPARTEMENT SCIENCES ET TECHNIQUES POUR L'INGÉNIEUR 685 AVENUE DE L'UNIVERSITÉ BP08 - 76801 SAINT-ETIENNE-DU-ROUVRAY TÉL : (+33) 2 32 95 66 21 - FAX : (+33) 2 32 95 66 31

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Méthodologie et organisation du travail</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Travail réalisé et résultats</b>	<b>3</b>
2.1	Modélisation physique . . . . .	3
2.2	Résolution exacte . . . . .	3
2.2.1	Sinus et cosinus hyperboliques . . . . .	3
2.2.2	Série de Fourier . . . . .	7
2.2.3	Visualisation de la déformation de la membrane avec Maple	10
2.3	Résolution numérique . . . . .	12
2.3.1	Approximation par les dérivées partielles . . . . .	12
2.3.1.1	Obtention des équations . . . . .	12
2.3.1.2	Obtention de l'équation matricielle pour N=3 . . . . .	13
2.3.1.3	Equation matricielle pour une taille quelconque . . . . .	14
2.3.2	Résolution matricielle . . . . .	14
2.3.2.1	Méthode de Cholesky . . . . .	15
2.3.2.2	Algorithme de calcul . . . . .	15
2.3.2.3	Résolution . . . . .	16
2.3.3	Conclusion partielle . . . . .	19

# Introduction

Le but de ce projet est de modéliser la déformation d'une membrane rectangulaire, élastique. Cela semble, à priori, simple à réaliser. Cependant ce type d'étude nécessite d'utiliser les outils de trois domaines différents : physique, mathématique, et informatique. C'est donc ainsi que va s'articuler ce rapport. Dans un premier temps, il s'agira de poser les bases de notre modèle physique : comment modéliser un tel phénomène? Comment discrétiser les points de la membrane? Ensuite, il sera question de poser puis de résoudre les équations mathématiques utilisant notre modèle physique. On approchera ce modèle physique avec des sommes de fonctions grâce aux séries de Fourier. Enfin, nous transformerons ces équations en système matriciel et qui sera résolu grâce à des méthodes de calcul numérique. Nous utiliserons un ensemble de programmes pour pouvoir comparer la précision des résultats, mais aussi pour visualiser graphiquement le phénomène de déformation.

# Chapitre 1

## Méthodologie et organisation du travail

Afin de mener à bien ce projet, nous nous sommes répartis les tâches tout au long du semestre. Dans un premier temps, nous avons commencé tous ensemble par de la recherche de sources bibliographiques ainsi que la compréhension des rapports des années précédentes. Par la suite, lors de nos travaux, nous nous sommes organisés en 2 équipes : un trinôme s'occupant particulièrement de la résolution exacte composé de Clément, Audrey et Tristan et un trinôme axé sur la résolution numérique composé de David, Ali et Joran. Les deux équipes ont ainsi travaillé ensemble tout en se donnant des objectifs personnels hebdomadaires. Cette organisation hebdomadaire nous a réellement permis d'avancer continuellement tout au long de ce projet. La méthode des sinus et cosinus hyperboliques ainsi que la méthode des séries de Fourier ont été développées par Audrey, Tristan et Clément. Les programmes associés en Maple ont été réalisés par Clément. Pour la partie résolution numérique, l'organisation reste vraisemblablement la même avec des recherches effectuées par Ali, Joran et David. Ali a ainsi développé le programme Pascal, David le programme Matlab et Joran le programme Maple. Nous nous sommes organisés de la même manière pour la rédaction du rapport.

L'aide et les informations apportées par notre professeur M. Gleyse nous ont été indispensables pour l'ensemble des tâches effectuées.

## Chapitre 2

# Travail réalisé et résultats

### 2.1 Modélisation physique

La membrane est rectangulaire, horizontale et élastique. On la met sous tension en la fixant par les bords et en exerçant une force transversale. Sa surface est représentée par une fonction de deux variables  $f$ , solution d'une équation de Poisson de la forme suivante :  $-c_1 \Delta u = f$

On pose  $u_{i,j} = f(x_i, y_j)$ , et on discrétise la membrane. On désigne par  $L_x$  sa longueur et par  $L_y$  sa largeur.  $N$  et  $M$  sont le nombre de divisions respectif des côtés de la membrane. On obtient alors deux pas de discrétisation  $h$  et  $k$  s'exprimant tel que :

$$h = \frac{L_x}{N+1} \text{ et } k = \frac{L_y}{M+1}$$

On a :  $x_i = ih$  et  $y_j = jk$  où  $i, j = 0, \dots, 1$ .

### 2.2 Résolution exacte

#### 2.2.1 Sinus et cosinus hyperboliques

Pour la résolution exacte, on utilise la méthode de séparation des variables. On a une équation de la forme

$$-C_1 \Delta u = f$$

avec  $\Delta u$  l'opérateur laplacien :

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

Cherchant une solution de la forme  $u(x, y) = g(x)h(y)$  on effectue les doubles dérivées partielles de cette solution :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 g(x)}{\partial x^2} h(y) \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 h(y)}{\partial y^2} g(x)\end{aligned}$$

On obtient alors

$$f = -C_1 \left( \frac{\partial^2 g(x)}{\partial x^2} h(y) + \frac{\partial^2 h(y)}{\partial y^2} g(x) \right)$$

En supposant que  $f = 0$ , on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 g(x)}{\partial x^2} h(y) + \frac{\partial^2 h(y)}{\partial y^2} g(x) &= 0 \\ \frac{\partial^2 g(x)}{\partial x^2} h(y) &= -\frac{\partial^2 h(y)}{\partial y^2} g(x) \\ \frac{g''(x)}{g(x)} &= -\frac{h''(y)}{h(y)} = -k\end{aligned}$$

$k$  est une constante puisque  $\frac{g''(x)}{g(x)}$  ne dépend que de  $x$ ,  $\frac{h''(y)}{h(y)}$  ne dépend que de  $y$ , et qu'il existe une égalité entre ces deux termes.

Nous avons donc l'équation suivante :  $g''(x) = -g(x)k$ .

$k = 0 \Rightarrow$

$$g(x) = ax + b$$

$k < 0 \Rightarrow$

$$g(x) = ae^{\sqrt{|k|x}} + be^{-\sqrt{|k|x}}$$

$k > 0 \Rightarrow$

$$\begin{aligned}g(x) &= c \cos(\sqrt{kx}) + d \sin(\sqrt{kx}) \\ &= c \cos(k_1 x) + d \sin(k_1 x)\end{aligned}$$

Dans le cas de  $k > 0$ , on injecte les conditions aux limites.

Si  $x = 0$  alors

$$\begin{aligned}g(0) &= 0 \\ c \cos(0) + d \sin(0) &= 0 \\ c &= 0\end{aligned}$$

et si  $x = L_x$  alors

$$\begin{aligned}g(L_x) &= 0 \\ d \sin(k_1 L_x) &= 0 \\ k_1 L_x &= n\pi \\ k_1 &= \frac{n\pi}{L_x} n \in \mathbf{Z}\end{aligned}$$



et on obtient donc une équation de la forme :

$$g_n(x) = d \sin\left(\frac{n\pi}{L_x}x\right)$$

Dans le cas  $k = 0$

Si  $x = 0$  alors

$$\begin{aligned} g(0) &= 0 \\ a * 0 + b &= 0 \\ b &= 0 \end{aligned}$$

et si  $x = L_x$  alors

$$\begin{aligned} g(L_x) &= 0 \\ aL_x &= 0 \\ a &= 0 \end{aligned}$$

donc  $g(x) = 0$

Nous avons également une deuxième équation :  $h''(y) = kh(y)$

$$\begin{aligned} h(y) &= \alpha e^{k_1 y} + \beta e^{-k_1 y} \\ h(y) &= (\alpha + \beta) \frac{e^{k_1 y} + e^{-k_1 y}}{2} + (\alpha - \beta) \frac{e^{k_1 y} - e^{-k_1 y}}{2} \\ h(y) &= (\alpha + \beta) \cosh(k_1 y) + (\alpha - \beta) \sinh(k_1 y) \\ h(y) &= \gamma \cosh(k_1 y) + \nu \sinh(k_1 y) \end{aligned}$$

En imposant les conditions aux limites :

si  $y = 0$

$$\begin{aligned} h(0) &= 0 \\ \gamma * 1 + \nu * 0 &= 0 \\ \gamma &= 0 \end{aligned}$$

si  $y = L_y$

$$\begin{aligned} h(L_y) &= 0 \\ \nu * \sinh(k_1 L_y) &= 0 \\ \nu &= 0 \end{aligned}$$

donc  $h(y) = 0$

Résolvons l'équation suivante :

$$-C_1 \Delta u = f$$

$$\begin{aligned}
 -C_1 \Delta(h(y)g_n(x)) &= c_n(y)g_n(x) \\
 -C_1(h_n(y)g_n''(x) + h_n''(y)g_n(x)) &= c_n(y)g_n(x) \\
 -C_1(h_n(y)\sin''(\frac{n\pi x}{L_x}) + h_n''(y)\sin(\frac{n\pi x}{L_x})) &= c_n(y)\sin(\frac{n\pi x}{L_x}) \\
 -C_1(-h_n(y)(\frac{n\pi}{L_x})^2 \sin(\frac{n\pi x}{L_x}) + \sin(\frac{n\pi x}{L_x})h_n''(y)) &= c_n(y)\sin(\frac{n\pi x}{L_x}) \\
 -C_1(h_n''(y) - (\frac{n\pi}{L_x})^2 h_n(y)) &= c_n(y) \\
 -C_1(h_n''(y) - k_1^2 h_n(y)) &= c_n(y)
 \end{aligned}$$

Comme on prend  $f$  constant, on a forcément  $c_n(y)$  qui est constant. De plus grâce aux séries de Fourier, on a  $c_n = \frac{2}{L_x} \int_0^{L_x} f \cdot \sin(\frac{n\pi x}{L_x}) dx$   
 Nous avons donc une solution homogène :

$$\gamma \cosh(k_1 y) + \nu \sinh(k_1 y)$$

Ainsi qu'une solution particulière :

$$\frac{c_n}{C_1 k_1^2}$$

Donc finalement

$$h_n(y) = \gamma \cosh(k_1 y) + \nu \sinh(k_1 y) + \frac{c_n}{C_1 k_1^2}$$

Maintenant nous allons imposer les conditions aux limites afin de trouver les coefficients  $\gamma$  et  $\nu$ .

$y = 0 \Rightarrow$

$$\begin{aligned}
 h_n(0) &= 0 \\
 \gamma \cosh(0) + \nu \sinh(0) + \frac{c_n}{C_1 k_1^2} &= 0 \\
 \gamma \frac{e^0 + e^0}{2} + \nu \frac{e^0 - e^0}{2} + \frac{c_n}{C_1 k_1^2} &= 0 \\
 \gamma + \frac{c_n}{C_1 k_1^2} &= 0 \\
 \gamma &= -\frac{c_n}{C_1 k_1^2}
 \end{aligned}$$

$$y = L_y \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} h_n(L_y) &= 0 \\ -\frac{c_n}{C_1 k_1^2} \cosh(k_1 L_y) + \nu \sinh(k_1 L_y) + \frac{c_n}{C_1 k_1^2} &= 0 \\ \nu \sinh(k_1 L_y) &= \frac{c_n}{C_1 k_1^2} (\cosh(k_1 L_y) - 1) \\ \nu &= \frac{c_n}{C_1 k_1^2} \left( \frac{\cosh(k_1 L_y) - 1}{\sinh(k_1 L_y)} \right) \\ \nu &= \frac{c_n}{C_1 k_1^2} \left( \frac{\cosh(k_1 L_y) - \cosh(0)}{\sinh(k_1 L_y)} \right) \\ \nu &= \frac{c_n}{C_1 k_1^2} \left( \frac{2 \sinh^2\left(\frac{k_1 L_y}{2}\right)}{\sinh(k_1 L_y)} \right) \end{aligned}$$

Nous avons donc :

$$\begin{aligned} h_n(y) &= \frac{c_n}{C_1 k_1^2} \left( 1 - \cosh(k_1 y) + \frac{\cosh(k_1 L_y) - 1}{\sinh(k_1 L_y)} \sinh(k_1 y) \right) \\ h_n(y) &= \frac{c_n}{C_1 k_1^2} \left( 1 + \frac{\cosh(k_1 L_y) \sinh(k_1 y) - \cosh(k_1 y) \sinh(k_1 L_y) - 1}{\sinh(k_1 y)} \right) \\ h_n(y) &= \frac{c_n}{C_1 k_1^2} \left( 1 + \frac{-\sinh(k_1(L_y - y)) - 1}{\sinh(k_1 y)} \right) \\ h_n(y) &= \frac{-c_n}{C_1 k_1^2} \left( \frac{\sinh(k_1(L_y - y)) + 1}{\sinh(k_1 y)} - 1 \right) \end{aligned}$$

### 2.2.2 Série de Fourier

Dans cette partie, nous allons de nouveau résoudre l'équation de Poisson, qui est  $-c\Delta u = f$ , avec  $u = u(x, y)$ . Mais, nous le ferons d'une manière différente, sans utiliser les fonctions *cosh* et *sinh*. Nous rappelons que  $0 \leq x \leq L_x$  et  $0 \leq y \leq L_y$ .

Au début, nous procédons exactement de la même manière que précédemment (séparation des variables), et nous trouvons :  $\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} = -\lambda$ , avec  $\lambda$  une constante.

On note  $F$  et  $G$  les fonctions définies par :  $F(x) = \frac{X''(x)}{X(x)}$  et  $G(y) = \frac{Y''(y)}{Y(y)}$ . Pour avoir l'égalité, il faut que  $F$  et  $G$  soient constantes. On a donc

$$F(x) = -m_1^2$$

et

$$G(y) = -m_2^2$$

avec  $m_1$  et  $m_2$  des constantes.

On a donc l'équation

$$-m_1^2 - m_2^2 = -\lambda$$

On détermine donc  $m_1$  et  $m_2$ .

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -m_1^2$$

$$X''(x) + m_1^2 X(x) = 0$$

$$X(x) = \alpha \cos(m_1 x) + \beta \sin(m_1 x)$$

Or, avec les conditions aux limites, nous avons  $X(0) = X(L_x) = 0$ .

Donc,

$$X(0) = \alpha = 0$$

Donc,

$$X(x) = \beta \sin(m_1 x)$$

Or,

$$X(L_x) = \beta \sin(m_1 L_x) = 0$$

$$\sin(m_1 L_x) = 0$$

$$m_1 L_x = k\pi$$

Pour la fonction  $G$ , on trouve de manière analogue  $Y(y) = \delta \sin(m_2 y)$  et  $m_2 = \frac{l\pi}{L_y}$ .

Or,

$$-m_1^2 - m_2^2 = -\lambda$$

Donc,

$$-\lambda = - \left[ \left( \frac{k\pi}{L_x} \right)^2 + \left( \frac{l\pi}{L_y} \right)^2 \right]$$

De plus, nous avons  $u_{kl} = X_k(x)Y_l(y)$ .

C'est-à-dire que  $u_{kl} = \beta\delta \sin\left(\frac{k\pi}{L_x}x\right) \sin\left(\frac{l\pi}{L_y}y\right)$

On prendra  $u_{kl} = \sin\left(\frac{k\pi}{L_x}x\right) \sin\left(\frac{l\pi}{L_y}y\right)$ , car  $u_{kl}$  correspond aux fonctions de base.

Par ailleurs, nous avons l'équation

$$-c\Delta u = f$$

Nous prenons  $c = 1$ . Nous obtenons donc

$$-\Delta u = f$$

On suppose que  $u$  peut s'écrire sous la forme

$$-u = -\sum a_{kl} u_{kl}$$

Donc que

$$-\Delta u = -\Delta \sum a_{kl} u_{kl}$$

avec  $a_{kl}$  un coefficient à déterminer.

Comme l'opérateur laplacien est linéaire,

$$-\Delta u = \sum a_{kl} (-\Delta u_{kl})$$

Or, il nous faut calculer  $\Delta u_{kl}$ .

$$\begin{aligned} \Delta u_{kl} &= \frac{\partial^2 u_{kl}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_{kl}}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 u_{kl}}{\partial x^2} &= -\sin\left(\frac{l\pi}{L_y} y\right) \left(\frac{k\pi}{L_x}\right)^2 \sin\left(\frac{k\pi}{L_x} x\right) \\ \frac{\partial^2 u_{kl}}{\partial y^2} &= -\sin\left(\frac{k\pi}{L_x} x\right) \left(\frac{l\pi}{L_y}\right)^2 \sin\left(\frac{l\pi}{L_y} y\right) \end{aligned}$$

Donc,

$$\Delta u_{kl} = -\sin\left(\frac{k\pi}{L_x} x\right) \sin\left(\frac{l\pi}{L_y} y\right) \left[ \left(\frac{k\pi}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{l\pi}{L_y}\right)^2 \right]$$

D'où

$$\Delta u_{kl} = -\lambda u_{kl}$$

Ainsi,  $-\Delta u = \sum a_{kl} (-\Delta u_{kl})$  devient

$$-\Delta u = \sum a_{kl} \lambda u_{kl}$$

Or,

$$-\Delta u = f = \sum b_{kl} u_{kl}$$

avec  $b_{kl} = \frac{\int \int f u_{kl}}{\int \int u_{kl}^2}$ , résultat que l'on peut obtenir grâce aux séries de Fourier.

Or,

$$\begin{aligned} \iint u_{kl}^2 &= \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} \sin^2\left(\frac{k\pi}{L_x} x\right) \sin^2\left(\frac{l\pi}{L_y} y\right) dx dy \\ \iint u_{kl}^2 &= \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} \frac{1}{4} (1 - \cos\left(\frac{2k\pi}{L_x} x\right)) (1 - \cos\left(\frac{2l\pi}{L_y} y\right)) \end{aligned}$$

car  $\sin^2(a) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2a))dxdy$ . Donc

$$\begin{aligned} \iint u_{kl}^2 &= \frac{1}{4} \left( \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} 1dxdy - \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} \cos\left(\frac{2k\pi}{L_y}y\right)dxdy \right. \\ &\quad \left. - \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} \cos\left(\frac{2k\pi}{L_x}x\right)dxdy + \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} \cos\left(\frac{2k\pi}{L_x}x\right)\cos\left(\frac{2k\pi}{L_y}y\right)dxdy \right) \\ \iint u_{kl}^2 &= \frac{L_y L_x}{4} \end{aligned}$$

Donc  $b_{kl} = \frac{4 \iint f u_{kl}}{L_y L_x}$ . Ainsi, par identification,

$$a_{kl}\lambda = b_{kl}$$

$$a_{kl} = \frac{b_{kl}}{\lambda}$$

$$a_{kl} = \frac{\iint f u_{kl}}{\iint u_{kl}^2} * \frac{1}{\left(\frac{k\pi}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{l\pi}{L_y}\right)^2}$$

La solution exacte cherchée est donc

$$u(x, y) = \Sigma a_{kl} u_{kl}(x, y)$$

avec  $a_{kl} = \frac{\iint f u_{kl}}{\iint u_{kl}^2} * \frac{1}{\left(\frac{k\pi}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{l\pi}{L_y}\right)^2}$  et  $u_{kl} = \sin\left(\frac{k\pi}{L_x}x\right)\sin\left(\frac{l\pi}{L_y}y\right)$

### 2.2.3 Visualisation de la déformation de la membrane avec Maple

Lors de la résolution exacte, nous avons donc obtenu deux équations. Bien que différentes, ces équations devraient conduire à la même déformation de la membrane. Afin de confirmer cela, nous avons utilisé le logiciel Maple afin de modéliser la déformation de la membrane dans les deux cas. Pour cela, nous avons créé un programme rassemblant les équations et nos valeurs initiales, à savoir les dimensions de la membrane ( $L_x$  et  $L_y$ ), mais aussi le coefficient  $k_1$ , la tension de la membrane ( $c_1$ ) et le second membre  $f$ . Nous obtenons donc deux graphiques, modélisant chacun une équation.

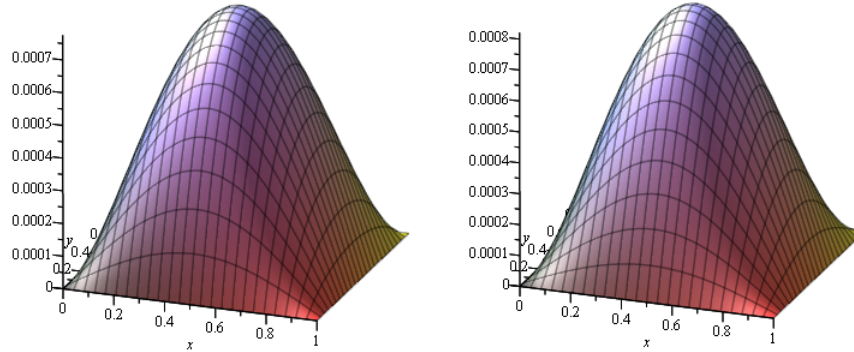


FIGURE 2.1 – Déformation de la membrane (première équation à gauche et deuxième équation à gauche)

Nous remarquons qu’après déformation, la membrane ressemble à une sorte de dôme, ce qui est logique dans la mesure où elle est maintenue par les bords (ce sont nos conditions limites). Visuellement, dans les deux cas, la déformation est identique. Mais, pour plus de précision, nous avons affiché les coordonnées des points présents sur la diagonale de la membrane, comme nous pouvons le voir ci-dessous.

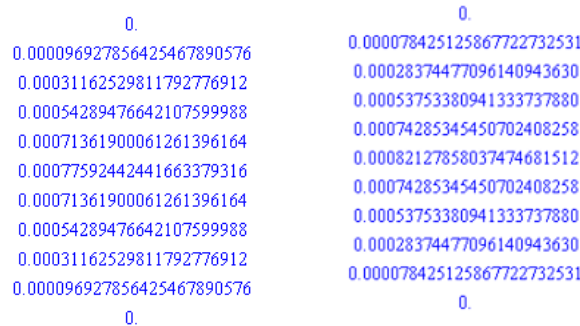


FIGURE 2.2 – Coordonnées des points sur la diagonale (première équation à gauche, deuxième équation à droite)

Dès lors, nous remarquons que l’ordre de grandeur est respecté, mais les résultats ne sont pas parfaitement identiques. Ces différences peuvent être dues aux arrondis du compilateur lors des calculs, mais aussi au nombre de termes choisi lors du calcul de la somme. Nous avons fait cette modélisation avec un seul terme. Mais, même si nous augmentons ce nombre pour être plus précis, les valeurs ne se trouvent pas beaucoup modifiées, et restent très proches dans les deux modélisations. C’est pourquoi, nous pouvons faire l’hypothèse que ces suites/séries convergent rapidement, et que le résultat retourné pour un terme donne une approximation acceptable dans les deux cas.

Ainsi, grâce à cette modélisation sous Maple, nous pouvons remarquer que les deux modélisations sont similaires, montrant une cohérence dans les calculs de la résolution exacte.

## 2.3 Résolution numérique

### 2.3.1 Approximation par les dérivées partielles

#### 2.3.1.1 Obtention des équations

Nous allons réaliser l'étude de la déformation à l'aide du laplacien. Dans ce cas, l'équation régissant la déformation est de la forme  $-c\Delta u(x,y)=f(x,y)$  avec  $c$  constante représentant la tension de la membrane,  $u$  représentant la hauteur de la déformation et  $f$  une fonction dépendant éventuellement de la position sur la membrane.

Il n'est pas possible d'obtenir facilement une formule explicite de  $u$  et/ou de  $f$ , nous allons donc discrétiser le problème en évaluant les valeurs à intervalles réguliers en  $x$  et en  $y$  (maillage).

On peut approximer le laplacien des deux doubles dérivées partielles (par rapport à  $x$  et  $y$ ) grâce à deux développements de Taylor successifs.

$$u(x_{i+1}, y_i) = u(x_i, y_i) + h \frac{\partial u(x_i, y_i)}{\partial x} + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 u(x_i, y_i)}{\partial x^2} + h^2 \varepsilon(x_i, y_i)$$

$$u(x_{i-1}, y_i) = u(x_i, y_i) - h \frac{\partial u(x_i, y_i)}{\partial x} + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 u(x_i, y_i)}{\partial x^2} + h^2 \varepsilon(x_i, y_i)$$

avec  $h$  l'espace entre deux mesures en  $x$ .

En additionnant ces deux développements, les dérivées simples par rapport à  $x$  s'annulent :

$$u(x_{i+1}, y_i) + u(x_{i-1}, y_i) \approx 2u(x_i, y_i) + h^2 \frac{\partial^2 u(x_i, y_i)}{\partial x^2}$$

et donc

$$\frac{\partial^2 u(x_i, y_i)}{\partial x^2} \approx \frac{1}{h^2} (u(x_{i+1}, y_i) - 2u(x_i, y_i) + u(x_{i-1}, y_i))$$

De même pour la double dérivée par rapport à  $y$  :

$$\frac{\partial^2 u(x_i, y_i)}{\partial y^2} \approx \frac{1}{k^2} (u(x_i, y_{i+1}) - 2u(x_i, y_i) + u(x_i, y_{i-1}))$$

avec  $k$  l'espace entre deux mesures en  $y$ .

En prenant les mêmes intervalles de mesures en  $x$  et  $y$  (donc  $h = k$ ), on obtient :

$$-c\Delta u_{i,j} = \frac{c}{h^2} (-u_{i+1,j} - u_{i,j+1} + 4u_{i,j} - u_{i-1,j} - u_{i,j-1}) = f_{i,j}$$



avec  $(i, j) \in \llbracket 0; N+1 \rrbracket^2$  si on prend une membrane carrée.

Il faut également prendre en compte les conditions aux limites : la déformation est nulle aux bords du maillage, on a donc  $u_{0,j} = 0$  et  $u_{N+1,j} = 0$  pour les bords en  $x$  et  $u_{i,0} = 0$  et  $u_{i,N+1} = 0$  en  $y$ .

### 2.3.1.2 Obtention de l'équation matricielle pour $N=3$

On peut par exemple réaliser un maillage  $3 \times 3$  (donc 9 points de mesure), au bord la déformation est nulle donc pour  $i = 0, i = 4, j = 0$  et  $j = 4$  on a  $u_{i,j} = 0$ .

Il nous reste donc 9 valeurs à déterminer et on peut écrire 9 équations :

$$\left\{ \begin{array}{l} -u_{2,1} - u_{1,2} + 4u_{1,1} - u_{0,1} - u_{1,0} = \frac{h^2}{c^2} f_{1,1} \\ -u_{2,2} - u_{1,3} + 4u_{1,2} - u_{0,2} - u_{1,1} = \frac{h^2}{c^2} f_{1,2} \\ -u_{2,3} - u_{1,4} + 4u_{1,3} - u_{0,3} - u_{1,2} = \frac{h^2}{c^2} f_{1,3} \\ -u_{3,1} - u_{2,2} + 4u_{2,1} - u_{1,1} - u_{2,0} = \frac{h^2}{c^2} f_{2,1} \\ -u_{3,2} - u_{2,3} + 4u_{2,2} - u_{1,2} - u_{2,1} = \frac{h^2}{c^2} f_{2,2} \\ -u_{3,3} - u_{1,4} + 4u_{2,3} - u_{1,3} - u_{2,2} = \frac{h^2}{c^2} f_{2,3} \\ -u_{4,1} - u_{3,2} + 4u_{3,1} - u_{2,1} - u_{3,0} = \frac{h^2}{c^2} f_{3,1} \\ -u_{4,2} - u_{3,3} + 4u_{3,2} - u_{2,2} - u_{3,1} = \frac{h^2}{c^2} f_{3,2} \\ -u_{4,3} - u_{3,4} + 4u_{3,3} - u_{2,3} - u_{3,2} = \frac{h^2}{c^2} f_{3,3} \end{array} \right.$$

Certaines de ces valeurs de  $u$  valent 0, on obtient donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} -u_{2,1} - u_{1,2} + 4u_{1,1} = \frac{h^2}{c^2} f_{1,1} \\ -u_{2,2} - u_{1,3} + 4u_{1,2} - u_{1,1} = \frac{h^2}{c^2} f_{1,2} \\ -u_{2,3} + 4u_{1,3} - u_{1,2} = \frac{h^2}{c^2} f_{1,3} \\ -u_{3,1} - u_{2,2} + 4u_{2,1} - u_{1,1} = \frac{h^2}{c^2} f_{2,1} \\ -u_{3,2} - u_{2,3} + 4u_{2,2} - u_{1,2} - u_{2,1} = \frac{h^2}{c^2} f_{2,2} \\ -u_{3,3} + 4u_{2,3} - u_{1,3} - u_{2,2} = \frac{h^2}{c^2} f_{2,3} \\ -u_{3,2} + 4u_{3,1} - u_{2,1} = \frac{h^2}{c^2} f_{3,1} \\ -u_{3,3} + 4u_{3,2} - u_{2,2} - u_{3,1} = \frac{h^2}{c^2} f_{3,2} \\ 4u_{3,3} - u_{2,3} - u_{3,2} = \frac{h^2}{c^2} f_{3,3} \end{array} \right.$$

On peut résumer ce système linéaire de la forme  $\frac{c}{h^2} A * U = F$  avec  $A$  matrice carrée de taille 9 ( $N^2$ ) et  $U$  et  $F$  matrices colonnes :

$$\frac{c}{h^2} * \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} u_{1,1} \\ u_{1,2} \\ u_{1,3} \\ u_{2,1} \\ u_{2,2} \\ u_{2,3} \\ u_{3,1} \\ u_{3,2} \\ u_{3,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{1,1} \\ f_{1,2} \\ f_{1,3} \\ f_{2,1} \\ f_{2,2} \\ f_{2,3} \\ f_{3,1} \\ f_{3,2} \\ f_{3,3} \end{pmatrix}$$

La matrice  $A$  peut s'écrire

$$A = \begin{pmatrix} X & -I & O \\ -I & X & -I \\ O & -I & X \end{pmatrix}$$

$$\text{avec } X = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}, I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

### 2.3.1.3 Equation matricielle pour une taille quelconque

Plus généralement avec  $(i, j) \in \llbracket 0, N + 1 \rrbracket^2$ , on peut toujours résumer le système par une équation matricielle de la forme  $\frac{c}{h^2} * A * U = F$ , avec  $A$  matrice carrée de taille  $N^2$  et  $A$  et  $F$  matrices colonnes de taille  $N^2$ .

$$A = \begin{pmatrix} X & -I & O & \dots & O \\ -I & X & -I & \ddots & \vdots \\ O & -I & \ddots & -I & O \\ \vdots & \ddots & -I & X & -I \\ O & \dots & O & -I & X \end{pmatrix}$$

$$\text{avec } X = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 4 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & -1 & 0 \\ \vdots & \ddots & -1 & 4 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}, I \text{ matrice identité, et } O = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

### 2.3.2 Résolution matricielle

On cherche à résoudre :

$$Ax = b$$

Ce système peut, **théoriquement**, être résolu grâce au calcul de l'inverse de  $A$ . En effet,  $x = A^{-1}b$ . Cependant en pratique, le calcul de l'inverse de  $A$  entraîne beaucoup d'erreur et ne peut qu'être approché.

### 2.3.2.1 Méthode de Cholesky

**Théorème :** Soit  $A$  une matrice symétrique définie positive. Alors il existe une matrice triangulaire inférieur  $L$  telle que  $A = LL^t$ .

Cette méthode est utilisée pour résoudre des systèmes linéaires. Elle est donc parfaitement adaptée à notre calcul. On utilise donc cette méthode pour résoudre le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} Lz &= b \\ L^t x &= z \end{cases} \quad (2.1)$$

On a bien

$$\begin{aligned} Lz = b &\Rightarrow LL^t x = b \\ &\Rightarrow Ax = b \end{aligned}$$

### 2.3.2.2 Algorithme de calcul

On pose  $A = (a_{ij})$  et  $L = (l_{ij})$ .

On a  $A = LL^t \Leftrightarrow a_{ij} = \sum_{k=1}^{\min(i,j)} l_{ik}l_{jk}$ .

Or  $A$  étant symétrique, donc  $a_{ij} = \sum_{k=1}^i l_{ik}l_{jk}$  avec  $i \leq j$ .

On détermine d'abord les  $i - 1$  premières colonnes de  $L$

**Pour  $i = 1$  :** On commence par le terme sur la diagonale et on détermine la 1ère colonne de  $L$  :

$$\begin{cases} a_{11} = l_{11}^2 \\ a_{1j} = l_{11}l_{j1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} l_{11} = \sqrt{a_{11}} \\ l_{j1} = \frac{a_{1j}}{l_{11}} \end{cases}$$

**Pour  $i = 2$  :** On utilise la même méthode pour déterminer la 2ème colonne de  $L$  :

$$\begin{cases} a_{22} = l_{21}^2 + l_{22}^2 \\ a_{2j} = l_{21}l_{j1} + l_{22}l_{j2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} l_{22} = \sqrt{a_{22} - l_{21}^2} \\ l_{j2} = \frac{a_{2j} - l_{21}l_{j1}}{l_{22}} \end{cases}$$

Puis on fait de même pour les  $i - 1$  premières colonnes de  $L$ . Finalement, pour la  $i$ -ème colonne :

$$\begin{cases} a_{ii} = \sum_{k=1}^i l_{ik}^2 \\ a_{ij} = \sum_{k=1}^i l_{ik}l_{jk} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} l_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}^2} \\ l_{j2} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}l_{jk}}{l_{ii}} \end{cases} \quad (2.2)$$

Désormais, il suffit de résoudre le système obtenu grâce à la décomposition de Cholesky. On procède par ordre croissant des indices pour  $Lz = b$ , puis par ordre décroissant pour  $L^t x = z$ .

### 2.3.2.3 Résolution

**Résultats Pascal :** On utilise un programme Pascal basé sur la méthode de Cholesky. Avec pour conditions initiales  $c_1 = 100$  et  $f = 1$ .

On utilise 3 tailles de matrices pour comparer les résultats :  $N \in \{3; 5; 7\}$ .

On obtient les résultats suivants (la matrice de taille  $N = 7$  est disponible en annexe) :

```
X=
6.874999999999991E-005 |
8.749999999999986E-005 |
6.875000000000004E-005 |
8.749999999999999E-005 |
1.124999999999998E-004 |
8.749999999999986E-005 |
6.875000000000004E-005 |
8.749999999999986E-005 |
6.874999999999991E-005 |
```

FIGURE 2.3 – matrice  $x$  pour  $N = 3$  en Pascal

```
X=
1.1825324875235337E-005 |
1.5272351766527479E-005 |
1.1825147454839293E-005 |
1.7236048326129843E-005 |
2.2646035327751259E-005 |
1.7235338644545667E-005 |
1.9679933693248743E-005 |
2.6047503165518026E-005 |
1.9677272387308094E-005 |
2.0643283873063069E-005 |
2.7393871845479986E-005 |
2.0633348330884658E-005 |
2.0706430545239524E-005 |
2.7458452604170173E-005 |
2.0669349682466534E-005 |
1.9931086295440824E-005 |
2.6271258935210617E-005 |
1.9792698386527276E-005 |
1.7953756293029134E-005 |
2.3109899046420175E-005 |
1.7437285520147926E-005 |
1.3981140421971504E-005 |
1.5984396029008982E-005 |
1.2053645239360233E-005 |
7.1935099575638828E-006 |
```

FIGURE 2.4 – matrice  $x$  pour  $N = 5$  en Pascal

On remarque que l'ordre de grandeur est légèrement différent suivant la taille du maillage utilisé. Cela vient du fait qu'un système matriciel plus grand nécessite plus de calcul et entraîne donc plus d'imprécision. L'allure de la déformation reste cependant la même : une grande déformation au centre de la membrane, qui s'atténue en s'approchant des bords.

**Résultats Matlab :** On refait les mêmes calculs sur Matlab. Cette fois, on représente graphiquement la matrice. On retrouve la même allure : des valeurs plus importantes au centre, qui diminuent aux bords.

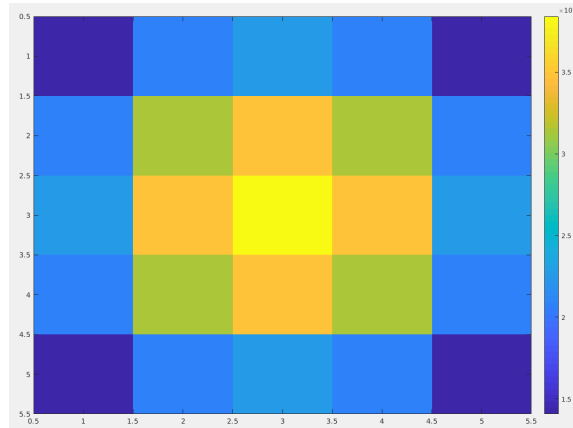


FIGURE 2.5 – matrice  $x$  pour  $N = 5$  sur Matlab

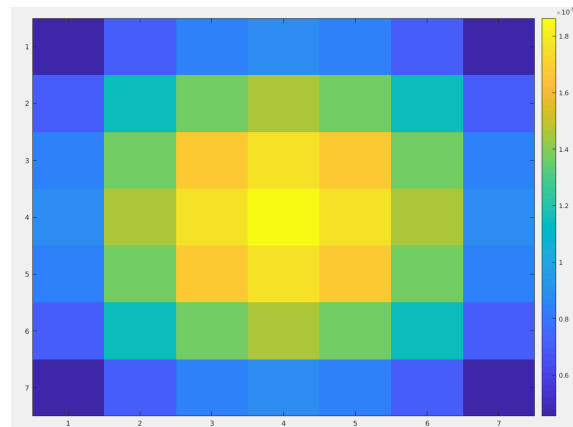


FIGURE 2.6 – matrice  $x$  pour  $N = 7$  sur Matlab

**Résultats Maple :** Sur Maple, les résultats ne sont pas parfaitement identiques (par rapport aux résultats en Pascal et en Matlab). L'ordre de grandeur reste cependant le même.

$$x = \begin{bmatrix} 9,55 \times 10^{-5} & 1,24 \times 10^{-4} & 1,35 \times 10^{-4} & 1,58 \times 10^{-4} & 1,66 \times 10^{-4} & 1,58 \times 10^{-4} & 1,35 \times 10^{-4} & 1,24 \times 10^{-4} & 9,55 \times 10^{-5} \end{bmatrix}$$

FIGURE 2.7 – matrice  $x$  pour  $N = 3$  sur Maple

$$x = [3,62 \times 10^{-5}, 5,10 \times 10^{-5}, 6,15 \times 10^{-5}, 7,89 \times 10^{-5}, 9,15 \times 10^{-5}, 1,01 \times 10^{-4}, 1,12 \times 10^{-4}, 1,20 \times 10^{-4}, 1,26 \times 10^{-4}, 1,32 \times 10^{-4}, \\ 1,35 \times 10^{-4}, 1,37 \times 10^{-4}, 1,38 \times 10^{-4}, 1,37 \times 10^{-4}, 1,35 \times 10^{-4}, 1,32 \times 10^{-4}, 1,26 \times 10^{-4}, 1,20 \times 10^{-4}, 1,12 \times 10^{-4}, 1,01 \times 10^{-4}, \\ 9,15 \times 10^{-5}, 7,89 \times 10^{-5}, 6,15 \times 10^{-5}, 5,10 \times 10^{-5}, 3,62 \times 10^{-5}]$$

FIGURE 2.8 – matrice  $x$  pour  $N = 5$  sur Maple

### 2.3.3 Conclusion partielle

Les propriétés physiques sont vérifiées : on a bien une déformation plus importante au centre de la membrane. Cette déformation s'atténue à l'approche des bords qui sont fixés.

Au niveau mathématique, les résultats sont les mêmes à  $10^{-5}$  près. La différence est dû au fait que les méthodes de résolution diffèrent d'un programme à l'autre. D'un côté, les programmes sous Maple utilisent des techniques de calcul formel pour la résolution d'équation et les solutions sont donc exactes tant qu'on n'essaye pas de les approcher. De l'autre, les programmes sous Matlab et Pascal utilisent du calcul numérique, et font donc leurs calculs en utilisant un nombre fini de flottant (tous les nombres de  $\mathbb{R}$  ne sont pas représentables en machine). Ainsi, dans ce type de programme, on ne résout plus  $Ax = b$  mais plutôt  $A * (x + \Delta x) = b + \Delta b$ .

Aussi, au sein d'un même programme (en Matlab et Pascal), les résultats pour des tailles de matrice différentes ne sont pas les mêmes. Cette imprécision vient du fait qu'une matrice plus grande nécessite plus de calculs et est donc plus touchée par les erreurs de calculs.

Pour représenter au mieux ce phénomène de déformation, il serait intéressant de penser à une manière d'avoir un maillage de taille variable : plus large à proximité des bords, et plus fin au centre.

# Conclusion

Au cours de ce projet, nous avons tenté de modéliser la déformation d'une membrane rectangulaire, autour de trois grandes lignes directrices : la physique, les mathématiques et l'informatique.

Tout d'abord, c'est grâce à la physique que nous avons tenté de discrétiser la membrane, de façon à ne plus avoir une surface continue, mais uniquement un maillage de points.

Nous avons ensuite modélisé la membrane et sa déformation grâce aux mathématiques. Pour ce faire, nous avons eu recours aux équations différentielles, mais aussi aux séries de Fourier. Nous avons résolu l'équation  $-c\Delta u = f$  de deux manières différentes : une solution s'exprimant à l'aide de cosinus et sinus hyperboliques et l'autre uniquement avec des sinus et cosinus.

Afin de simuler numériquement la déformation de la membrane et vérifier la cohérence de nos calculs, nous avons utilisé des programmes Maple, Matlab et Pascal pour la résolution numérique afin d'approcher la matrice représentant notre modèle discret. Nous avons ensuite comparé leur précision et leur pertinence.

Mais, au-delà des outils et des connaissances scientifiques utilisés au sein de l'EC de P6, ce projet nous a permis de développer notre esprit de groupe. En effet, pour mener à bien les recherches, il nous a fallu communiquer entre nous, nous organiser et respecter les délais que nous nous sommes fixés, ce qui est très important en tant que futurs ingénieurs.

En ce qui concerne la poursuite de ce projet, nous avons pensé qu'il pourrait être intéressant de refaire une étude similaire avec une forme de membrane différente, par exemple triangulaire ou circulaire. Il serait aussi intéressant d'adopter un maillage triangulaire ou variable : étroit au milieu de la déformation et plus large vers les bords.



## Annexe

```
X=
3.2079584279474348E-006 |
4.1443738903488069E-006 |
3.2079584266706572E-006 |
4.6874598214409317E-006 |
6.1615787067771367E-006 |
4.6874598163338220E-006 |
5.3803021510391565E-006 |
7.1270212989849872E-006 |
5.3803021318874934E-006 |
5.7067274837307046E-006 |
7.5859022062361649E-006 |
5.7067274122311653E-006 |
5.8607055776474964E-006 |
7.8031326299978027E-006 |
5.8607053108010065E-006 |
5.9329621968614811E-006 |
7.9052174253065405E-006 |
5.9329612009750599E-006 |
5.9659257844918867E-006 |
7.9518136733918194E-006 |
5.9659220677926920E-006 |
5.9789272677142457E-006 |
7.9701894159761544E-006 |
5.9789133968038922E-006 |
5.9795938703889443E-006 |
7.9711033259946639E-006 |
5.9795421034467252E-006 |
5.9683448878468627E-006 |
7.9550879141668293E-006 |
5.9681516909883449E-006 |
5.9386977668316747E-006 |
7.9127517518374427E-006 |
5.9379767463398261E-006 |
5.8736944276423987E-006 |
7.8192445800114417E-006 |
5.8710035425335195E-006 |
5.7368353637264827E-006 |
7.6195285980323950E-006 |
5.7267928437828121E-006 |
5.4541184292311399E-006 |
7.1952416046088404E-006 |
5.4166392345653375E-006 |
4.8843967485892366E-006 |
6.2906801566064919E-006 |
4.7445224898697002E-006 |
3.7927884085193140E-006 |
4.3385597833581947E-006 |
3.2707705683069741E-006 |
1.9481971021298287E-006 |
```

FIGURE 2.9 – matrice  $x$  pour  $N = 7$  sur Pascal

# Table des figures

2.1	Déformation de la membrane (première équation à gauche et deuxième équation à gauche) . . . . .	11
2.2	Coordonnées des points sur la diagonale (première équation à gauche, deuxième équation à droite) . . . . .	11
2.3	matrice $x$ pour $N = 3$ en Pascal . . . . .	16
2.4	matrice $x$ pour $N = 5$ en Pascal . . . . .	17
2.5	matrice $x$ pour $N = 5$ sur Matlab . . . . .	18
2.6	matrice $x$ pour $N = 7$ sur Matlab . . . . .	18
2.7	matrice $x$ pour $N = 3$ sur Maple . . . . .	18
2.8	matrice $x$ pour $N = 5$ sur Maple . . . . .	19
2.9	matrice $x$ pour $N = 7$ sur Pascal . . . . .	21

# Sources bibliographiques

1. [www.cnrs.fr/publications/imagesdelaphysique/couv-PDF/imagephys98/86-93.pdf](http://www.cnrs.fr/publications/imagesdelaphysique/couv-PDF/imagephys98/86-93.pdf)
2. [math.univ-lyon1.fr/~herbach/download/Rapport\\_stage\\_LATP.pdf](http://math.univ-lyon1.fr/~herbach/download/Rapport_stage_LATP.pdf)
3. [www-fourier.ujf-grenoble.fr/~faure/enseignement/projets\\_simulation/tambour/tamb1.pdf](http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~faure/enseignement/projets_simulation/tambour/tamb1.pdf)
4. [www.ljll.math.upmc.fr/~ledret/M1/ComplementsM1ApproxEDP.pdf](http://www.ljll.math.upmc.fr/~ledret/M1/ComplementsM1ApproxEDP.pdf)
5. [perso.uclouvain.be/gaetan.compere/docs/TFE2005.pdf](http://perso.uclouvain.be/gaetan.compere/docs/TFE2005.pdf)
6. [www.ipgp.fr/~dormy/Palais/node1.html](http://www.ipgp.fr/~dormy/Palais/node1.html)
7. [perso.ens-lyon.fr/jean-christophe.geminard/FILES/qpuydt.pdf](http://perso.ens-lyon.fr/jean-christophe.geminard/FILES/qpuydt.pdf) <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00826561/document>