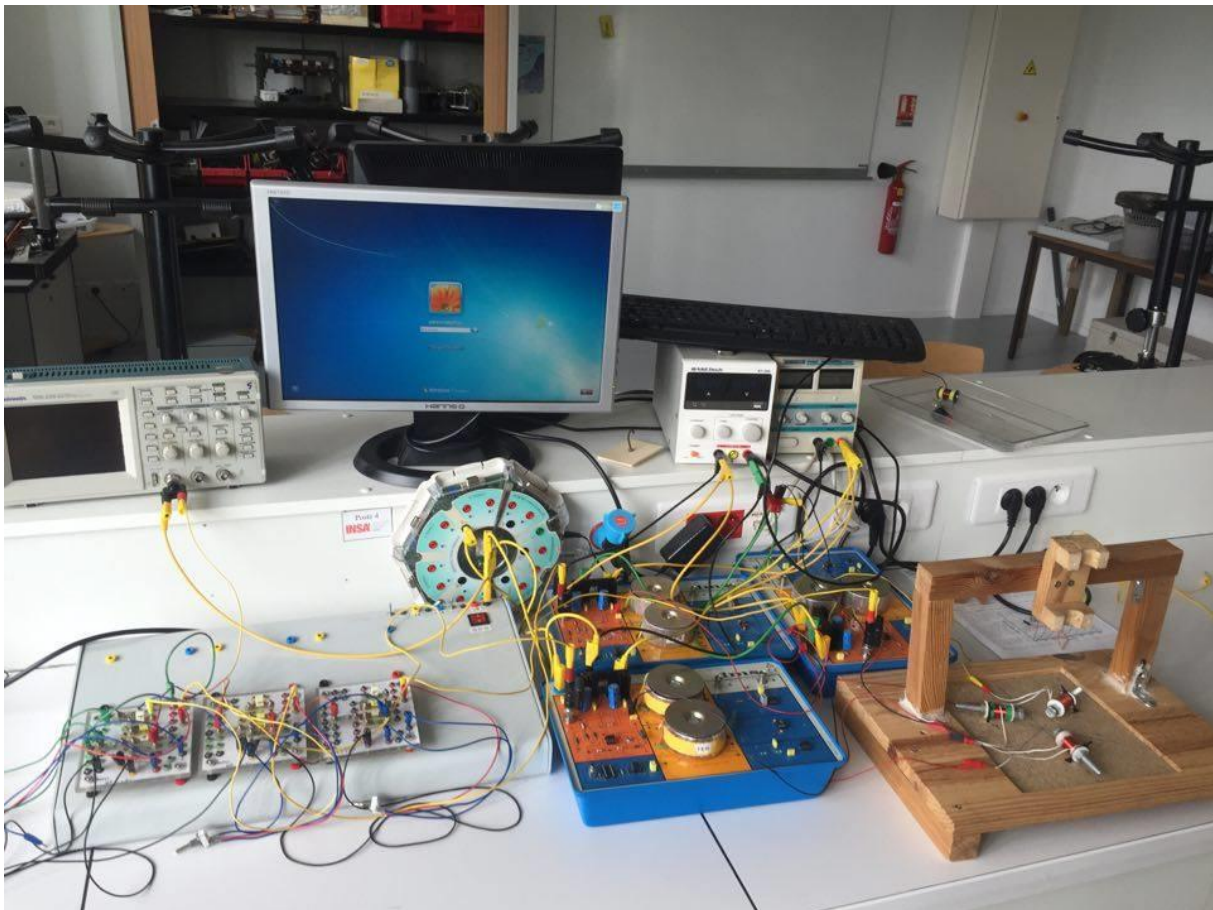


Les moteurs électriques à courant alternatif



Etudiants :
Adrien Grenouilloux Gregoire Collin
You Yang
Enseignant responsable du projet :
François Guillotin

Date de remise du rapport : 13/06/2016

Référence du projet : STPI/P6/2016 – n°35

Intitulé : Les moteurs électriques à courant alternatif

Type de projet : théorique et expérimental

Objectif du projet :

Comprendre la théorie sur les moteurs électriques à courant alternatif. C'est-à-dire faire le lien entre plusieurs matières que nous avons suivi durant nos 2 premières années à l'INSA : la P3 pour la partie électricité, la CTI pour la partie mécanique et la P5 pour l'électromagnétisme. Puis une fois cette théorie assimilée, fabriquer notre propre moteur expérimental afin de se rendre compte, de manière concrète, de comment cela fonctionne et de la complexité à le mettre en place.

Mots clés : - moteur

- électricité
- électromagnétisme
- modèle expérimental

Sommaire

1. Introduction.....	4
2. Méthodologie et organisation du travail.....	6
3. Travail réalisé et résultats	7
1. Etude théorique des moteurs électriques à courant alternatif	7
1. Structure des moteurs électriques.....	7
2. Moteurs asynchrones	7
3. Moteurs synchrones.....	12
2. Mise en œuvre expérimentale, réalisation d'un modèle.....	15
1. Générateur triphasé.....	15
2. Mise en œuvre du générateur triphasé	18
3. Moteur.....	22
4. Conclusion et perspectives.....	24
5. Bibliographie.....	25
6. Annexe.....	27

1. Introduction

Lors de ce semestre 4 de notre enseignement à l'INSA De Rouen, il nous était demandé de réaliser un projet de physique sur un thème choisi préalablement. Nous devions individuellement le choisir dans une liste proposée par les différents enseignants en charge de ces projets. Nous l'avons donc choisi en fonction de nos affinités et nos goûts et nous avons eu le projet sur les moteurs électriques à courant alternatif. Ce projet nous a tout de suite paru intéressant dans la mesure où les moteurs électriques sont présents partout dans notre monde. Il nous paraissait nécessaire et passionnant de comprendre leur fonctionnement. De plus, allier la théorie et l'expérience est motivant, ceci dans le but de se rendre compte à quoi un tel montage pouvait ressembler et de le voir tourner réellement sous nos yeux. D'autre part, mais cela ne concerne que Adrien et Grégoire, nous avons voulu faire un TIPNE sur un sujet très similaire et nous n'avions pas pu. Ce projet nous a donc encore plus motivé. Pour finir, il nous tardait depuis notre entrée à l'INSA de réaliser quelque chose de concret et conséquent et surtout de faire le lien entre de nombreuses matières pour enfin voir le côté pratique de la théorie.

2. Méthodologie et organisation du travail

Afin de répondre à ces problèmes, nous avons décomposé notre travail de la sorte.

Tout d'abord nous avons décidé de faire une étude très théorique sur ces moteurs. Pour cela nous nous sommes aidés d'un sujet de concours de classe préparatoire, que nous avons fait.

Ensuite, nous avons utilisé des livres ayant pour thème ce sujet. Ce travail de recherche a été fait de manière personnelle en dehors des heures de P6.

Dans le même temps, nous avons donc une séance hebdomadaire d'une heure et demie durant laquelle nous nous sommes attelés à la réalisation expérimentale d'un moteur électrique à courant alternatif. Comme il y avait plusieurs tâches à effectuer, nous nous sommes réparti le travail sur les différentes parties du moteur. Lors de ces séances nous avons aussi discuté avec le professeur référent, MR Guillotin qui nous donnait des compléments ou qui nous expliquait des notions mal comprises. En effet, les livres que nous avons empruntés à la bibliothèque ne traitaient que de la partie électromagnétisme des moteurs. C'est pourquoi nous avons dû nous-même nous occuper de la partie électricité, ce qui nous a pris la majorité de notre temps. Cette partie étant assez complexe, nous devions demander, à plusieurs reprises, des explications au professeur.

Pour finir, un point très agréable était le fait que nous étions 2 groupes dans la salle de travaux pratiques et que leur sujet était les moteurs électriques, comme nous, mais à courant continu. Nous avons donc échangé durant les séances sur notre projet, son avancement, etc...

Durant ce travail, nous avons créé et communiqué via un groupe facebook, nous permettant de partager nos recherches, nos documents, nos parties rédigées mais aussi nos remarques. Nous avons eu la chance de bien nous entendre et de tous apprécier le sujet ce qui a rendu le travail plus agréable, facile et motivant.

Concernant la rédaction du dossier, nous avons fait quelque chose de spécial. Effectivement, Yang ayant des difficultés à s'exprimer en français, le rapport n'a été rédigé que par Grégoire et Adrien exclusivement. Cependant, Yang a participé activement dans la création de schéma et la mise en page de ce rapport.

3. Travail réalisé et résultats

1. Etude théorique des moteurs électriques à courant alternatif

1. Structure des moteurs électriques

Les moteurs électriques se composent principalement de deux parties. D'un côté nous retrouvons une partie fixe que l'on nomme *stator* et une partie tournante que l'on nomme *rotor*. La composition du rotor varie en fonction du type de moteur. Cependant, la structure du stator est la même pour les deux.

Le stator :

Le Théorème de Ferraris (cf. Annexe Théorème de Ferraris page 27) nous a permis de montrer qu'il était possible de créer un champ tournant à partir de n bobines. Ainsi, le stator des moteurs électriques a pour rôle de créer un champ magnétique $\vec{B}(t)$ tournant. Le stator du moteur que nous avons modélisé était triphasé : il comportait trois bobines, ou trois phases.

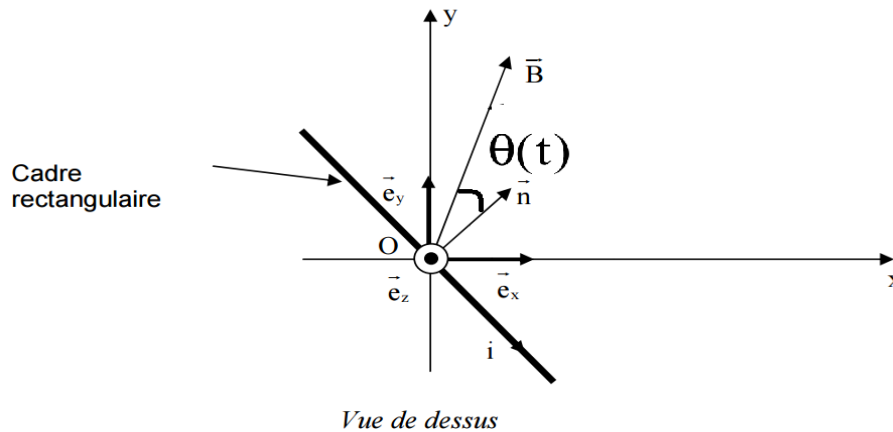
Le rotor :

Cette partie peut prendre deux formes. Si le moteur est dit asynchrone, le rotor le plus utilisé est un rotor en cage d'écureuil : il est composé de deux anneaux conducteurs reliés par des bagues métalliques. Si le moteur est synchrone, le rotor est un aimant permanent ou un électro-aimant alimenté par un courant continu.

2. Moteurs asynchrones

Principe de fonctionnement d'un moteur asynchrone:

Considérons un cadre rectangulaire de N spires (cf. Schéma ci-dessous) pouvant tourner par rapport à l'axe (Oz) . Celui-ci se caractérise par sa résistance R , son inductance L , sa surface S et sa vitesse de rotation ω . Notons $\theta(t)$ l'angle entre le vecteur surface \vec{dS} et le champ magnétique $\vec{B}(t)$, ce dernier étant uniforme de norme B_0 et tournant à la vitesse de rotation ω_0 constante. Nous allons montrer que, lorsque ce cadre est soumis à un champ magnétique non stationnaire, les forces de Laplace créent un couple Γ d'axe \vec{e}_z qui le met en rotation.



Lorsque les spires sont soumises au champ magnétique $\vec{B}(t)$, le flux $\Phi(t)$ à travers leurs surfaces S , créer, d'après la Loi de Faraday, une force électromotrice e au sein de celle-ci.

Notons $\theta(t) = (\omega_0 - \omega)t = \omega_r t$

On a donc :

$$e(t) = -\frac{d\Phi(t)}{dt}$$

Or

$$\Phi_{tot}(t) = N\Phi_{1spire}(t) = N \iint_S \vec{B}(t) \cdot \vec{dS} = N \iint_S B_0 \cdot dS \cdot \cos(\theta(t)) = N \iint_S B_0 \cdot dS \cdot \cos(\omega_r t) = NB_0 S \cos(\omega_r t)$$

Donc $e(t)$ devient :

$$e(t) = -\frac{d\Phi(t)}{dt} = -\frac{d(NB_0 S \cos(\omega_r t))}{dt} = NB_0 S \omega_r \sin(\omega_r t)$$

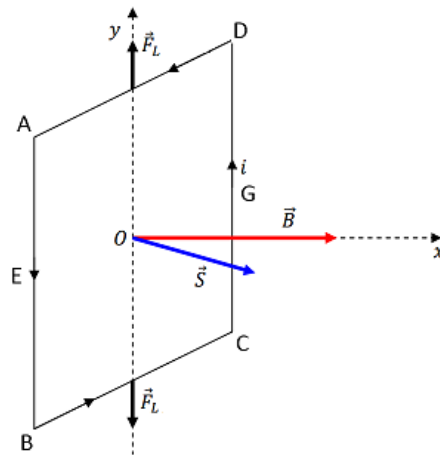
Le cadre pouvant être modélisé comme un dipôle RL , on en déduit, en appliquant la loi des mailles, que :

$$e(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt}$$

La résolution de cette équation différentielle nous permet d'écrire le courant $i(t)$ sous la forme :

$$i(t) = I_M \sin(\omega_r t - \Psi)$$

Avec $\Psi = \arctan\left(\frac{L\omega_r}{R}\right)$ et $I_M = \frac{NB_0 S \omega_r}{\sqrt{R^2 + L^2 \omega_r^2}}$ (voir annexe résolution de l'équation différentielle 1)



Chacune des quatre portions du cadre est soumise à une force de Laplace. Nous savons que, de manière générale, sur un conducteur rectiligne AB soumis à un champ magnétique \vec{B} elle a pour expression $\vec{F}_L = I \vec{AB} \wedge \vec{B}$

On a donc, le long du segment AB :

$$\vec{F}_{AB} = NI \vec{AB} \wedge \vec{B}$$

$$\Rightarrow \vec{F}_{AB} = NI_M \sin(\omega_r t - \Psi) \begin{pmatrix} 0 \\ -L \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} B_0 \cos(\theta(t)) \\ B_0 \sin(\theta(t)) \\ 0 \end{pmatrix} = i(t)NLB_0 \cos(\theta(t)) \vec{e}_z$$

On a de même :

$$\vec{F}_{CD} = -i(t)NLB_0 \cos(\theta(t)) \vec{e}_z$$

$$\vec{F}_{BC} = -i(t)NLB_0 (-\sin(\theta(t)) \vec{e}_r + \cos(\theta(t)) \vec{e}_\theta)$$

$$\vec{F}_{DA} = i(t)NLB_0 (\sin(\theta(t)) \vec{e}_r - \cos(\theta(t)) \vec{e}_\theta)$$

On observe que la somme de ces forces de Laplace est nulle. Cependant, intéressons-nous à leurs moments en O . Les forces \vec{F}_{AB} et \vec{F}_{CD} ayant point pour point d'application E et G ont un moment nul par rapport à O (dû à la colinéarité des vecteurs). Cependant, \vec{F}_{DA} et \vec{F}_{BC} , ont des moments non nuls par rapport O . On a :

$$\vec{M}_{O,F(BC)} = \vec{OF} \wedge \vec{F}_{BC}$$

$$\Rightarrow \vec{M}_{O,F(BC)} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{L}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -i(t)NLB_0 \sin(\theta(t)) \\ i(t)NLB_0 \cos(\theta(t)) \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{L}{2} i(t)NLB_0 \sin(\theta(t)) \vec{e}_z$$

De même :

$$\vec{M}_{O,F(DA)} = \frac{L}{2} I_M \sin(\omega_r t - \Psi) N l B_0 \sin(\theta(t)) \vec{e}_z$$

Le moment résultant total des forces de Laplace est :

$$\begin{aligned} \Gamma_L &= \vec{M}_{O,F(BC)} + \vec{M}_{O,F(DA)} \\ \Rightarrow \Gamma_L &= I_M \sin(\omega_r t - \Psi) N S B_0 \sin(\omega_r t) \vec{e}_z \end{aligned}$$

Nous pouvons encore écrire ce résultat sous la forme :

$$\Gamma_L = I_M N S B_0 (\sin^2(\omega_r t) \cos(\Psi) - \frac{\sin(2\omega_r t)}{2} \sin(\Psi)) \vec{e}_z$$

Ainsi, sa valeur moyenne est :

$$\langle \Gamma_L \rangle = \frac{I_M N S B_0 \cos(\Psi)}{2}$$

Nous pouvons finalement écrire ce résultat sous la forme :

$$\langle \Gamma_L \rangle = \frac{(N S B_0)^2 R L \omega_r}{2L(R^2 + (L\omega_r)^2)} = \frac{(N S B_0)^2}{2L} * \frac{1}{\frac{R}{L\omega_r} + \frac{L\omega_r}{R}} \quad (\text{cf. Simplification du couple de Laplace page 29})$$

Cette deuxième écriture nous a permis de tracer le graphique du couple en fonction de la vitesse de rotation du cadre ω . On remarque que si $\omega \geq \omega_0$ le couple $\langle \Gamma_L \rangle \leq 0$: le moteur à un comportement frein. Le système va donc ralentir la vitesse de rotation du cadre. D'autre part, si $\omega \leq 0$, c'est-à-dire que le cadre tourne dans le sens opposé au sens du champ tournant $\vec{B}(t)$, le moteur a de même un comportement frein : il va donc ralentir la rotation du cadre.

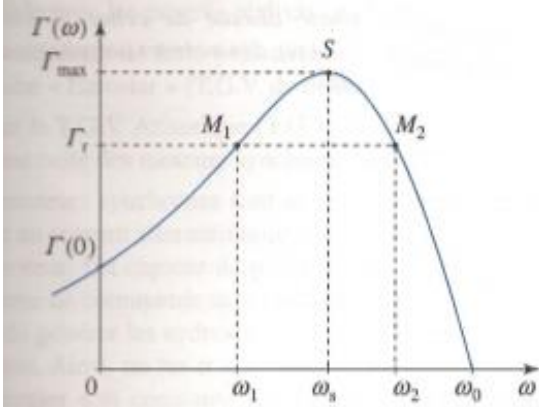
On peut aussi remarquer que le couple au démarrage ($\omega = 0$) est non nul et vaut :

$$\langle \Gamma_L \rangle = \frac{(N S B_0)^2 R \omega_0}{2(R^2 + (L\omega_0)^2)}$$

C'est une caractéristique des moteurs asynchrones.

Caractéristiques de son fonctionnement en charge :

Intéressons-nous maintenant plus précisément à la partie où notre machine électrique a un comportement moteur.



Supposons qu'elle est soumise à un couple extérieur résistant $-\Gamma_r$ avec $\Gamma_r \geq 0$. Nous remarquons qu'il existe deux points de fonctionnement M_1 et M_2 aux vitesses de fonctionnement ω_1 et ω_2 . Cependant, le point M_1 est instable. En effet, nous observons que si la vitesse ω du cadre diminue, la valeur du couple des forces de Laplace diminue aussi : le cadre fini par s'arrêter et le moteur ne tourne plus. De même si la vitesse du cadre augmente, le couple qui lui est associé aussi, ce qui accélérera le cadre jusqu'à la vitesse ω_2 .

On observe que M_2 est stable. En effet si ω augmente, le couple diminue : le cadre revient à sa vitesse initiale ω_2 .

Puissance et rendement :

Les moteurs électriques étant des convertisseurs d'énergie, nous pouvons dire que la puissance électrique P_e qui leur est fournie est intégralement transformée en puissance mécanique $P_{méca}$ et en puissance dégagée par effet Joule P_j .

On a ainsi : $P_e = P_{méca} + P_j$

Or $P_{méca} = \Gamma_r \omega$ et $P_j = \frac{1}{2} R I_M^2 = \frac{1}{2} \frac{R(NB_0S)^2 (\omega_0 - \omega)^2}{R^2 + L^2 (\omega_0 - \omega)^2}$

On a alors

$$P_e = \Gamma_r \omega + \frac{1}{2} \frac{R(NB_0S)^2 (\omega_0 - \omega)^2}{R^2 + L^2 (\omega_0 - \omega)^2}$$

Or, lorsque le moteur est en fonctionnement, on a :

$$\Gamma_r = \langle \Gamma_L \rangle = \frac{(NSB_0)^2 R (\omega_0 - \omega)}{2(R^2 + (L(\omega_0 - \omega))^2)}$$

D'où

$$P_e = \frac{(NSB_0)^2 R(\omega_0 - \omega)}{2(R^2 + (L(\omega_0 - \omega))^2)} \omega + \frac{1}{2} \frac{R(NB_0S)^2 (\omega_0 - \omega)^2}{R^2 + L^2(\omega_0 - \omega)^2}$$

$$P_e = \frac{(NSB_0)^2 R(\omega_0 - \omega)}{2(R^2 + (L(\omega_0 - \omega))^2)} \omega_0$$

$$P_e = \Gamma_r \omega_0$$

La puissance électrique nécessaire au fonctionnement du moteur est donc proportionnelle au couple résistant.

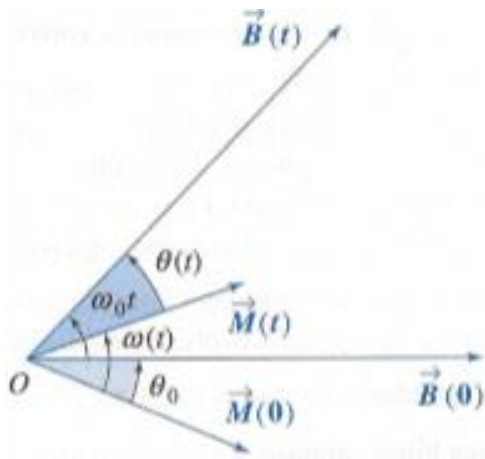
Rendement :

Par définition on a $\eta = \frac{P_{méca}}{P_e} = \frac{\Gamma_r \omega}{\Gamma_r \omega_0} = \frac{\omega}{\omega_0}$

Les moteurs asynchrones ont un rendement d'au moins 95%, ainsi, leur vitesse de rotation ne s'éloigne pas de la vitesse du champ tournant ω_0

3. Moteurs synchrones

Principe de fonctionnement d'un moteur synchrone:



Considérons un aimant de moment magnétique \vec{M} de norme $\|\vec{M}\| = M_0$ tournant à la vitesse ω et un champ magnétique $\vec{B}(t)$, ce dernier étant uniforme de norme B_0 et tournant à la vitesse de rotation ω_0 constante. Notons $\theta(t)$ l'angle entre $\vec{M}(t)$ et $\vec{B}(t)$.

Comme on peut voir sur ce schéma, on peut montrer que $\theta(t) = (\omega_0 - \omega)t + \theta_0$, θ_0 étant l'angle que forment à $t = 0$ $\vec{M}(t = 0)$ et $\vec{B}(t = 0)$

Ainsi, l'interaction de ces deux champs magnétiques crée un couple $\vec{\Gamma}$ d'axe \vec{e}_z .

On a :

$$\vec{\Gamma} = \vec{M}(t) \wedge \vec{B}(t)$$

$$\Rightarrow \vec{\Gamma} = M_0 B_0 \sin(\theta(t))$$

$$\Rightarrow \vec{\Gamma} = M_0 B_0 \sin((\omega_0 - \omega)t + \theta_0)$$

On observe que si $\omega_0 \neq \omega$ alors la valeur moyenne du couple Γ est nulle. Cependant, si $\omega_0 = \omega$, on observe que le moteur peut fournir un couple qui est fonction de θ_0 .

On remarque que :

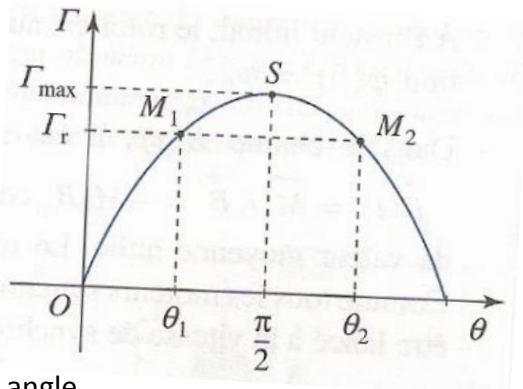
si $\theta_0 \in [0; \pi]$ le couple est moteur

si $\theta_0 \in [\pi; 2\pi]$ le couple est résistant

Ceci est une caractéristique ce type de moteurs électriques. En effet, les moteurs synchrones ne produisent un couple que si le décalage angulaire entre le champ tournant et l'aimant est nul. On dit que les moteurs synchrones tournent à la vitesse de synchronisme.

De plus, nous remarquons que le couple maximal que ce moteur peut fournir est $\vec{\Gamma}_{Max} = M_0 B_0$.

Caractéristiques de son fonctionnement en charge :



Supposons qu'un moteur synchrone est soumis à un couple extérieur résistant $-\Gamma_r$, avec $\Gamma_r \geq 0$. Nous remarquons qu'il existe deux points de fonctionnement M_1 et M_2 correspondant aux décalages angulaires θ_1 et θ_2 .

angle

Cependant, si $\vec{M}(t)$ et $\vec{B}(t)$ forment l'angle θ_1 , on dit que le régime est stable. En effet, si cet angle diminue (ce qui se traduit physiquement par une accélération du rotor), le couple Γ va diminuer : le rotor va donc revenir à sa position initial et former l'angle θ_1 . De même, si l'angle augmente, nous pourrions observer une augmentation du couple et donc un retour à l'angle stable θ_1 .

L'angle θ_2 est quant à lui instable. Si le rotor accélère, l'angle entre $\vec{M}(t)$ et $\vec{B}(t)$ va diminuer, mais le couple du moteur augmente : l'angle $\theta(t)$ va donc diminuer jusqu'à atteindre la valeur θ_1 .

Bilan de puissance :

La puissance électrique consommée par un moteur synchrone triphasé est de la forme :

$$P_e = 3UI \cos(\varphi)$$

Avec :

- U valeur efficace de la tension $U(t)$ aux bornes de chaque phase
- I valeur efficace du courant $I(t)$ qui parcourt chaque phase
- $\cos(\varphi)$ facteur de puissance, qui correspond au cosinus du déphasage entre la tension $U(t)$ et le courant $I(t)$.

D'autre part on sait que la puissance mécanique que le moteur fournit est $P_{méca} = \Gamma_r \omega_0$.

Les pertes par Effet Joule pouvant être négligées, on a finalement $P_e = P_{méca}$

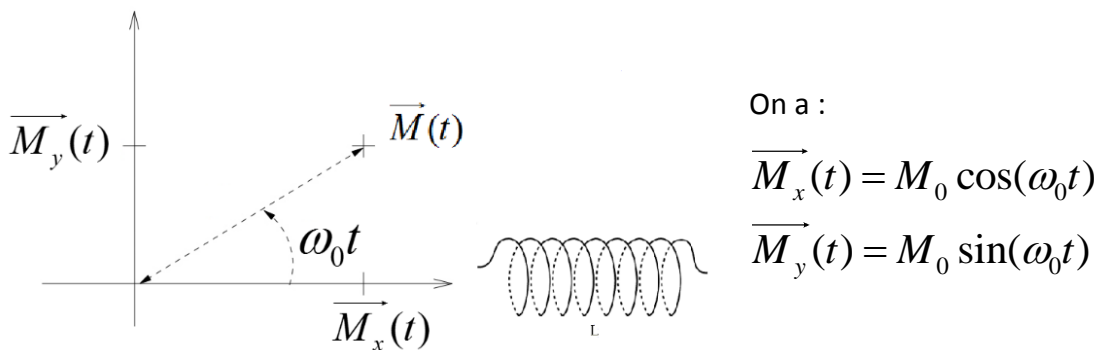
Ouverture sur les moteurs électriques

F.e.m Induite dans les bobinages statoriques :

Etant donné que le rotor possède un aimant, celui-ci crée un flux au sein des bobines du stator. En effet, d'après la loi de Faraday, on a :

$$e(t) = - \frac{d\Phi_{tot}(t)}{dt}$$

Considérons le montage suivant:



On en déduit que :

$$\Phi_{tot}(t) = N\Phi_{\text{spire}}(t) = N \iint_S \vec{B}(t) \cdot d\vec{S} = N \iint_S M_0 \cdot dS \cdot \cos(\omega_0 t) = N \iint_S M_0 \cdot dS \cdot \cos(\omega_0 t) = NM_0 S \cos(\omega_0 t)$$

Ainsi on a :

$$e(t) = -NM_0 S \omega_0 \sin(\omega_0 t)$$

C'est une propriété des moteurs synchrones : ceux-ci peuvent aussi fonctionner en tant qu'alternateurs.

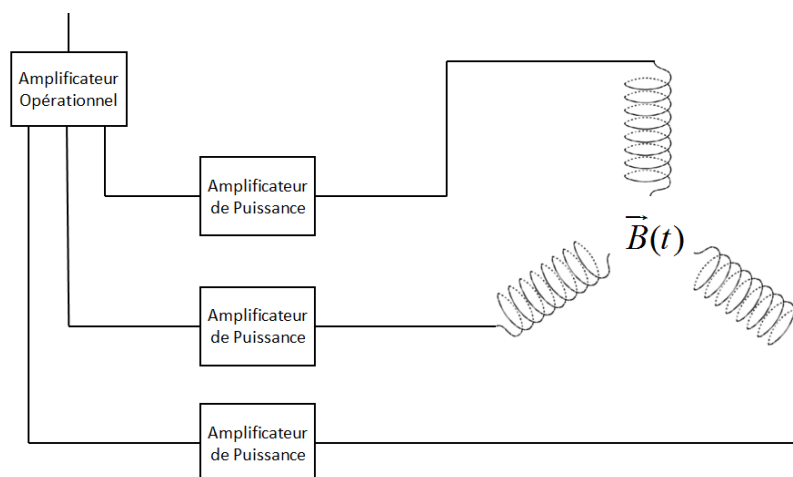
2. Mise en œuvre expérimentale, réalisation d'un modèle

Comme évoqué dans l'introduction de notre rapport, nous avons durant ces séances de P6 fabriqué un moteur à courant alternatif. Plus précisément, nous n'avons seulement construit que la partie électrique du montage car nous avons pu trouver des aimants déjà bobinés et un cadre pour fixer ces aimants ainsi que l'arbre tournant grâce à notre moteur. Ceci concerne la partie mécanique du moteur.

Notre montage électrique étant assez complexe, nous allons l'expliquer dans cette partie.

Nous avons trouvé sur internet un schéma nous permettant de le mettre en place. En effet, nous n'avons pas assez de notions en électricité pour le concevoir nous-même. Cependant nous l'avons analysé pour comprendre comment il fonctionne et pourquoi il a-t-il été conçu ainsi.

Voici un schéma général du montage pour bien le visualiser.



1. Générateur triphasé

1. Théorie sur les oscillateurs

Tout d'abord, notre montage étant un oscillateur à réseau déphaseur RC nous allons faire une partie théorique sur les oscillateurs.

Génération d'un signal quasi-sinusoïdal avec un oscillateur à boucle de réaction :

C'est un système qui génère un signal sinusoïdal sans signal d'entrée. Il est composé de 2 chaînes :

- la directe qui est constituée d'un amplificateur (A)
- la chaîne de retour qui est un filtre (B)

Cependant le montage n'oscille qu'à certaines conditions.

Si l'ensemble chaîne directe + chaîne de retour + comparateur a une fonction de transfert de la forme

$$\underline{H}(p) = \frac{A(p)}{1+A(p)B(p)} \quad \text{avec} \quad |\underline{H}(j2\pi f_0)| = 1 \quad \text{et} \quad \arg(\underline{H}(j2\pi f_0)) = 2\pi k \quad k \in \mathbb{R}$$

Alors l'oscillateur générera un signal de fréquence f_0 . De ce fait il pourra se maintenir dans le circuit.

Concernant la création à proprement parler du signal, il faut considérer qu'il se crée une micro surtension dans le circuit à un certain instant t . On y rajoute une petite perturbation. On obtient un système stable si le régime libre tend vers 0 ou instable qui peut ensuite évoluer soit vers un système stable dans son domaine non linéaire (saturation permanente sans oscillation) soit instable s'il évolue vers son domaine non linéaire et sans état stable. Ces notions se rapportent aux systèmes linéaires asservis que nous n'allons pas développer ici.

Sans rentrer dans le détail des calculs, le système va osciller si l'équation $A(0)B'(0) = 1$ admet au moins une racine à partie réelle positive et si le gain de boucle en régime permanent vérifie $A(0)B'(0) < 1$.

Cependant pour que le signal soit sinusoïdal, il y a certaines conditions.

Pour les comprendre nous allons se placer dans le cas où $A(p)=A_0 = \text{cste}$ et

$$B(p) = \frac{B_{max}}{1+Q\left(\frac{p}{\omega_0} + \frac{\omega_0}{p}\right)} \Rightarrow B'(p) = \frac{-B_{max}}{1+Q\left(\frac{p}{\omega_0} + \frac{\omega_0}{p}\right)} \quad \text{caractérise la chaîne retour qui est un filtre passe bande.}$$

On reprend la condition pour avoir un oscillateur ce qui revient à $A_0 \times \frac{-B_{max}}{1+Q\left(\frac{p}{\omega_0} + \frac{\omega_0}{p}\right)} = 1$ admet au moins une racine à partie réelle positive. Le résultat donne la condition suivante $A_0 \times B_{max} < (-1)$. (Voir annexe)

Maintenant pour avoir un signal sinusoïdal, il faut que l'équation

$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)}$ admette une solution d'une forme sinusoïdale lorsqu'on la perturbation $E(p)$ disparaît. (Voir annexe)

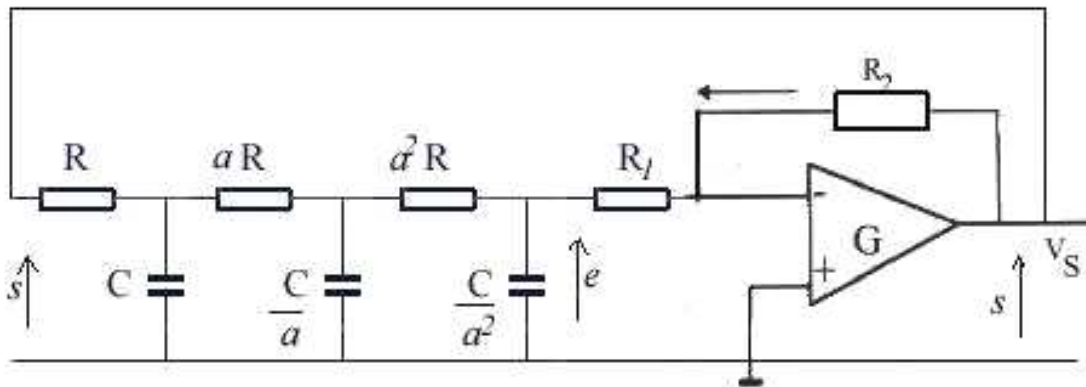
$$\text{C'est-à-dire} \quad E(p) = 0 \Rightarrow \frac{d^2s}{dt^2} + \omega_0 \frac{1+A_0B_{max}}{Q} \cdot \frac{ds}{dt} + \omega_0^2 \cdot s = 0.$$

Si les solutions de l'équation caractéristique sont proches de zéro amis du côté négatif pour maintenir l'instabilité, ce qui revient à $\frac{1+A_0B_{max}}{Q} \rightarrow 0^-$ alors les solutions de l'équation générale sont presque sinusoïdales.

On obtient ce résultat si $A_0 \times B_{max} \rightarrow (-1)^-$ et $Q \gg 1$.

Pour finir, il faut que la fréquence f_0 des oscillations soit celle de résonance du filtre.

Notre système étant un oscillateur à réseau déphaseur RC (système bouclé inverseur) légèrement modifié vu que l'on a rajouté un amplificateur opérationnel à chaque filtre afin d'avoir trois filtres indépendants, nous allons prendre cet exemple pour illustrer la théorie.



La fonction de transfert est un réel négatif $A = \frac{-R_1}{R_2}$ car la chaîne directe est montée en amplificateur inverseur.

Concernant celle de la chaîne de réaction qui est composée de 3 déphaseurs RC, on a

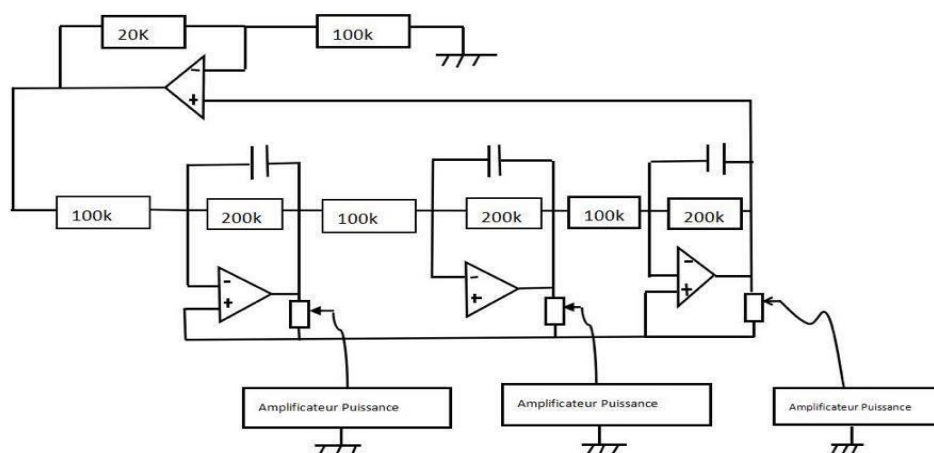
$$B(j\omega) = \frac{1}{\left(1 - \frac{5}{X^2}\right) + j\left(\frac{1}{X^3} - \frac{6}{X}\right)} \quad \text{avec } X = RC\omega.$$

On obtient donc les conditions suivantes afin que ce montage oscille : concernant la phase : $\arg([A(j\omega_0) \cdot B(j\omega_0)]) = \pi$ donc $B(j\omega_0)$ réel positif et dans ce cas $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{6}RC}$

et concernant le module : $\left| \frac{-R_2}{R_1} \cdot \frac{1}{1 - \frac{5}{X^2}} \right| \geq 1$ soit $\frac{R_2}{R_1} \geq 29$.

2. Explication du filtre

Notre circuit électrique est en fait un montage en cascade de 3 filtres passe bas. En voici un schéma.



$$\underline{H}(p) = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{-Z_2}{Z_1} = \frac{-R_2}{R_1} * \frac{1}{1 + CR_2p} = \frac{k}{1 + \tau p} \quad \text{avec } k = \frac{-R_2}{R_1} \text{ et } \tau = CR_2 \text{ et } p = j\omega$$

$$\text{Car } Z_1 = R_1 \text{ et } Z_2 = \frac{Z_C * Z_{R2}}{Z_C + Z_{R2}} = \frac{\frac{1}{jC\omega} * R_2}{\frac{1}{jC\omega} + R_2} = \frac{R_2}{1 + CR_2p} = \frac{R_2}{1 + \tau p}$$

Déphasage du filtre : $\arg(\underline{H}) = \varphi_s - \varphi_e = \pi - \arctan(\tau\omega)$

Or on veut que cet argument soit égal à $\frac{2\pi}{3}$ pour que les trois signaux aient le bon déphasage de 120°.

Par résolution on obtient

$$\tau\omega = \tan\left(\frac{\pi}{3}\right) \quad \text{et } \omega = 2\pi f \quad \text{donc } f = 12,5 \text{ Hz.}$$

Expérimentalement on obtient 13 Hz ce qui prouve que notre expérience est valable et cohérente.

Grâce à ces filtres passe bas on ne garde que la fréquence qui nous intéresse afin d'alimenter nos électroaimants et ainsi faire tourner notre moteur.

Au début de notre projet, nous avons placé un potentiomètre indépendant qui sert à démarrer le circuit, au début de ce montage. Une des applications du potentiomètre, que nous expliquerons ensuite, est la résistance variable qui permet, entre autres, de régler la fréquence d'un oscillateur. En effet, à partir d'une certaine fréquence, le courant va passer dans le circuit. Le potentiomètre d'entrée sert en quelque sorte d'interrupteur. Il a une double fonction, il nous permet de réguler la fréquence d'entrée pour alimenter correctement les électroaimants. Effectivement si la fréquence était trop élevée, nous n'aurions pas pu lancer notre boussole car le champ tournerait trop vite, elle n'arriverait pas à suivre ce champ.

Cependant nous l'avons remplacé tout simplement par une boucle permettant au montage de s'auto-entretenir et qui renvoie le signal de sortie en entrée. De ce fait on compense les pertes dues aux filtres. Le but est d'amplifier.

Pour modifier le gain nous avons mis des condensateurs adaptés pour diminuer la fréquence pour passer de 50Hz à 10Hz ce qui correspond plus à notre moteur.

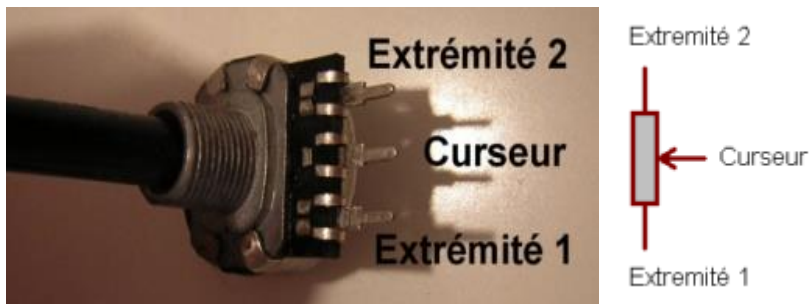
Pour ce qui concerne les résistances, des résistances de moins d'un kΩ nécessiteraient trop de courant et pourraient endommager l'amplificateur. Des résistances de plus d'un MΩ engendreraient trop de bruit thermique et des erreurs significatives dues aux courants de polarisation.

2. Mise en œuvre du générateur triphasé

1. Potentiomètres

Qu'est-ce qu'un potentiomètre ? Un potentiomètre, appelé aussi "résistance variable", et parfois rhéostat, peut être considéré comme une résistance dont on peut faire varier la valeur ohmique entre deux points, par simple action mécanique sur un axe rotatif ou rectiligne. Il est constitué d'une piste résistive sur laquelle entre en contact un curseur mobile, qui peut se promener d'une extrémité à l'autre de la piste. Ce système permet de

recueillir, entre la borne reliée au curseur et une des deux autres bornes, une tension qui dépend de la position du curseur et de la tension à laquelle est soumise la résistance. La photo ci-dessous montre un exemple de potentiomètre rotatif.



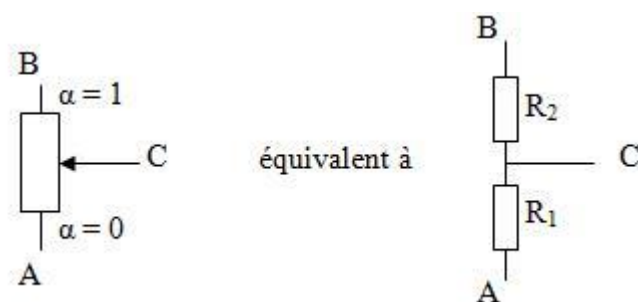
Les potentiomètres ont de nombreuses applications et on les retrouve dans de nombreux circuits ou appareils électroniques du fait qu'ils assurent l'interaction avec l'utilisateur ou des réglages précis par l'électronicien. Ils existent sous deux formes : analogique ou digitale. Toutefois, avec l'avènement de l'ère numérique, les potentiomètres analogiques sont sur le déclin et sont souvent remplacés par des contrôles numériques. Cependant ils restent souvent présents dans les appareils audio car ils servent, par exemple, au réglage du volume, de la fréquence sur les radios, les égaliseurs,...

Pour notre travail, nous les avons utilisés en tant que résistances variables, et donc pour contrôler l'amplitude de sortie de notre signal. Ce contrôle est impératif si l'on ne veut pas mettre en surtension les transformateurs de puissance qui constituent la suite du circuit.

Du point de vue formules, on considère le potentiomètre de valeur P comme 2 résistances dont le point commun est le curseur. Selon la position du curseur, ces résistances prennent des valeurs différentes.

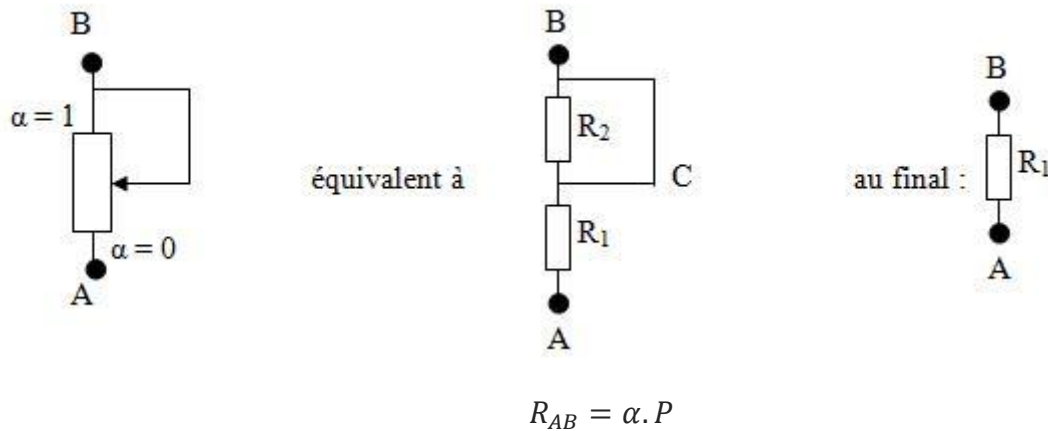
Cette position peut être paramétrisée ce qui donne l'équation suivante.

$$0\% < \alpha < 100\% \text{ égal à } 0 \text{ en } A \text{ et } 100 \text{ en } B$$



$$R_1 = \alpha \cdot P, R_2 = (1 - \alpha) \cdot P \text{ et donc } R_1 + R_2 = P$$

Lorsqu'on l'utilise en résistance variable, le modèle et l'équation se simplifient :



2. Amplificateur de puissance

Principe général de fonctionnement d'un amplificateur de puissance :

En entrée d'un amplificateur de puissance est envoyé un signal de faible amplitude et de faible puissance et a pour but d'amplifier ce signal de forte puissance et avec une impédance relativement faible. L'étage de sortie doit donc délivrer un signal à tension et intensité élevées. Un des objectifs est donc de sortir une impédance très faible grâce à une certaine disposition. Pour satisfaire ces conditions, on utilise généralement des montages du type collecteur commun (bipolaire) ou drain commun. Ce type de montage permet d'obtenir un gain unitaire en tension. Il ne modifiera donc que le courant qui sera plus élevé qu'en entrée sans changer la tension. Les trois amplificateurs de puissance sont alimentés en +15/-15V.

Calculs de puissance :

$$u_c(t) = U_{c_0} + \Delta u_c(t) \quad \text{et} \quad i_c(t) = I_{c_0} + \Delta i_c(t)$$

avec U_{c_0} et I_{c_0} la partie continue du signal et $\Delta u_c(t)$ et $\Delta i_c(t)$ les parties alternatives

Pour un régime sinusoïdal cela devient

$$u_c(t) = \hat{U}_C + \sin(\omega t) \quad \text{et} \quad i_c(t) = -\hat{I}_C + \sin(\omega t)$$

Puissance dissipée dans la charge :

$$p_L(t) = (V_{CC} - u_{CC}) \cdot i_c(t) = (V_{CC} - (U_{c_0} + \Delta u_c(t))) \cdot (I_{c_0} + \Delta i_c(t))$$

Comme somme de la puissance dissipée par polarisation et induite par le signal alternatif

$$P_{RL} = \frac{1}{T} \int_0^T p_L(t) \cdot dt = (V_{CC} - u_{CC}) \cdot I_{c_0} + \frac{\hat{U}_C \cdot \hat{I}_C}{2}$$

Le calcul de la puissance moyenne que l'on peut séparer en puissance due au courant de polarisation et celle due aux variations de tension et courant aux bornes de la charge

$$P_{RLDC} = (V_{CC} - u_{CC}) \cdot I_{C_0} \quad \text{et} \quad P_{RLAC} = \frac{\hat{U}_C \cdot \hat{I}_C}{2}$$

Puissance dissipée dans le transistor :

$$p_Q(t) = u_C(t) \cdot i_C(t)$$

$$P_Q = \frac{1}{T} \int_0^T p_L(t) \cdot dt = \frac{1}{T} \int_0^T (U_{C_0} + \Delta u_C(t)) \cdot (I_{C_0} + \Delta i_C(t)) = U_{C_0} \cdot I_{C_0} - \frac{\hat{U}_C \cdot \hat{I}_C}{2}$$

Puissance fournie par l'alimentation :

$$P_{TOT} = P_Q + P_{RL} = V_{CC} \cdot I_{C_0}$$

Rendement :

(On néglige P_{RLDC} pour une question d'ordre de grandeur.)

$$p = \frac{P_{RLAC}}{P_{TOT}} = \frac{\hat{U}_C \cdot \hat{I}_C}{V_{CC} \cdot I_{C_0}}$$

Ce rendement est maximum quand \hat{U}_C et \hat{I}_C sont maximums

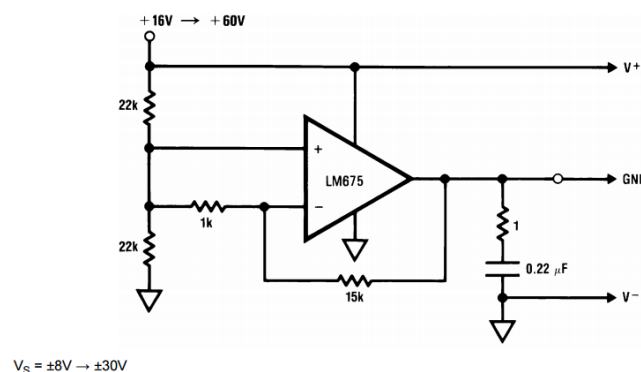
$$\hat{U}_C = \frac{V_{CC}}{2} \quad \text{et} \quad \hat{I}_C = I_{C_0} \quad \text{ce qui revient à} \quad U_{C_0} = \frac{V_{CC}}{2} \quad \text{et} \quad I_{C_0} = \frac{V_{CC}}{2 \cdot R_L}$$

$$P_{RLACmax} = \frac{\hat{U}_Cmax \cdot \hat{I}_Cmax}{2} = \frac{V_{CC} \cdot I_{C_0}}{4}$$

On obtient donc un rendement de 25%.

L'amplificateur de puissance que nous avons utilisé est un LM675 (voir annexe pour une photo) dont voici le schéma :

Puissance de sortie 20W.



3. Moteur

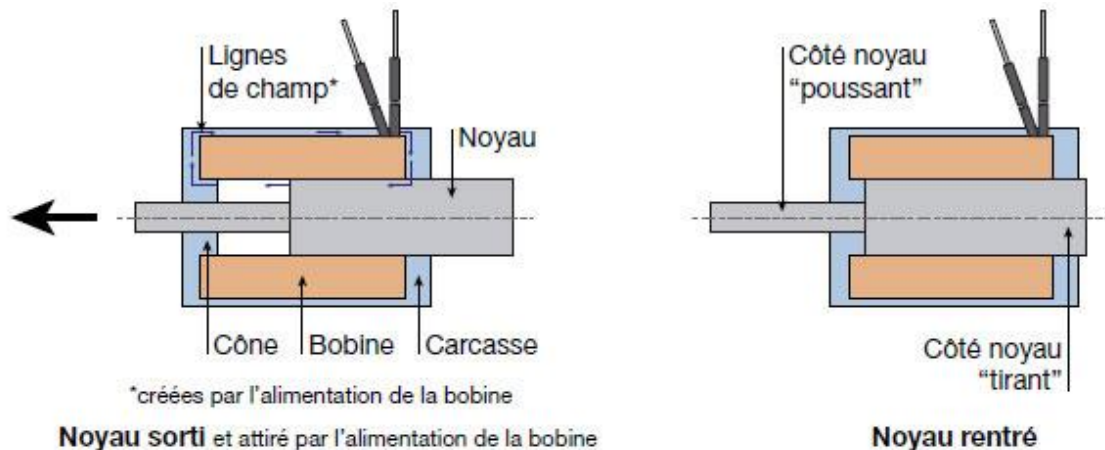
1. Electroaimants

Les électroaimants sont au nombre de 3 pour une question de praticité, ils sont en effet suffisant pour créer un champ magnétique tournant qui sera en mesure de faire tourner notre arbre ou boussole. Comme dit précédemment nous n'avons pas eu besoin de bobiner les électroaimants cependant nous avons dû les tester afin de vérifier leur bon fonctionnement ainsi que le courant qu'ils pouvaient supporter.

Qu'est-ce qu'un électroaimant et comment fonctionne-t-il ?

Le but des électroaimants est de produire des actions mécaniques en utilisant les propriétés du magnétisme.

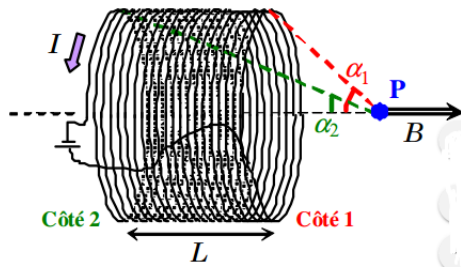
Il en existe 2 catégories : ceux à noyau plongeur que nous utilisons et ceux de maintien. Nous allons brièvement expliquer l'électroaimant à noyau plongeur. L'électroaimant en lui-même n'est pas magnétique. Il faut qu'un courant électrique passe dans sa bobine pour qu'elle génère un champ magnétique. Lorsque la bobine est mise sous tension, des lignes de champs magnétiques vont être générées et vont venir se refermer sur le noyau.



Le noyau, la partie mobile de l'électro-aimant, se déplace sur l'ensemble de sa course sous l'effet du champ magnétique. Ce déplacement exerce une force de poussée ou de traction est donc créée par le déplacement ce qui engendre une action mécanique.

Formule du champ magnétique créé par un solénoïde.

$$B = \frac{\mu_0 n I}{2} |\cos(\alpha_2) - \cos(\alpha_1)|$$



2. Boussole

Pour ce montage nous avons choisi de faire tourner une ou plusieurs boussoles dans ce champ. Le résultat était assez spectaculaire. Notre moteur étant asynchrone, il fallait donner une impulsion à la boussole pour qu'elle commence à tourner. C'est pourquoi, nous avons utilisé un aimant. Il suffisait juste de passer par-dessus la boussole pour la mettre en mouvement. Nous avons essayé d'en faire tourner plusieurs et le résultat a été concluant. Nous avons empilé 3 boussoles et elles ont toutes tourné. Ce qui a été assez remarquable est que la rotation des 2 boussoles les plus hautes est induite par la rotation de celle la plus basse qui a entraîné la seconde et ainsi de suite. Nous n'avons pas eu besoin de la « lancer » à l'aide d'un aimant. Nous avons pris une vidéo pour se rendre compte du phénomène que nous pourrions présenter durant la soutenance.

4. Conclusion et perspectives

Pour conclure sur ce projet, nous pensons qu'il nous a apporté plusieurs points positifs qui nous seront très utiles pour la suite de notre formation à l'INSA. Nous avons tout d'abord réalisé une étude théorique afin de se remémorer les notions vues durant notre premier cycle ingénieur. Et ensuite, nous avons vu le côté expérimental du sujet qui était de fabriquer nous-mêmes un moteur. De ce point de vue-là, nos objectifs étaient remplis. Nous sommes globalement très satisfaits de ce thème car il nous a permis de mieux comprendre un mécanisme physique qui doit faire partie du bagage culturel d'un ingénieur, tant ces moteurs sont omniprésents.

Que nous a apporté ce projet :

D'une part, nous avons pu voir le côté pratique de notre enseignement à l'INSA. En effet, celui a été très théorique lors de notre parcours en STPI. Ce projet nous a permis de mettre en œuvre et de comprendre les modèles qui nous ont été enseignés.

De plus, ce projet nous a initiés à la « recherche ». Effectivement, au début du projet nous partions d'une page blanche. Nous devons trouver comment mener à bien ce sujet afin d'être en accord avec nos objectifs. Nous avons pour cela nos connaissances, des recherches sur internet ou dans des livres de sciences et l'aide du professeur. Grâce à cela nous avons élaboré un plan, une démarche à suivre comme le feraient des ingénieurs afin de réussir notre projet. On peut apparenter cela à une initiation à notre futur métier.

Pour finir, un autre point très positif se rapprochant du dernier, est une meilleure vision d'un projet. Nous avons déjà tous fait plus ou moins de projets dans notre vie mais jamais de cette ampleur-là. Nous avons trouvé cela très formateur car ce sera normalement l'aspect principal de notre futur métier d'ingénieur et aussi pour la suite de notre cursus car nous réaliserons bien entendu de nombreux projets au cours de nos années de spécialité.

Perspectives

Si nous avions eu plus de temps, nous aurions sûrement aimé faire plus d'études, de mesures sur notre moteur. Nous entendons par –là, calculer des couples résistants afin de voir quel arbre pourrions-nous fixer sur notre moteur, quelle serait la vitesse en sortie, ...

Nous aurions aussi beaucoup aimé nous intéresser à la miniaturisation d'un tel montage. En effet, il est évident que dans la réalité, les circuits électriques ne sont pas de cette taille mais miniaturisés sur des cartes électroniques. L'INSA de Rouen ne faisant presque pas d'électrotechnique, il nous aurait plu de travailler sur cet aspect des moteurs réels.

Enfin, pourquoi ne pas construire une enveloppe, un bâti dans lequel placer notre système afin de le rendre plus réaliste. Pour rester dans la même optique, fabriquer un arbre de sortie réel afin de faire tourner des objets pour vérifier si notre moteur pouvait servir, aurait été fort intéressant. Cela rejoint la première perspective car il aurait fallu pour cela réaliser des calculs sur ces notions et donc faire une plus grosse étude de notre moteur.

5. Bibliographie

Démonstration du Théorème de Ferraris

-D'après *HPrépa Electrotechnique, 2^{ème} année PSI-PSI**, Hachette Supérieur,

-Biographie de Galiléo Ferraris

https://fr.wikipedia.org/wiki/Galileo_Ferraris

Moteurs asynchrones:

Première image

-D'après <http://www.sujetsetcorriges.fr/dl/BanquePT/Physique/sec-2006-phyA-PT.pdf>

Sujet de concours Partie A : Principe du moteur asynchrone

Deuxième image

<http://physiquepcsirabeuxmichel.hautetfort.com/media/02/02/2477455288.pdf>

Troisième image :

D'après *HPrépa Electrotechnique, 2^{ème} année PSI-PSI**, Hachette Supérieur

« Ressources pour comprendre la théorie »

https://fr.wikipedia.org/wiki/Machine_asynchrone

<http://www.energieplus-lesite.be/index.php?id=11529>

<http://philippe.berger2.free.fr/automatique/cours/moteurs/moteurs.htm>

Les moteurs synchrones :

Première et deuxième image

D'après *HPrépa Electrotechnique, 2^{ème} année PSI-PSI**, Hachette Supérieur

« Ressources pour comprendre la théorie »

<http://www.energieplus-lesite.be/index.php?id=11531#c6749>

https://fr.wikipedia.org/wiki/Machine_synchrone

<http://tpe-tlm-sfa-bam.e-monsite.com/pages/anexe-notion-de-cours/b-le-moteur-synchrone.html>

https://fr.wikiversity.org/wiki/Machine_tournante_%C3%A0_courant_alternatif/Machine_synchrone

<http://www.chimix.com/pha/p130.htm>

Concernant la partie expérimentale

Schéma de l'oscillateur

http://michel.hubin.pagesperso-orange.fr/physique/elec/chap_aop11.htm

Image et schéma du potentiomètre

http://www.sonelec-musique.com/electronique_theorie_potentiometre.html

Schémas équivalents aux potentiomètres

<https://fr.wikipedia.org/wiki/Potentiom%C3%A8tre>

Schéma du transformateur de puissance

<http://www.ti.com/lit/ds/symlink/lm675.pdf>

Schémas des électroaimants

<http://www.electro-aimant.fr/category/principes-de-fonctionnement/>

« Ressources pour comprendre la théorie »

<http://www.chireux.fr/mp/cours/electronique/Chap2.pdf>

<http://www.electro-aimant.fr/category/principes-de-fonctionnement/>

http://www.sonelec-musique.com/electronique_theorie_potentiometre.html

<http://psi.physique.massena.free.fr/pdf/divers/tp03complet.pdf>

6. Annexe

3.1.1 Structure des moteurs électriques

- Théorème de Ferraris :

Galileo Ferraris (1847-1897), fut un ingénieur italien. Ses travaux ont principalement porté sur les champs magnétiques tournants utilisés par les moteurs à courant alternatif. Le théorème de Ferraris, dont la démonstration se trouve ci-dessous, démontre qu'il est possible de créer un champ tournant avec des bobines.

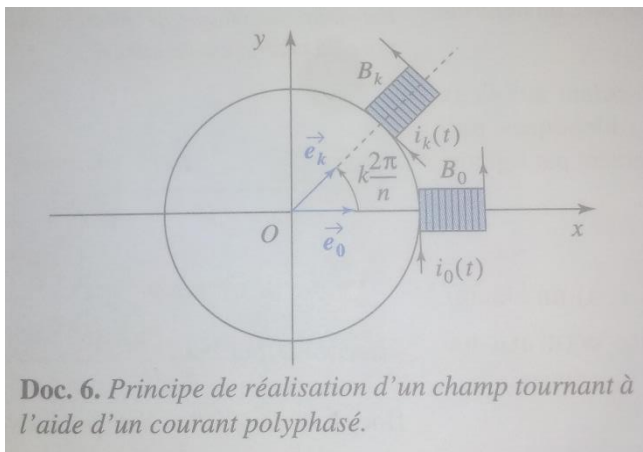
Considérons un système de n courants polyphasés équilibrés, déphasés les uns par rapport aux autres de $\frac{2\pi}{n}$. On a donc :

$$i_0(t) = i_m \cos(\omega_0 t)$$

$$i_k(t) = i_m \cos\left(\omega_0 t - k \frac{2\pi}{n}\right)$$

$$i_{n-1}(t) = i_m \cos\left(\omega_0 t - (n-1) \frac{2\pi}{n}\right)$$

De même, considérons n bobines identiques, fixes et disposées régulièrement autour du point O , origine de notre repère (cf. schéma) où nous allons obtenir le champ tournant.



La bobine B_k , parcourue par le courant $i_k(t)$, crée en O le champ magnétique :

$$\vec{B}_k(t) = B_m \cos\left(\omega_0 t - k \frac{2\pi}{n}\right) \vec{e}_k$$

Le système de courants polyphasés équilibrés $i_k(t)$ crée donc le champ :

$$\vec{B}(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \vec{B}_k(t)$$

L'axe (Ox) étant orienté par $\vec{e}_x = \vec{e}_0$, la composante B_x du champ résultant \vec{B} s'écrit :

$$B_x = \sum_{k=0}^{n-1} B_m \cos\left(\omega_0 t - k \frac{2\pi}{n}\right) \cos\left(k \frac{2\pi}{n}\right)$$

$$B_x = \frac{B_m}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \left[\cos(\omega_0 t) + \cos\left(\omega_0 t - k \frac{4\pi}{n}\right) \right]$$

On a finalement

$$B_x = \frac{n}{2} \cos(\omega_0 t)$$

Puisque :

$$S = \sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\omega_0 t - k \frac{4\pi}{n}\right) = 0$$

Cette dernière propriété se démontre immédiatement en notation complexe :

$$S = \sum_{k=0}^{n-1} e^{i\left(\omega_0 t - k \frac{4\pi}{n}\right)} = \left(\sum_{k=0}^{n-1} e^{-i k \frac{4\pi}{n}} \right) e^{i\omega_0 t} = \frac{1 - e^{-i4\pi}}{1 - e^{-i \frac{4\pi}{n}}} e^{i\omega_0 t} = 0$$

Un raisonnement identique démontrerait que la composante B_y du champ résultant \vec{B} est :

$$B_y = \frac{n}{2} \sin(\omega_0 t)$$

En définitive, le champ \vec{B} crée par le système de courants polyphasés équilibrés $i_k(t)$ est un champ d'amplitude $\frac{n}{2} B_m$ tournant à la vitesse angulaire ω_0 , c'est-à-dire faisant un tour par période de courants.

3.1.3 Moteurs asynchrones

- Résolution de l'équation différentielle 1

Nous cherchons ici à résoudre l'équation :

$$Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} = NB_0 S \omega_r \sin(\omega_r t)$$

$$\text{Soit le système d'équations } \begin{cases} (E_1) : Ly_1' + Ry_1 = NB_0 S \omega_r \sin(\omega_r t) \\ (E_2) : Ly_2' + Ry_2 = NB_0 S \omega_r \cos(\omega_r t) \end{cases}$$

Posons $y = y_2 + jy_1$ et résolvons l'équation différentielle $(E) = (E_2) + j(E_1)$

On a donc : $(E) : Ly' + Ry = NB_0 S \omega_r e^{j\omega_r t}$

Soit (E^*) l'équation homogène associée, la solution y^* de cette équation est

$$y^* = \lambda e^{-\frac{R}{L}t}$$

Appliquons la méthode de la variation de la constante afin de retrouver la solution générale de (E)

On pose :

$$y = \lambda(t)e^{-\frac{R}{L}t}$$

D'où :

$$y' = \lambda'(t)e^{-\frac{R}{L}t} - \frac{R}{L}\lambda(t)e^{-\frac{R}{L}t}$$

On injecte dans (E) et on a :

$$\begin{aligned} L\lambda'(t)e^{-\frac{R}{L}t} &= NB_0S\omega_r e^{j\omega_r t} \\ \Rightarrow \lambda'(t) &= \frac{NB_0S\omega_r}{L} e^{t(\frac{R}{L}+j\omega_r)} \\ \Rightarrow \lambda(t) &= \frac{NB_0S\omega_r}{R+j\omega_r L} e^{t(\frac{R}{L}+j\omega_r)} \end{aligned}$$

Donc la solution générale de l'équation (E) est :

$$y = \frac{NB_0S\omega_r}{R+j\omega_r L} e^{j\omega_r t}$$

Or

$$R+j\omega_r L = \sqrt{R^2+L^2\omega_r^2} (\cos(\Psi) + j\sin(\Psi)) = \sqrt{R^2+L^2\omega_r^2} e^{j\Psi} \quad (1)$$

Donc $y = NB_0S\omega_r e^{j(\omega_r t - \Psi)}$

La solution générale de (E₁) étant Im(y) on en déduit que le courant $i(t)$ est de la forme

$$i(t) = I_M \sin(\omega_r t - \Psi)$$

Avec $\Psi = \arctan(\frac{L\omega_r}{R})$ et $I_M = \frac{NB_0S\omega_r}{\sqrt{R^2+L^2\omega_r^2}}$

- Simplification du couple de Laplace :

Montrons que :

$$\langle \Gamma_L \rangle = \frac{I_M NSB_0 \cos(\Psi)}{2} = \frac{(NSB_0)^2 R\omega_r}{2(R^2 + (L\omega_r)^2)}$$

D'après l'équation (1) de l'annexe Résolution de l'équation différentielle 1, on a :

$$\begin{aligned} R+j\omega_r L &= \sqrt{R^2+L^2\omega_r^2} e^{j\Psi} \\ \Rightarrow e^{j\Psi} &= \frac{R+j\omega_r L}{\sqrt{R^2+L^2\omega_r^2}} \end{aligned}$$

On en déduit que $\cos(\Psi) = \frac{R}{\sqrt{R^2 + L^2 \omega_r^2}}$

D'où

$$\langle \Gamma_L \rangle = \frac{I_M NSB_0 \cos(\Psi)}{2} = \frac{I_M NSB_0 R}{2\sqrt{R^2 + L^2 \omega_r^2}}$$

De plus on sait que $I_M = \frac{NB_0 S \omega_r}{\sqrt{R^2 + L^2 \omega_r^2}}$

Finalement, on retrouve bien l'égalité :

$$\langle \Gamma_L \rangle = \frac{I_M NSB_0 \cos(\Psi)}{2} = \frac{(NSB_0)^2 R \omega_r}{2(R^2 + (L\omega_r)^2)}$$

En multipliant par $\frac{1}{\left(\frac{R\omega_r}{R\omega_r}\right)}$ on a :

$$\langle \Gamma_L \rangle = \frac{(NSB_0)^2}{2} * \frac{1}{\frac{R^2}{R\omega_r} + \frac{L^2 \omega_r^2}{R\omega_r}} = \frac{(NSB_0)^2}{2} * \frac{1}{\frac{R}{\omega_r} + \frac{L^2 \omega_r}{R}}$$

Puis en multipliant par $\frac{1}{\left(\frac{L}{L}\right)}$ on a finalement :

$$\langle \Gamma_L \rangle = \frac{(NSB_0)^2}{2L} * \frac{1}{\frac{R}{L\omega_r} + \frac{L\omega_r}{R}}$$

3.2.1 Théorie sur les oscillateurs

- L'équation $A_0 \times \frac{-B_{max}}{1+Q\left(\frac{p}{\omega_0} + \frac{\omega_0}{p}\right)} = 1$

$$(E) \Rightarrow -A_0 \times B_{max} = 1 + Q \left(\frac{p}{\omega_0} + \frac{\omega_0}{p} \right) \Rightarrow \left(\frac{p}{\omega_0} \right)^2 + \frac{1 + A_0 B_{max}}{Q} \left(\frac{p}{\omega_0} \right) + 1 = 0$$

Donc $\frac{1+A_0 B_{max}}{Q} < 0$ et donc $A_0 \times B_{max} < (-1)$.

- Les conditions pour faire disparaître E(p) :

$$\begin{aligned} E(p) = 0 &\Rightarrow \frac{S(p)}{E(p)} = 0 \Rightarrow \frac{S(p)}{\frac{A}{1 - A \cdot B'}} = 0 \\ &\Rightarrow (1 - A_0 B') \cdot S(p) = 0 \\ &\Rightarrow \left(1 + A_0 \cdot \frac{B_{max}}{1 + Q \left(\frac{p}{\omega_0} + \frac{\omega_0}{p} \right)} \right) \cdot S(p) = 0 \\ &\Rightarrow \left(\left(\frac{p}{\omega_0} \right)^2 + \frac{1 + A_0 B_{max}}{Q} \left(\frac{p}{\omega_0} \right) + 1 \right) \cdot S(p) = 0 \\ &\Rightarrow \frac{d^2 s}{dt^2} + \omega_0 \frac{1 + A_0 B_{max}}{Q} \cdot \frac{ds}{dt} + \omega_0^2 \cdot s = 0 \end{aligned}$$