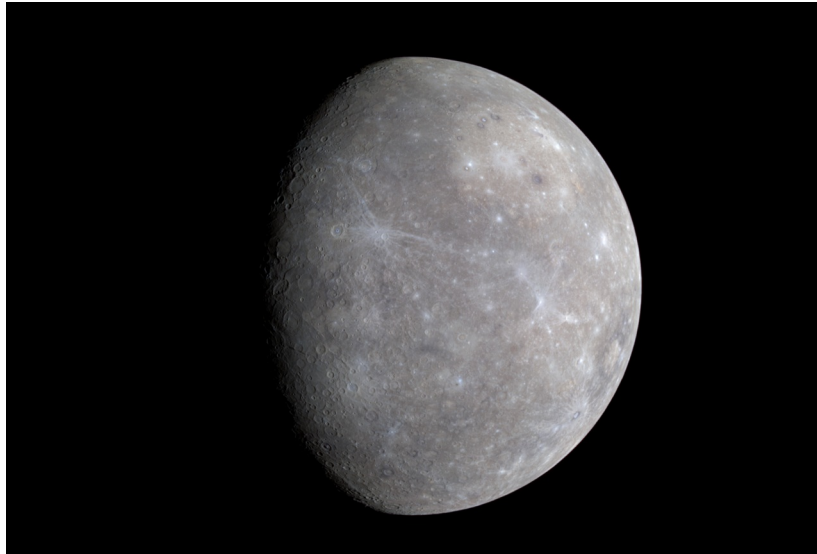


Projet de Physique P6
STPI/P6/2015-2016

Etude de la mission Bepicolombo



Etudiants :
BARBIER Thomas,
BOXI Wu,
FONTENELLE Célia,
LEDOS Nicolas,
ROBIN Anaïs,
VALERA Alexiane.

Enseignant-responsable du projet :
M. Didier Vuillamy

- Date de remise du rapport : Lundi 13 Juin 2016

- Référence du projet : Projet n°24

- Intitulé du projet : Etude de la mission Bepicolombo

- Type de projet : Théorique

- Objectif du projet : Analyser les détails de la mission Bepicolombo, ses objectifs scientifiques et étudier les différentes trajectoires possibles pour arriver en orbite autour de Mercure.

- Mots-clés du projet : Trajectoires, mécanique spatiale, Mercure, trajectoires directes, rebond gravitationels, analyse scientifique.

- Si existant, n° cahier de laboratoire associé :

Table des matières

1	Mercure et la mission Bepicolombo	7
1.1	Mercure, une planète encore mystérieuse	7
1.1.1	Découverte	7
1.1.2	Orbite	7
1.1.3	Formation	8
1.1.4	Composition	8
1.1.5	Champ magnétique et exosphère	10
1.2	Présentation de la mission Bepicolombo	10
1.2.1	Introduction	10
1.2.2	Mission d'approche : Flyby Trajectory	10
1.2.3	Aller sur Mercure : description des différentes phases de vol	11
1.2.4	Etude du moteur	11
1.2.5	Les contraintes liées à la mission	12
2	Etudes réalisées	13
2.1	Définition des vitesses	13
2.1.1	Vitesse absolue et vitesse relative	13
2.1.2	Vitesse de libération	14
2.1.3	Energies dans un champ d'attraction gravitationnel	14
2.2	Détermination de la trajectoire du module pour un vol direct vers Mercure	15
2.2.1	Positions de Mercure par rapport au soleil	15
2.2.2	La trajectoire de Hohmann	15
2.2.3	Calcul de la vitesse au départ de la Terre $C3$ et à l'arrivée sur Mercure V_p	16
2.2.3.1	Explication du programme Excel	17
2.2.3.2	Traduction du modèle sous forme de programme Excel	18
2.2.3.3	Calcul de ΔV total	20
2.2.4	Durée de la mission pour un trajet Terre-Mercure direct	21
2.2.5	Calcul de la durée de fonctionnement du moteur	21
2.2.6	Calcul de la consommation en carburant	22
2.2.7	Mercure, la Terre et le Soleil ne sont pas alignés	23
2.2.8	Document de Hiroshi Yamakama	23
2.3	Méthode Runge-Kutta :	23
2.3.1	Explication de la méthode de Runge-Kutta :	23
2.3.2	Applications	26

3	Conclusion et perspective	30
3.1	Conclusions sur le travail réalisé	30
3.2	Perspectives pour la poursuite de ce projet	30
3.3	Conclusions sur l'apport personnel de cet E.C. projet	31
4	Annexes	33
4.1	Documentation technique	33
4.2	Listings des programmes réalisés	33
4.3	Propositions de sujets de projets (en lien ou pas avec le projet réalisé)	33

Présentation du projet

Introduction

Lors du quatrième semestre de STPI à l'INSA, nous sommes amenés à réaliser un projet de physique par groupe de six étudiants. Ce projet, dont l'objectif pédagogique est d'initier les élèves à la conduite de projet en groupe, permet aux étudiants d'utiliser les connaissances acquises jusqu'alors, en se penchant sur un problème physique concret. Parmi les sujets proposés, notre choix s'est porté sur l'intitulé suivant "*Étude de la Mission Bepicolombo*". Le programme d'exploration de Mercure par l'Agence Spatiale Européenne a, en effet, suscité notre curiosité.

Ce projet s'est étendu sur 13 semaines, semaines durant lesquelles nous nous sommes réunis chaque vendredi de 8h00 à 9h30, encadrés par M. Didier Vuillamy. Nous avons réalisé une première approche du sujet en réalisant des calculs de trajectoires Terre-Mercure. C'est alors que nous nous sommes aperçus de la complexité d'une telle mission.

Notre projet nous a ainsi amenés à poursuivre les objectifs suivants : Etudier et comprendre les caractéristiques de Mercure et de son exploration, et, ensuite, expliquer, en détail, les calculs réalisés sur les différents paramètres à prendre en compte (trajectoires, vitesse, temps de voyage...). Enfin, nous tirerons une conclusion de ces résultats et les remettrons dans le contexte de cette mission spatiale.

Méthodologie et organisation du travail

	Résumé	Travail Réalisé	Commentaires
Du 05/02/16 au 04/03/16	Présentation du projet et des objectifs à réaliser par M. Vuillamy : recherches sur Mercure et sur le déroulement de la mission, étude de trajectoires Terre-Mercure.	Début de recherches sur Mercure et sur la mission afin de se renseigner sur les détails de la mission avant d'étudier la trajectoire.	Des difficultés à trouver des informations détaillées sur la mission, donc M. Vuillamy nous a envoyé des documents complémentaires .
Du 11/03/16 au 22/04/16	M. Vuillamy nous a expliqué le principe d'un moteur ionique (utilisé dans cette mission) et nous a conseillé de commencer par la trajectoire directe, plus simple à simuler qu'une trajectoire à rebonds gravitationnels.	Recherches sur le principe du rebond gravitationnel et sur le moteur ionique, étude sur la trajectoire directe idéale pour consommer le moins de carburant possible, début de recherches sur une trajectoire passant par Vénus.	Des difficultés à trouver des informations détaillées sur la mission, donc M. Vuillamy nous a envoyé des documents complémentaires .
Du 29/04/16 au 27/05/16	M. Vuillamy nous a expliqué la méthode de Runge Kutta afin d'améliorer l'étude de notre trajectoire et il nous a envoyé un programme Excel permettant d'appliquer cette méthode sur les orbites.	Explication de la méthode de Runge Kutta dans le rapport, utilisation du programme Excel sur la trajectoire directe déjà étudiée, calculs plus approfondis sur la trajectoire passant par Vénus.	De nombreuses simulations d'essais ont été nécessaires pour que cela corresponde à nos calculs de trajectoire directe. Le programme Excel est pensé pour les trajectoires directes Terre-Mercure, donc pour une trajectoire Terre-Vénus il faut changer des paramètres.
Du 03/06/16 au 10/06/16	Corrections du rapport.	Finalisation du rapport et utilisation de Lyx pour mettre en page les formules, préparation de la soutenance.	Il était compliqué d'éviter les répétitions dans le rapport lors du regroupement des parties de chacun.

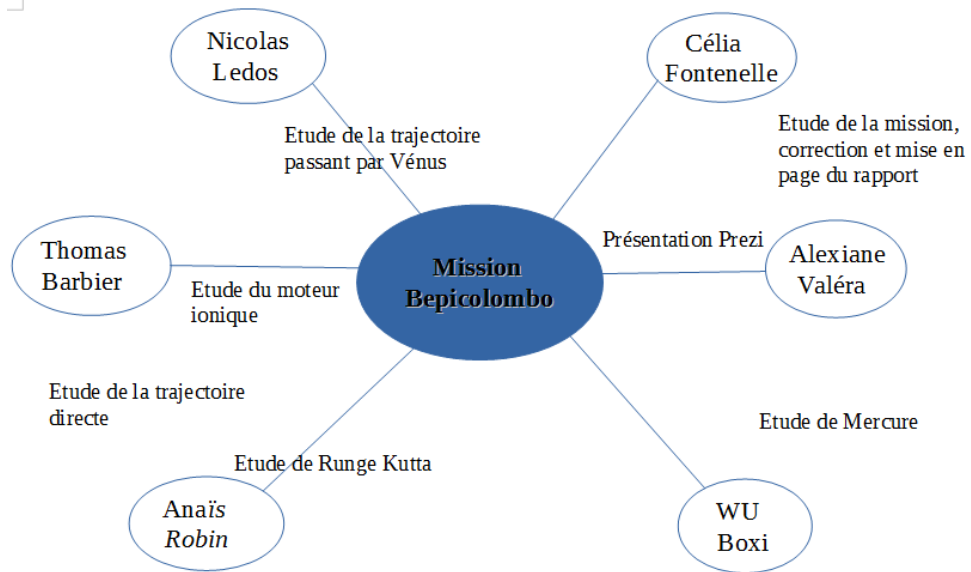


FIGURE 1 – Répartition globale du travail au sein du groupe

Chapitre 1

Mercure et la mission Bepicolombo

1.1 Mercure, une planète encore mystérieuse

Mercure est l'une des cinq planètes du système solaire. Elle est proche du Soleil et est visible à l'œil nu. Toutefois, de par sa position relativement basse par rapport à l'horizon, elle demeure la plus discrète.

1.1.1 Découverte

C'est vers le III^{ème} millénaire avant notre ère que Mercure fut découverte par des astronomes. Deux mille ans plus tard, à l'aube, elle sera surnommée « *Apollon* » par les Grecs (qui voyaient en elle l'illustration de la légende selon laquelle le dieu tirerait derrière lui son char, le Soleil, pour le lever dans le ciel). Au crépuscule, elle prendra le nom d'*Hermès*. Mais ce que le peuple grec ignorait, c'est que ces deux appellations s'adressaient à un seul et même astre. En effet, Mercure devient visible pendant près de deux mois sous la forme d'une étoile du matin, apparaissant juste avant l'aube. Puis elle réapparaît quelques semaines après avoir disparu du champ de vision humain, sous la forme d'une étoile du soir. Cependant, bien que visible, Mercure reste la plus mystérieuse des planètes telluriques. Son orbite particulière et sa petite dimension rendent son observation difficile. Malgré deux grandes missions déjà réalisées par Mariner 10 (dans les années 1970) et Messenger (dans les années 2000), qui ont permis d'apporter de nombreuses observations sur sa surface, certaines caractéristiques de Mercure demeurent encore inconnues.

1.1.2 Orbite

Mercure est la planète la plus proche du Soleil. Sa distance moyenne à celui-ci n'est que de 57,9 millions de kilomètres (soit environ 0,39 UA), contre 149,6 millions de kilomètres pour la Terre.

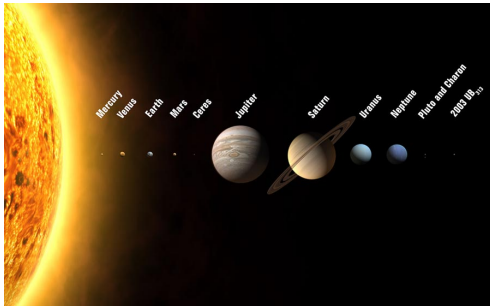


FIGURE 1.1 – Notre système solaire

trois orbites complètes, la même face de la planète est visible pendant la même phase. Pour comprendre cette résonance inhabituelle, de nombreux scientifiques pensent que, à l'origine, Mercure tournait bien plus vite mais que la gravitation du Soleil aurait entraîné le ralentissement conséquent de sa rotation. Il en résulte que le jour solaire de Mercure (c'est-à-dire d'un lever de Soleil à l'autre) est égale à deux années mercuriennes, soient 176 jours terrestres.

Pendant longtemps, Mercure était considérée comme une planète à rotation synchrone, ce qui lui faisait montrer perpétuellement la même face au Soleil. Mais cette hypothèse s'est révélée fautive car, en réalité, la planète possède, certes, une résonance inhabituelle, mais celle-ci est stable. En effet, Mercure tourne trois fois autour d'elle-même pendant qu'elle parcourt deux orbites autour du Soleil. Il s'agit d'un type de résonance spin-orbite qui n'a été découvert nulle part ailleurs dans notre système solaire. Cette résonance explique l'hypothèse erronée : après

1.1.3 Formation

Trois théories existent concernant la formation de Mercure. La première est le modèle de l'accrétion sélective. Le drainage par le gaz de la nébuleuse aurait favorisé l'accrétion de particules denses, d'où la forte concentration en fer concentrée dans les régions les plus internes, proches du Soleil. La seconde serait due aux radiations intenses du jeune Soleil, vaporisant la plupart des silicates de la proto-Mercure et laissant, de ce fait, un cœur métallique à la planète. La troisième théorie suggère qu'un impact géant se serait produit entre la jeune Mercure et un grand planétésimal.

Ceci aurait eu pour effet d'abraser la plus grande partie de la croûte primordiale et du manteau supérieur. La planète serait devenue bien plus petite et réduite principalement à son noyau de fer. Si on compare l'histoire de Mercure à celle de la Lune, nous remarquons que les deux sont similaires. Après une première période d'accrétion de planétésimaux, une fine croûte s'est formée sur la planète en fusion.

Après la disparition de cette croûte initiale, selon les théories précédentes, une croûte plus épaisse s'est constituée à mesure que la planète refroidissait. Les éléments à faible densité (tel que l'aluminium) ont migré vers l'extérieur alors que les éléments lourds (comme le fer) ont coulé vers le centre et ont, ainsi, formé un noyau massif. L'intense bombardement qui a suivi a, par la suite, créé des cratères. Certaines de ces formations ont été recouvertes par des éruptions de magma. Par ailleurs, le refroidissement progressif a causé un léger rétrécissement de la planète et la formation d'escarpements lobés, ainsi que celle de dorsales ridées.

1.1.4 Composition

Mercure est une petite planète ayant un diamètre de 4878 km. Elle est éclipsée par Ganymède et Titan, lunes respectives de Jupiter et Saturne.

Le fait que Mercure ne possède pas de lune a longtemps rendu difficile la détermination de la masse et de la densité de cette planète. Cependant, dans les années 1970, Mariner 10 a confirmé son diamètre et a décelé une densité anormalement élevée pour sa taille. La seule explication est que

la planète contient une grande quantité d'éléments métalliques denses. Effectivement, le fer compte probablement pour plus de 60% dans la masse de Mercure. Le reste est constitué de silicate, matériaux rocheux riches. En considérant que la plupart du fer est concentré dans le noyau, celui-ci doit représenter 75% du diamètre de Mercure et 42% de son volume.

De par sa proximité au Soleil et son absence d'atmosphère (qui permet le transfert de chaleur), Mercure est soumise aux conditions climatiques les plus extrêmes du système solaire (variation de température jour-nuit atteignant 610°C). Avant la mission Messenger, peu d'informations sur les propriétés de la surface de la planète étaient connues. Les principales étaient des indications fournies par des radars basés sur Terre, selon lesquelles la surface de Mercure était constituée de cratères ressemblant étroitement à ceux présents sur la Lune.

De plus, des images effectuées par Mariner 10 montrent des coulées de laves et des dépôts volcaniques pyroclastiques, indiquant donc que sa surface est complexe et dotée d'une composition hétérogène. De grandes sources de magma ont donc autrefois existé sur le manteau supérieur de Mercure, créant, notamment, le Bassin Caloris. Ce dernier est intégralement submergé par des plaines lisses dont l'aspect est comparable aux coulées de laves de basalte lunaires.

L'imagerie multispectrale de Messenger montre trois sortes de couleurs principales : les plaines douces dont la réflectivité est relativement élevée, des terrains cratérisés à réflectivité moyenne et des matériaux à faible réflectivité, source d'interrogations. Les terrains cratérisés résultent de collisions avec des comètes et des météoroïdes durant plusieurs milliards d'années. Celles-ci sont très fréquentes dans tout le système solaire.

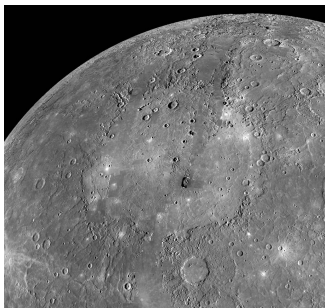


FIGURE 1.3 – Photo de Mercure par la sonde Mariner 10

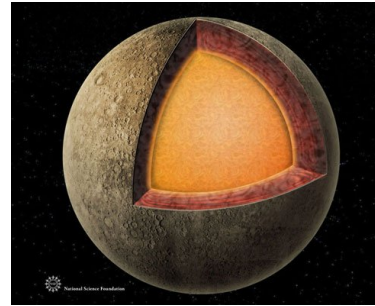


FIGURE 1.2 – Composition de Mercure

Par ailleurs, ces cratères sont très nombreux sur Mercure car, en effet, la planète ne possède ni plaque tectonique ni atmosphère pour effacer les traces du passé. N'oublions pas non plus qu'elle a été soumise à un martèlement plus sévère que sur Terre ou que sur Mars du fait de la forte gravitation du Soleil, accélérant les projectiles.

Pour ce qui est des plaines, on en dénombre de deux types, les plaines intercratères, qui sont couvertes de nombreux petits cratères secondaires formés par les éjectas de grands impacts, et les plaines douces, principalement d'origine volcanique. L'absence relative de cratères sur ces dernières indique qu'elles font partie des plus jeunes formations de Mercure. Elles recouvrent 40% de sa surface.

1.1.5 Champ magnétique et exosphère

Bien que l'on ne pensait pas qu'une petite planète comme Mercure puisse posséder un champ magnétique, Mariner 10 en a pourtant détecté un, bien que très faible. Pour expliquer la longue fusion du noyau (plus de 4 milliards d'années), des théories affirment qu'il est généré par une dynamo interne, et donc qu'une partie de son noyau est en fusion. Pour que celui-ci soit resté en fusion, l'hypothèse la plus probable est la présence d'éléments capables d'abaisser le point de fusion du fer, à l'instar du silicium et du soufre. Par ailleurs, de par l'équateur magnétique décalé vers le nord, le mécanisme de dynamo du noyau externe possède une forte asymétrie nord-sud.

De même, on ne pensait pas que la faible gravité de Mercure puisse retenir une atmosphère. Pourtant Mariner 10 a enregistré une atmosphère très ténue, appelée exosphère. Parmi les gaz détectés, on compte l'hélium, le sodium, l'oxygène, le potassium et le calcium. Cette découverte montre que malgré les hautes températures qui entraînent une chute du nombre d'atomes dans l'exosphère, un apport par les vents solaires compensent cette perte.

La corrélation entre une faible inclinaison axiale de la planète et son relief polaire irrégulier constituent des conditions propices pour que les fonds de certains cratères restent perpétuellement dans l'ombre. Quant à la question de présence d'eau, bien que la surface de Mercure soit extrêmement sèche, il aurait pu y en avoir, notamment grâce à des impacts occasionnels de comètes ou d'astéroïdes.

Nous constatons, de ce fait, qu'il reste encore de nombreuses interrogations à propos de Mercure, interrogations que la Mission Bepicolombo s'est fixé pour but de lever.

1.2 Présentation de la mission Bepicolombo

1.2.1 Introduction

L'objectif de l'opération Bepicolombo est d'étudier Mercure. Ce projet ambitieux a pour maître d'ouvrage l'ESA, en étroite collaboration avec le Japon. La JAXA (Japan Aerospace Exploration Agency) est alors responsable de l'orbiteur MMO (Mercury Magnetospheric Orbiter), tandis que l'ESA (European Space Agency) est en charge du MPO, (Mercury Polar Orbiter) ainsi que du lancement et de l'acheminement des instruments vers Mercure. De nombreux laboratoires extérieurs participent également aux financements et à la réalisation de ce projet. Parmi eux se trouve le CNES (Centre National d'Etudes Spatiales). Le lancement est prévu en 2018 par l'intermédiaire d'un lanceur Ariane 5. La mise en orbite autour de Mercure devrait avoir lieu en janvier 2024 et la mission devrait se terminer entre 2025 et 2026.

1.2.2 Mission d'approche : Flyby Trajectory

L'assistance gravitationnelle est l'utilisation de l'attraction d'un corps céleste (Terre, Vénus, Mercure) pour modifier le vecteur vitesse de la trajectoire d'un engin spatial (sonde spatiale, satellite artificiel...). L'objectif est d'utiliser ce phénomène dans une perspective d'économie de carburant par le moteur-fusée du véhicule, tout en garantissant un même résultat. Les sondes spatiales à destination des corps célestes éloignés de la Terre utilisent l'assistance gravitationnelle.

1.2.3 Aller sur Mercure : description des différentes phases de vol

Avant toute chose, le satellite sera lancé en 2018 par le lanceur Européen Ariane 5 en Guyane Française, la base spatiale Européenne. Une fois mis en orbite autour de la Terre, des tests seront effectués durant trois mois afin de s'assurer du bon fonctionnement du vaisseau.

Après cela, les moteurs du vaisseau Bepicolombo seront allumés afin de quitter l'orbite terrestre dans l'optique de commencer la phase interplanétaire. La croisière est longue (6 ans) car elle s'effectuera à l'aide de l'assistance gravitationnelle autour de la Terre, de Vénus et de Mercure. Une fois mis en orbite autour de Mercure, le MMO sera libéré afin d'étudier le champ magnétique, la magnétosphère ainsi que l'environnement de Mercure et l'exosphère.

Puis le MOSIF (MMO Sunshield and Interface Structure) sera libéré afin d'agir comme bouclier solaire du MMO et comme structure d'interface entre le MMO et le MPO. Ensuite, le MPO sera mis en orbite basse autour de Mercure afin d'étudier la surface et l'intérieur de la planète. Enfin, le MTM, (Mercury Transfert Module) utilisé pour la propulsion durant la croisière, sera largué. C'est cette phase qui nous intéressera le plus dans ce rapport, et nous détaillerons par la suite différentes méthodes permettant d'arriver en orbite stable autour de Mercure.

Une fois en place autour de la planète, les satellites commenceront leurs opérations scientifiques pour lesquelles il ont été conçus. Il a été prévu d'effectuer une année d'opérations nominales en plus d'une extension d'une autre année. Malheureusement, les conditions extrêmes de Mercure finiront par avoir raison des satellites, limitant ainsi les possibilités d'exploration.

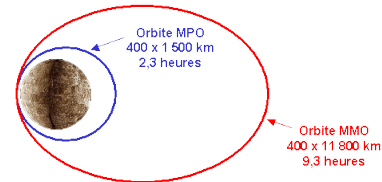


FIGURE 1.4 – Les orbites finales des satellites

1.2.4 Etude du moteur

Afin d'optimiser au mieux la taille et le poids de la sonde Bepicolombo, il a été décidé d'utiliser un moteur ionique. La particularité de celui-ci est qu'il possède un très bon rendement allié à un poids bien plus faible que les moteurs fusées classiques. En effet, l'impulsion spécifique I_{sp} de ces moteurs est d'environ 2000 secondes, ce qui est bien supérieur aux traditionnels moteur-fusées dont l' I_{sp} tourne autour des 300 secondes. Cependant, et en dépit de cela, sa poussée demeure faible ($\approx 0.1N$), de telle sorte que le moteur-fusée nécessite d'être allumé pendant des temps très longs, le rendant inefficace face à certaines manœuvres orbitales.

Comme dit plus haut, le moteur utilisé sera de type ionique. Celui-ci fonctionne en projetant des ions et en convertissant la force d'accélération de ces derniers en une force de poussée du vaisseau spatial. Il utilise de grandes quantités d'énergies nécessaires à la ionisation du gaz et à son éjection. Afin de palier à cette demande, le vaisseau utilisera des panneaux solaires.

N'oublions pas que Bepicolombo n'est pas la première mission à utiliser un moteur ionique. De nombreux tests terrestres puis en orbites géostationnaires ont déjà été effectués, et la sonde spatiale Smart-1, aussi lancée par l'ESA, en a utilisé un avec succès dans le cadre de sa mission orbitale autour de la Lune. Il en existe de nombreuses gammes, certains utilisant la force électrostatique et d'autres la force électromagnétique. Et même parmi ces deux versions, il en existe de nombreuses variantes, différents de par leur mode opératoire.

Par ailleurs, pour ce qui est des caractéristiques précises du vaisseau, celui-ci est construit autour de deux moteurs jumeaux T6, provenant de la société QinetiQ. La poussée nécessaire à l'accomplissement de la mission est de 145mN, et celle générée par les T6 est comprise dans un

intervalle de 75mN (moteur seul) à 290mN (les deux moteurs associés). Cette combinaison convient donc parfaitement et répond aux exigences de la mission. Enfin, concernant le carburant utilisé, il s'agira d'un gaz noble, le xénon. En effet, en comparaison avec des carburants à base de mercure ou de sodium, le xénon s'est avéré être le plus adapté pour une utilisation respectueuse du moteur, ces deux premiers ayant tendance à le détériorer.

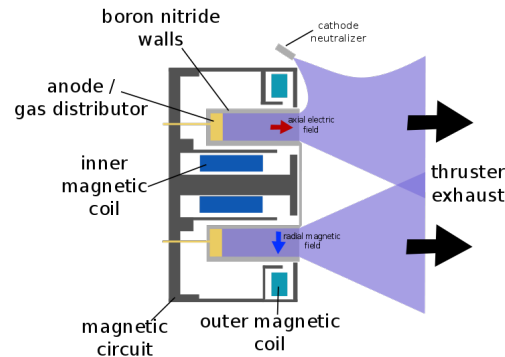


FIGURE 1.5 – Schéma d'un moteur ionique double

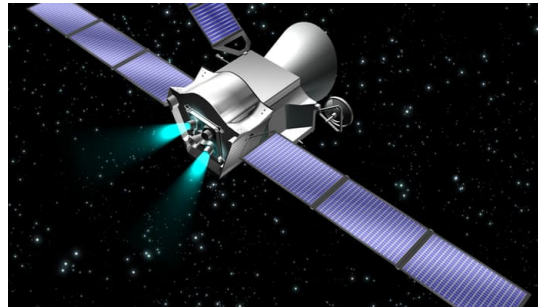


FIGURE 1.6 – Illustration d'artiste de la sonde Bepicolombo, propulsé par deux moteurs ioniques

1.2.5 Les contraintes liées à la mission

Une des principales particularités de cette mission est la difficulté liée aux importantes contraintes de chaleur et de rayonnement. En effet, Mercure étant très proche de notre étoile, elle reçoit un rayonnement particulièrement puissant, ce qui pose un réel problème pour un satellite classique. C'est pourquoi les ingénieurs de cette mission ont pris cette donnée en compte et ont opté pour des solutions technologiques en conséquence.

Une de ces solutions est la mise en place de surfaces réfléchissantes à certains endroits clés du vaisseau afin de refléter une bonne partie du rayonnement solaire incident. De plus, les panneaux solaires sont aussi équipés de réflecteurs optiques (OSR pour Optical Solar Reflector) afin de contrôler leur température et donc de garder un rendement optimal. Enfin, le satellite est équipé de nombreux radiateurs dans le but de dissiper un maximum de chaleur dans l'espace et le MMO est protégé par un bouclier solaire (Sun Shield) durant toute la phase de vol vers Mercure.

Chapitre 2

Etudes réalisées

Un transfert (parfois appelé orbite) de Hohmann consiste à passer d'une orbite circulaire à une autre orbite circulaire située dans le même plan, en utilisant uniquement deux manœuvres impulsives. En se limitant à deux manœuvres, cette trajectoire est celle consommant le moins de combustible.

2.1 Définition des vitesses

2.1.1 Vitesse absolue et vitesse relative

La vitesse relative exprime la différence des vitesses entre deux mobiles.

Pour calculer la vitesse relative du Module par rapport à Mercure, nous allons utiliser la relation vectorielle suivante :

$$V_{absolue} = V_{Mercure} + V_{relative} \implies V_{relative} = V_{absolue} - V_{Mercure}$$

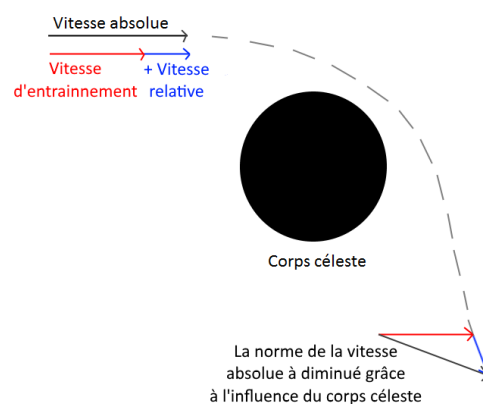


FIGURE 2.1 – schéma explicatif des relations vectorielles entre les vitesses lors d'un fly by autour d'un corps céleste

Pour que le Module puisse graviter autour de Mercure, il faut que sa Vrelative soit inférieure à la Vitesse de libération de Mercure, soit $4.3km.s^{-1}$. Sachant que la vitesse de Mercure vaut $47,9km.s^{-1}$ à son périhélie, on détermine la vitesse absolue. Cette dernière doit être inférieure à la somme entre la vitesse de libération et la vitesse de Mercure, soit $52,2km.s^{-1}$ ($4,3 + 47,9$).

2.1.2 Vitesse de libération

Afin de pouvoir se libérer de l'attraction terrestre, le module spatial a besoin de dépasser une vitesse minimale, appelée vitesse de libération, propre à chaque planète (elle dépend en effet de la gravité de celle-ci). La Terre a une vitesse de libération de $11,2km.s^{-1}$ et Mercure de $4.3km.s^{-1}$.

2.1.3 Energies dans un champ d'attraction gravitationnel

L'énergie mécanique E d'un satellite en orbite elliptique terrestre est :

$$E_{mécanique} = E_{cinétique} + E_{potentielle}$$

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{mMG}{r}$$

$$\text{et } E = -\frac{mMG}{2a}$$

Avec :

- m masse du satellite
- G constante de gravitation universelle
- M masse du centre d'attraction (la Terre dans notre cas)
- v vitesse du satellite sur l'orbite
- r distance satellite, centre de la Terre
- $2a$ longueur du grand axe de l'ellipse

Remarques : La simplification possible par m montre l'indépendance de ce paramètre relativement à la masse.

L'énergie E ne dépend que de la longueur $2a$ du grand axe de l'ellipse.

$E_c = \frac{1}{2}mv^2$ est l'énergie cinétique du satellite, sa vitesse étant la vitesse relative.

$E_p = -\frac{mMG}{r}$ est l'énergie potentielle du satellite. La relation permet ainsi d'exprimer la valeur de la vitesse v du satellite à la distance r du centre de la Terre.

On obtient :

$$v^2 = \frac{2MG}{r} - \frac{MG}{a}$$

Avec :

$M = 5.974.10^{24}kg$ (masse de la Terre) et $G = 6.672.10^{-11}$ uSI

$$E_t = \frac{E}{m} = -\frac{MG}{2a} = \frac{1}{2}v^2 - \frac{MG}{r}$$

Sachant que

$$\mu = MG \implies E_t = -\frac{\mu}{2a} = \frac{1}{2}v^2 - \frac{\mu}{r}$$

Dans l'organisation de la mission, on débute par une mise en orbite de l'engin autour de la Terre, effectuée par le lanceur Ariane 5. C'est à partir de cette étape clé que nos calculs débutent. L'engin doit par la suite avoir une bonne trajectoire et consommera alors un peu de carburant. Par conséquent, sa mission débute avec comme première opération le suivi de la trajectoire adéquate, qui est celle de la trajectoire balistique à périégée proche de la trajectoire de Mercure.

2.2 Détermination de la trajectoire du module pour un vol direct vers Mercure

Nous débutons l'examen de la mission avec un départ depuis la Terre avec la vitesse $C3$, et le calcul du freinage par moteur ionique afin que l'engin se mette en orbite autour de Mercure.

2.2.1 Positions de Mercure par rapport au soleil

On va étudier le cas où la trajectoire de l'engin spatial croise l'orbite de MERCURE sur l'axe à son périhélie.

2.2.2 La trajectoire de Hohmann

Pour simplifier, nous supposons que les orbites de la Terre et de Mercure autour du Soleil sont contenues dans le même plan, le plan de l'écliptique. Le rayon de l'orbite est $152Mkm$ pour la Terre, et de $46Mkm$ pour Mercure. En effet, l'orbite de Mercure décrit une ellipse autour du soleil de périhélie $46Mkm$ et d'aphélie $69.8Mkm$. Walter Hohmann a effectué les premiers calculs détaillés de trajectoires reliant deux planètes : la trajectoire est une ellipse dont l'aphélie A (point le plus éloigné du Soleil) est sur l'orbite de la Terre et le périhélie P (point le plus proche du Soleil) sur celle de Mercure. L'orbite est donc tangente aux deux orbites des planètes. Bien évidemment, il existe une infinité de trajectoire pour aller sur Mercure, mais un transfert d'Hohmann correspond à la manière la plus économique en énergie pour se rendre d'une planète à une autre à l'aide d'une trajectoire directe.

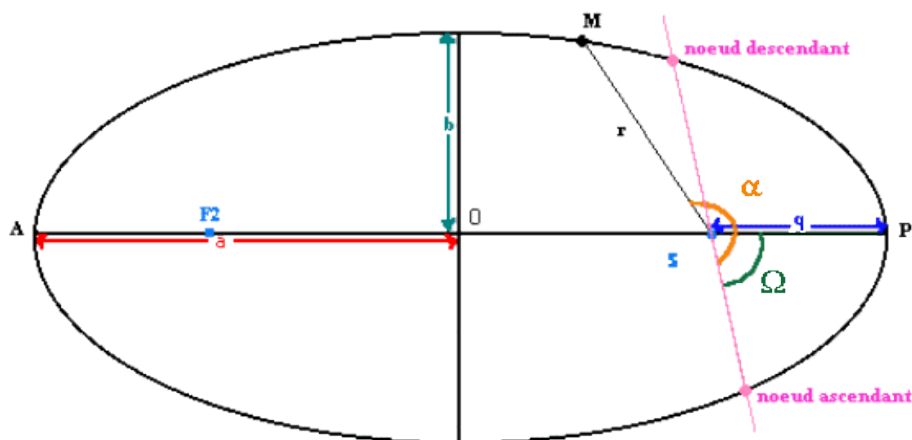


FIGURE 2.2 – Schéma d'une ellipse avec différents points clés d'une trajectoire de transfert

2.2.3 Calcul de la vitesse au départ de la Terre $C3$ et à l'arrivée sur Mercure V_p

Le départ est la Terre, l'arrivée Mercure. Les calculs ci-dessous concernent un engin spatial déjà placé sur l'orbite de la Terre. Ils ne tiennent pas compte du départ du sol de la Terre pour atteindre cette orbite (de l'ordre de $11km.s^{-1}$). De même, la mise en orbite autour de la cible n'est pas considérée. Calculons la vitesse à donner à l'engin pour que, au départ de l'orbite terrestre, il aille tangenter l'orbite de Mercure. L'orbite est donc l'orbite de Hohmann, où $r_a = 152.106 Mkm$, et $r_p = 46.106 Mkm$. Le demi grand axe de l'orbite est :

$$a = \frac{r_a + r_p}{2} = \frac{152 + 46}{2} = 99.106 Mkm$$

L'excentricité est :

$$e = \frac{r_a - r_p}{r_a + r_p} = \frac{152 - 46}{152 + 46} = \frac{92}{208} = 0,5354$$

Pour savoir s'il est possible de lancer un engin, il faut déterminer le coût en carburant, donc la vitesse à lui donner. Pour cela, nous allons calculer l'énergie totale par kg nécessaire pour atteindre Mercure :

$$E_t = -\frac{\mu_{soleil}}{2a} = \frac{1}{2}v^2 - \frac{\mu_{soleil}}{r}$$

Avec :

- M la masse du Soleil ($1,989.10^{30}kg$)
- G est $6,67.10^{-11} m^3.kg.s^{-2}$
- $\mu_{soleil} = MG = 1,989.10^{30} * 6,67.10^{-11} = 1.32703.10^{20}$
- $E_t = -\frac{\mu_{soleil}}{2a} = -\frac{1.32703.10^{20}}{2*99.10^6} = -6,70217.10^{11} J.kg^{-1}$

Calculons la vitesse à l'aphélie $C3$ à partir de E_t :

$$\frac{1}{2}C3^2 - \frac{\mu_{soleil}}{r_a} = -\frac{\mu_{soleil}}{2a}$$

$$C3^2 = \frac{\mu_{soleil}}{a} * \frac{2a}{r_a - 1}$$

$$C3^2 = \frac{\mu_{soleil}}{a} * \frac{r_a + r_p - r_a}{r_a}$$

$$C3^2 = \frac{\mu_{soleil}}{a} * \frac{r_p}{r_a}$$

$$C3 = \sqrt{\frac{1,32703.10^{20}}{9.9.10^{10}} * \frac{4,6.10^{10}}{1,52.10^{11}}} = 20141m.s^{-1}, \text{ soit } 20.14km.s^{-1}$$

A l'arrivée au périhélie P , l'engin possède la vitesse périhélique V_p , soit :

$$\frac{1}{2}V_p^2 - \frac{\mu_{soleil}}{r_p} = -\frac{\mu_{soleil}}{2a}$$

De la même façon

$$V_p = \sqrt{\frac{1,32703 \cdot 10^{20}}{9.9 \cdot 10^{10}} * \frac{4,6 \cdot 10^{10}}{1,52 \cdot 10^{11}}} = 66550 m \cdot s^{-1}, \text{ soit } 66.55 km \cdot s^{-1}$$

Nous avons simulé sur le programme « Orbite_perso2_STPI_2015_2016.xls » développé sur le tableur excel que nous a fourni M. Vuillamy, les trajectoires de la terre, de Mercure et de l'engin spatial en fonction de $C3$ (la vitesse de départ de l'engin spatial) calculé précédemment, et nous avons vérifié que l'on obtiendrait bien le croisement des trajectoires de l'engin spatial et de Mercure sur le plan optimal aphélie-périhélie.

2.2.3.1 Explication du programme Excel

Tout d'abord, une petite explication du programme. Dans le fichier Excel, la feuille « Calcul » permet à partir :

- Des constantes G , M et μ
- De la distance entre la planète et le soleil
- De la vitesse orbitale

constante de gravitation universelle	$G (m^3)(s^{-2})(Kg^{-1})$	6,6720E-11
masse du soleil	kg	1,99E+30
constante gravifique du soleil	$\mu =$	1,3271E+20
teta point courant	degré	0
Vitesse	V m/s	22300
Rayon, distance / soleil	Km	1,50E+08
Gama, angle du vecteur vitesse sur l'ortho rayon vecteur	en degré	0

Calculer tous les paramètres nécessaires au calcul de la trajectoire :

Gama, angle du vecteur vitesse sur l'ortho rayon vecteur	en rad	0
vitesse radiale		0
vitesse ortho radiale		22300
Constante des aires	$m^2/m/s$	3,345E+15
p		84314335862
energie totale	J/kg	-636062200
a, 1/2 grand axe	km	104318477
excentricité		0,437904428
sans valeur, Za	Km	
sans valeur, Zp	km	
teta	degré	
teta -teta 0	rad	3,141592654
teta -teta 0	degré	180,0018709
teta0 1	degré	-180,0018709
teta0 2	degré	180,0018709
etude de la solution 1		
teta relatif ou nu	degre	180,0018709
r		1,5E+11
tgt gama		9,5446E-17
gama en deg		5,46871E-15
etude de la solution 2		
teta relatif ou nu	degré	-180,0018709
r		1,5E+11
tgt gama		-9,5446E-17
gama en deg		-5,46871E-15

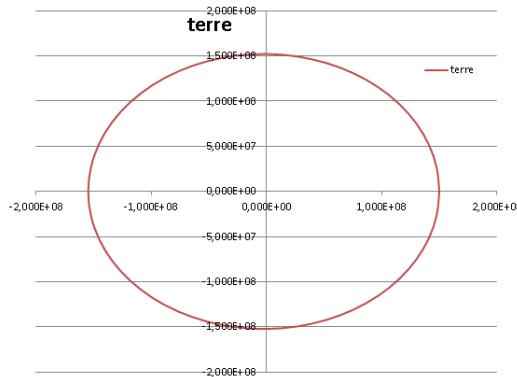
On reporte les résultats calculés dans cette feuille « calcul » sur la feuille « Verif » et le programme calcule la trajectoire à partir d'un nuage de points (x , y) :

V	22300	teta_pt_M	0	teta deg	(teta-teta_perigé)deg	Nu deg	Nurad	rayon (m)	x (Km)	y (Km)
Rayon	1,5E+11	0,00	-180,00	-180,00	-3,14	1,500E+11	1,500E+08	0,000E+00		
Gama_deg	0	10,00	-170,00	-170,00	-2,97	1,482E+11	1,486E+08	2,574E+07		
V_radial	0	20,00	-160,00	-160,00	-2,79	1,433E+11	1,346E+08	4,900E+07		
V_ortho	22300	30,00	-150,00	-150,00	-2,62	1,358E+11	1,175E+08	6,79E+07		
Const_aire	3,345E+15	40,00	-140,00	-140,00	-2,44	1,263E+11	9,718E+07	8,155E+07		
para_con	84314335862	50,00	-130,00	-130,00	-2,27	1,173E+11	7,542E+07	8,988E+07		
E_total	-636062200	60,00	-120,00	-120,00	-2,09	1,080E+11	5,288E+07	9,349E+07		
Axe_A	104318477	70,00	-110,00	-110,00	-1,92	9,917E+10	3,332E+07	9,316E+07		
Excent	0,437904428	80,00	-100,00	-100,00	-1,75	9,125E+10	1,589E+07	8,987E+07		
R_apogé (km)	1,521E+08	90,00	-90,00	-90,00	-1,57	8,431E+10	1,277E+07	8,431E+07		
R_perigé (km)	4,600E+07	100,00	-80,00	-80,00	-1,40	7,836E+10	-1,36E+07	7,717E+07		
teta_perigé_deg	180,0018709	110,00	-70,00	-70,00	-1,22	7,333E+10	-2,508E+07	6,89E+07		
teta deg	teta rad	120,00	-60,00	-60,00	-1,05	6,917E+10	-3,458E+07	5,990E+07		
gama_1_deg	0	130,00	-50,00	-50,00	-0,87	6,579E+10	-4,222E+07	5,040E+07		
teta_pt_M	0	140,00	-40,00	-40,00	-0,70	6,314E+10	-4,838E+07	4,058E+07		
		150,00	-30,00	-30,00	-0,52	6,118E+10	-5,294E+07	3,057E+07		
		160,00	-20,00	-20,00	-0,35	5,973E+10	-5,613E+07	2,043E+07		
		170,00	-10,00	-10,00	-0,17	5,891E+10	-5,801E+07	-1,023E+07		
		180,00	0,00	0,00	0,00	5,864E+10	-5,864E+07	-1,95E+03		
		190,00	10,00	10,00	0,17	5,891E+10	-5,801E+07	-1,023E+07		
		200,00	20,00	20,00	0,35	5,973E+10	-5,613E+07	-2,043E+07		
		210,00	30,00	30,00	0,52	6,118E+10	-5,294E+07	-3,057E+07		
		220,00	40,00	40,00	0,70	6,314E+10	-4,837E+07	-4,058E+07		
		230,00	50,00	50,00	0,87	6,579E+10	-4,222E+07	-5,040E+07		
		240,00	60,00	60,00	1,05	6,917E+10	-3,458E+07	-5,990E+07		
		250,00	70,00	70,00	1,22	7,333E+10	-2,508E+07	-6,89E+07		
		260,00	80,00	80,00	1,40	7,836E+10	-1,36E+07	-7,717E+07		
		270,00	90,00	90,00	1,57	8,431E+10	-4,130E+07	-8,431E+07		
		280,00	100,00	100,00	1,75	9,125E+10	-1,584E+07	-8,987E+07		
		290,00	110,00	110,00	1,92	9,916E+10	3,331E+07	-9,316E+07		
		300,00	120,00	120,00	2,09	1,079E+11	5,397E+07	-9,349E+07		
		310,00	130,00	130,00	2,27	1,173E+11	7,542E+07	-8,988E+07		
		320,00	140,00	140,00	2,44	1,263E+11	9,718E+07	-8,155E+07		
		330,00	150,00	150,00	2,62	1,358E+11	1,175E+08	-6,79E+07		
		340,00	160,00	160,00	2,79	1,433E+11	1,346E+08	-4,90E+07		
		350,00	170,00	170,00	2,97	1,482E+11	1,486E+08	-2,574E+07		
		360,00	180,00	180,00	3,14	1,500E+11	1,500E+08	-9,795E+03		

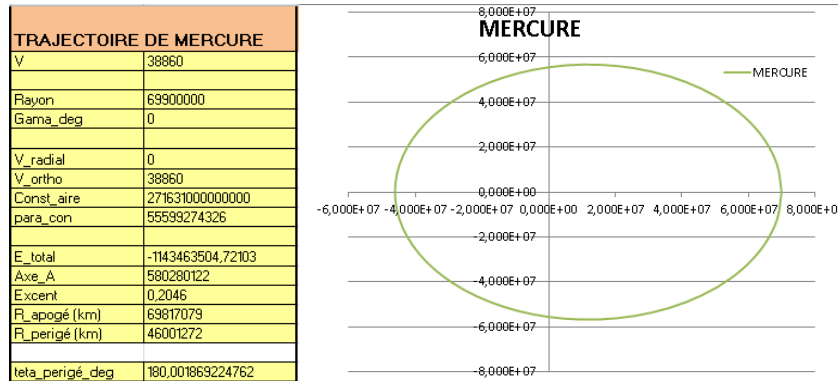
2.2.3.2 Traduction du modèle sous forme de programme Excel

Nous avons adapté le programme Excel à nos besoins pour tracer les trajectoires de la Terre, de Mercure et de l'engin spatial. La trajectoire de la Terre est définie en reportant les valeurs suivantes de la feuille « Calcul » à la feuille « Verif » :

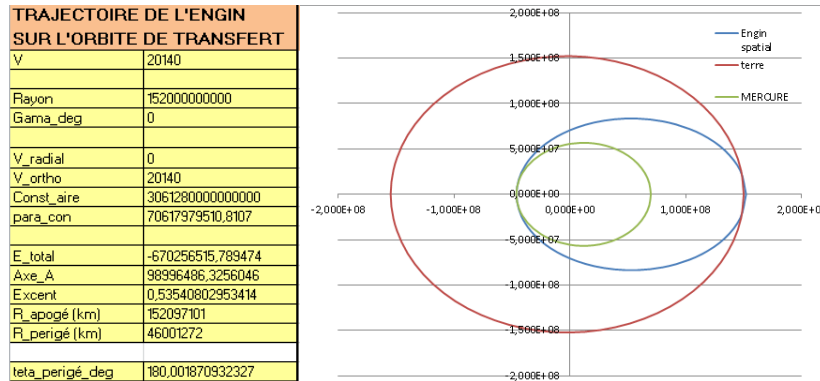
TRAJECTOIRE DE LA TERRE	
V	29000
Rayon	152000000000
Gama_deg	0
V_radial	0
V_ortho	29000
Const_aire	4495093800000000
para_con	152260305411,767
E_total	-435687905,093368
Axe_A	152294886
Excent	0,0150687027451212
R_apogé (km)	152097101
R_perigé (km)	147200000
teta_perigé_deg	0,0000370978084193442



En procédant de la même manière pour la trajectoire de Mercure, on obtient :

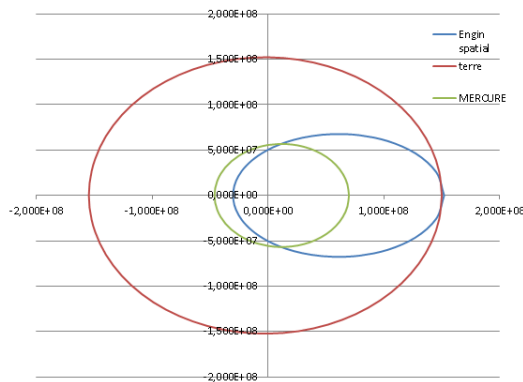


Puis on trace la trajectoire Terre-Mercure de l'engin en utilisant sa vitesse à l'aphélie, soit $C3=20140$ m/s calculée au paragraphe précédent. En traçant les 3 trajectoires on obtient :

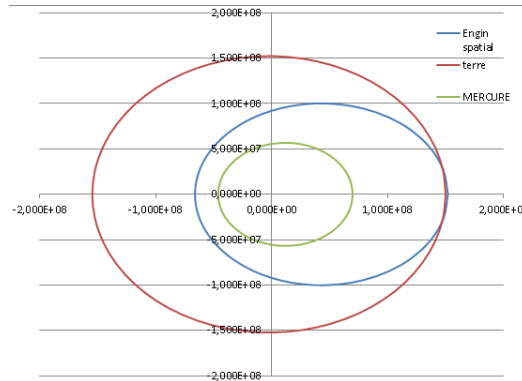


Et on voit qu'avec une vitesse $C3$ calculée de $20140m.s^{-1}$, la trajectoire de Mercure et celle de l'engin sont quasi tangentes au point P correspondant à la Périhélie de l'ellipse.

Avec une vitesse inférieure à $C3 = 20140m.s^{-1}$, les 2 trajectoires se croisent avant le point de Périhélie P (exemple avec $V = 17000m.s^{-1}$)



Et par contre, si la vitesse est supérieure à $C3 = 20140m.s^{-1}$, les 2 trajectoires ne se croisent jamais : (exemple avec $V = 23000m.s^{-1}$)



On voit donc qu'avec une vitesse $C3$ à l'aphélie de $20140m.s^{-1}$ on croise la trajectoire de Mercure, encore faut-il rester dans son orbite.

2.2.3.3 Calcul de ΔV total

Initialement l'engin tourne autour de la Terre. Si on considère qu'il est à une altitude de $150km$, sa vitesse est de $7,313km.s^{-1}$, à $300km$ elle est de $7.725km.s^{-1}$. Pour qu'il s'éloigne définitivement de la Terre il faut dans le 1er cas qu'il atteigne la vitesse de $11.05km.s^{-1}$, dans le second cas $10.925km.s^{-1}$. Donc dans le premier cas, le delta V pour quitter définitivement la terre est de $3236m.s^{-1}$, et de $3200m.s^{-1}$ dans le second cas.

Mais dans tous les cas, ces accroissements de vitesse lui permettent d'avoir une vitesse relative à la Terre nulle à l'infini ; c'est à dire une vitesse absolue de $29.8km.s^{-1}$, car la Terre se déplace à cette vitesse autour du soleil. Cette vitesse ne correspond pas à $C3 : 20.14km.s^{-1}$, et il faudra donc réduire cette vitesse de $29.8km.s^{-1}$ à $20.14km.s^{-1}$ c'est à dire consommer pour ce delta V1 de $9.66km.s^{-1}$. Pour réaliser ce ralentissement de la vitesse absolue il faut que l'engin parte dans le sens opposé du mouvement de la Terre.

L'engin spatial est animé de la vitesse orbitale de la Terre, soit $29.8km.s^{-1}$, puisqu'elle est sur son orbite. Il faut donc la freiner de $\Delta V_1 = 29.8 - 20.14 = 9.66km.s^{-1}$ pour l'expédier en direction de Mercure. En pratique cette vitesse $C3$ de $20.14km.s^{-1}$ est celle que l'engin doit avoir en dehors du champ d'attraction terrestre. Il ne peut pas « freiner » lorsqu'il est dans le champ terrestre sinon il va retomber sur la Terre. Disons donc que cette vitesse est celle qu'il doit avoir lorsqu'il se sera éloigné de la Terre, et que l'effet de l'attraction terrestre sera négligeable. En fait pour mieux comprendre, il faut imaginer que l'engin doit atteindre un point de l'orbite de transfert à une certaine distance de la Terre, et avoir en ce point la bonne vitesse qui le maintient sur cette trajectoire.

L'engin arrive au périhélie à proximité de Mercure à une vitesse V_p de $66.55km.s^{-1}$, alors que la vitesse orbitale de Mercure n'est que de $47.9km.s^{-1}$. La vitesse de libération de Mercure étant de $4.3km.s^{-1}$, l'engin doit freiner pour graviter autour de Mercure car sa vitesse est supérieure à $47.9 + 4.3km.s^{-1}$, sinon l'engin va repartir dans l'espace et vagabonder dans le système solaire. Le freinage ΔV_2 est de l'ordre de $66.55 - 47.9 = 18.65km.s^{-1}$.

En totalisant les trois manœuvres, on arrive à un $\Delta V_{total} = \Delta V + \Delta V_1 + \Delta V_2$

$$\Delta V_{total} = 3,2 + 9,66 + 18,65 = 31,51 km.s^{-1}$$

Le DeltaV total de ces 3 manœuvres est extrêmement élevé. Ceci explique pourquoi il est indispensable de prévoir une autre trajectoire. D'ailleurs, c'est ce qui a été réalisé par la mission MARINER 10 et la mission Bepicolombo en utilisant l'attraction gravitationnelle de Vénus. En contre partie, ceci augmente la durée de la mission.

2.2.4 Durée de la mission pour un trajet Terre-Mercure direct

Ce point est important pour vérifier que la mission est réaliste. D'après la 3ème loi de Kepler, la période T peut être calculée par la formule : $T = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{\mu_{soleil}}} = 1,82.10^7 s = 5060h$ soit 211 jours ou 7 mois

La période de révolution de l'engin spatial a une durée de 211 jours qui est intermédiaire entre les 365 jours de la Terre et les 88 jours de Mercure. La durée du trajet aller de la mission est la moitié, soit 106 jours... 3 mois et demi. On peut donc aller rapidement sur Mercure, cette durée est inférieure à la durée des missions précédemment effectuées vers Mercure (de l'ordre de 4 ans) comme on a pu le voir sur les documents de Hiroshi Yamakama.

2.2.5 Calcul de la durée de fonctionnement du moteur

A partir de l'impulsion spécifique I_{sp} qui mesure la force exercée par l'engin en fonction de la quantité de carburant consommé par unité de temps, nous pouvons calculer le débit massique et en déduire la durée de fonctionnement.

Dans le domaine de l'aéronautique, l'impulsion spécifique I_{sp} est le quotient de deux grandeurs, dont l'une est la poussée d'un propulseur, et l'autre le produit du débit massique d'ergol par la valeur normale de l'accélération de la pesanteur. Elle indique la durée pendant laquelle un kilogramme d'ergol produit une poussée équivalente à une force d'environ 9,81 N dans le champ gravitationnel terrestre :

$$I_{sp} = \frac{F}{qg_0}$$

avec la poussée (en N), le débit massique d'éjection des gaz (en $kg.s^{-1}$) et l'accélération de la pesanteur (en $m.s^{-2}$ ou $N.kg^{-1}$). En fixant une poussée F à 5N (même s'il n'existe pour l'instant aucun moteur ionique de cette puissance, le maximum prévu pour les années à venir étant de 1N), nous pouvons calculer le débit massique :

$$q = \frac{F}{g_0 I_{sp}} = \frac{5}{9,81 * 2000} = 0,2548.10^{-3} kg.s^{-1}$$

Le débit massique dépend de la masse et de la durée, en effet : Débit massique $q = \frac{m_{ergol}}{durée}$
La durée de fonctionnement du moteur est donc égale à :

$$durée = \frac{m_{ergol}}{q} = \frac{2688}{0,0002548} = 10549450s, \text{ soit } 2930h \text{ ou } 122j$$

Ce temps de fonctionnement indique qu'il faudrait démarrer l'allumage du moteur dès le départ, puis que le temps de voyage est estimé à 106 jours. Cela rend bien évidemment une trajectoire directe quasiment impossible à l'aide d'un moteur ionique de cette puissance).

2.2.6 Calcul de la consommation en carburant

L'une des principales contraintes d'une mission vers Mercure réside dans la variation de masse de l'engin spatial envoyé. En effet, partir de la Terre avec une vitesse élevée induit ensuite un freinage beaucoup plus important à l'approche de Mercure, ce qui entraînera une consommation d'ergol (carburant) plus importante.

Nous allons donc déterminer la masse de carburant nécessaire pour échapper à l'attraction terrestre et au freinage pour se satelliser sur l'orbite de la planète Mercure. Pour calculer cette quantité de carburant, nous allons nous servir de l'équation de Tsiolkovski qui relie la variation de la vitesse à celle de la masse :

$$\Delta V = g_0 I_{sp} \ln \left(\frac{m_i}{m_f} \right)$$

- Avec ΔV : la variation de vitesse
- g_0 : la constante de gravité terrestre ($9,81 m.s^{-2}$)
- I_{sp} : l'impulsion spécifique, caractérisant la performance d'un moteur ionique
- $\frac{m_i}{m_f}$: rapport masse initiale sur masse finale.

Lors de l'étude d'un voyage vers Mercure, on peut considérer que la variation de masse de l'engin spatial ne dépend que de la variation de la masse de carburant. La consommation de carburant se fait lors d'un voyage aller : pour quitter définitivement la terre (ΔV de $3.2 km.s^{-1}$ à $300 km$) lorsqu'il s'échappe de l'attraction de la Terre pour suivre la trajectoire inter-planétaire associée à la vitesse de $20140 m.s^{-1}$ (le ΔV_1 calculé est de $9.66 km.s^{-1}$) à l'arrivée, lorsqu'il décélère pour entrer dans une orbite basse mercurienne (le ΔV_2 calculé est de $18.65 km.s^{-1}$)

Lors de l'approche de l'engin spatial vers la planète Mercure, la modification de sa trajectoire peut aussi induire une diminution de la masse d'ergols mais celle-ci est très faible. Nous avons donc $\Delta V_{total} = 3200 + 9660 + 18650 = 31510 m.s^{-1}$

La mission Bepicolombo comprend un orbiteur MPO de $400 kg$ et un orbiteur magnétosphérique (MMO) de $275 kg$ et l' I_{sp} du moteur ionique est d'environ $2000 s$. Nous allons considérer que l'engin spatial est constitué des 2 orbiteurs, soit une masse de $675 kg$.

Soit M_i , la masse initiale, elle est égale à la masse des 2 orbiteurs, plus la masse de carburant. On considère que M_f , la masse finale, est égale à $675 kg$.

$$m_i = m_f + m_{ergol} \Delta V = g_0 I_{sp} \ln \left(\frac{m_i}{m_f} \right) \implies m_i = m_f K$$

Avec $K = e^{\frac{\Delta V}{g_0 I_{sp}}}$
de sorte que :

$$m_i = m_f K = m_f + m_{ergol} \text{ d'ou } m_{ergol} = m_f (K - 1) = 2688 kg$$

La masse d'ergol est assez grande mais non réhibitoire. La masse de l'engin au départ est donc égale à $3363 kg$ ($2688 + 675$).

2.2.7 Mercure, la Terre et le Soleil ne sont pas alignés

Dans ce cas, le grand axe de l'ellipse est plus court. D'après les formules $E_t = -\frac{\mu}{2a}$ et $T = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{\mu}}$, on voit que la durée de la mission va diminuer mais que l'énergie mécanique totale va augmenter, ce qui rend ce cas encore moins intéressant.

2.2.8 Document de Hiroshi Yamakama

Dans l'article "ISAS MERCURY ORBITER MISSION TRAJECTORY DESIGN STRATEGY" de Hiroshi Yamakawa, on voit que la durée de la mission est plus longue car le module effectue plusieurs tours autour de la Terre, puis autour de Vénus et autour de Mercure avant de graviter autour de Mercure pour profiter de l'attraction gravitationnelle de ces planètes afin de consommer moins d'énergie.

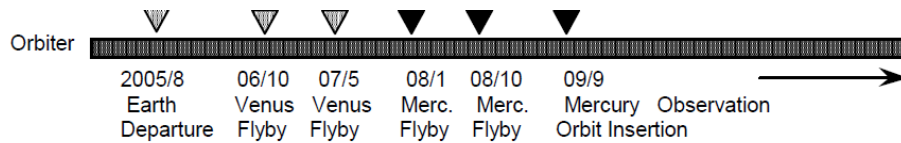


Fig.1: Interplanetary Trajectory Sequence Outline

Table 1: Interplanetary Trajectory Sequence

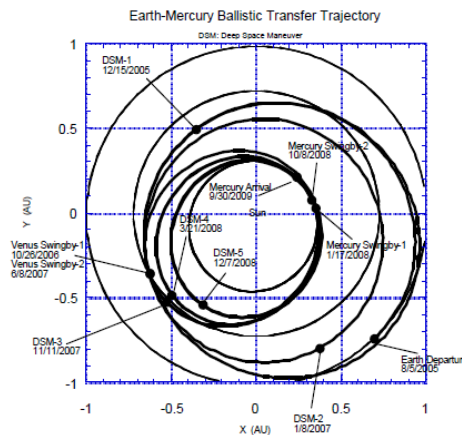


Fig.2: Earth-Mercury Interplanetary Trajectory

2.3 Méthode Runge-Kutta :

2.3.1 Explication de la méthode de Runge-Kutta :

Les méthodes de Runge-Kutta sont des méthodes de résolution numérique d'équations différentielles de premier ordre avec condition initiale.

Ces méthodes sont des méthodes explicites, et nécessitent pour chaque pas de temps plusieurs itérations pour mieux évaluer la variation finale d'une grandeur.

Afin de calculer l'équation de la trajectoire en tenant compte du freinage, nous allons utiliser un cas particulier d'usage très fréquent, noté RK4 (méthode de Runge Kutta d'ordre 4)

L'idée est que la valeur suivante (y_{n+1}) est approchée par la somme de la valeur actuelle (y_n) et par la pente estimée. La pente est obtenue par le produit de la taille de l'intervalle (h) par une moyenne pondérée de pentes, h étant le pas de temps de calcul.

Les variables utilisées pour la résolution de cette méthode sont :

- k_1 , qui est basée sur la pente au début de l'intervalle
- k_2 , qui est basée sur la pente au milieu de l'intervalle, en utilisant la pente k_1 pour calculer la valeur de y au point $t_n + h/2$ par le biais de la méthode d'Euler
- k_3 , qui est de nouveau basée sur la pente au milieu de l'intervalle, mais obtenue cette fois en utilisant la pente k_2 pour calculer y
- k_4 , qui est la pente à la fin de l'intervalle, avec la valeur de y calculée en utilisant k_3 .

La méthode RK4 est une méthode d'ordre 4, ce qui signifie que l'erreur commise à chaque étape est de l'ordre de h^5 , alors que l'erreur totale accumulée est de l'ordre de h^4 .

Dans la moyenne des quatre pentes, un poids plus grand est donné aux pentes au point milieu, ce qui permet de comprendre les poids donnés à k_1 , k_2 , k_3 et k_4 dans l'équation :

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

Pour calculer les valeurs du rayon ρ , de la dérivée du rayon $\dot{\rho}$, de la position angulaire θ et de la dérivée de la position angulaire $\dot{\theta}$ à la valeur (y_n) pour chaque pas de calcul, nous avons besoin de l'accélération radiale $\ddot{\rho}$ (dérivée seconde du rayon) et de l'accélération angulaire $\ddot{\theta}$ (dérivée seconde de la position angulaire).

Nous allons définir $\ddot{\rho}$ et $\ddot{\theta}$ à l'aide des formules suivantes :

$$m\vec{\gamma} = \frac{-m_{\text{mercure}}}{\rho^2} \vec{U}_r + \vec{F}$$

$$\vec{F} = -|F| \frac{\vec{V}}{V}$$

et en coordonnées polaires :

— de la vitesse de m :

$$\begin{cases} \dot{\rho} \\ \rho\dot{\theta} \end{cases} \implies \vec{V} = \begin{cases} \dot{\rho} \\ \rho\dot{\theta} \end{cases}$$

— de l'accélération de m :

$$\begin{cases} \ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2 \\ \rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta} \end{cases}$$

On calcule

$$V = \sqrt{\dot{\rho}^2 + (\rho\dot{\theta})^2}$$

$$\vec{F} = -|F| \frac{\vec{V}}{V} = -\frac{|F|}{|V|} \begin{cases} \dot{\rho} \\ \rho\dot{\theta} \end{cases} \quad \vec{U}_\rho, \vec{U}_\theta$$

$$\text{car } \vec{V} = \begin{cases} \dot{\rho} \\ \rho\dot{\theta} \end{cases}$$

$$m\vec{\gamma} = \frac{-Mm}{\rho^2}\vec{U}_r + \vec{F} = \begin{cases} -\frac{Mm}{\rho^2} - \frac{|F|}{V} & \dot{\rho} \\ -\frac{|F|}{|V|}\rho\dot{\theta} & \end{cases}$$

$$\vec{\gamma} = \begin{cases} \ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2 \\ \rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta} \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{m} \left(-\frac{Mm}{\rho^2} - \frac{|F|}{|V|}\dot{\rho} \right) \\ -\frac{|F|}{|V|}\rho\dot{\theta} \end{cases}$$

$$\ddot{\rho} = \rho\dot{\theta}^2 - \frac{M}{\rho^2} - \frac{|F|}{m|V|}\dot{\rho}$$

$$\text{et } \ddot{\theta} = \frac{1}{\rho} \left(-\frac{|F|}{|V|}\rho\dot{\theta} - 2\dot{\rho}\dot{\theta} \right)$$

Description de l'utilisation de la fiche excel de Mr Vuillamy :

- On fixe une position angulaire de départ de l'engin spatial par rapport au soleil de 130° par exemple, soit $\theta = 130^\circ$
- On calcule le rayon en ce point $\rho = 53.275$ en Mkm .
- Nous prenons une force de freinage (poussée dans le sens contraire de la vitesse) de $5N$ qui s'applique dès le début du freinage pendant une durée paramétrable.

En appliquant la méthode de Runge Kutta d'ordre 4 ou RK4, le programme calcule de manière itérative, pour chaque intervalle h successif, (le nombre d'itération est la durée de freinage choisie, divisée par le temps de calcul), les valeurs suivantes :

- Le rayon ρ correspondant à la distance de l'engin spatial au soleil (X_1 dans le programme), le rayon de début de freinage est de $53, 275, 575, 308m$ pour une position angulaire de départ que l'on a choisi de 130° .
- La dérivée du rayon par rapport au temps ($\dot{\rho} = X_2$) (vitesse radiale de l'engin spatial).
- La position angulaire $\theta = X_3$ de l'engin spatial par rapport au soleil.
- La vitesse angulaire $\dot{\theta} = X_4$ de l'engin spatial.

Ces 4 valeurs permettent de déterminer pour l'engin spatial, sa position (x, y) , les composantes de sa vitesse (V_x et V_y) ainsi que sa masse à l'issue de chacune des itérations, et finalement de visualiser la masse, la position et la trajectoire de l'engin spatial en fonction du temps.

Le programme remplit un tableau de valeurs :

$$x = \rho \cos \theta$$

$$y = \rho \sin \theta$$

x et y permettent de tracer la courbe de la trajectoire de l'engin dans un repère cartésien.

Dans le programme :

h étant le pas de calcul= dt_integr

durée de simulation en $s=duree_simul$

durée de freinage en $s=duree_frein$

$$X_1 = \rho$$

ρ est calculé en fonction de la vitesse au pas précédent.

$$X_2 = \dot{\rho}$$

$\dot{\rho}$ est calculé en fonction de l'accélération $\ddot{\rho}$ au pas précédent.

$$X_3 = \theta$$

θ est calculé en fonction de la portion angulaire θ au pas précédent.

$$X_4 = \dot{\theta}$$

$\dot{\theta}$ est calculé en fonction l'accélération $\ddot{\theta}$ au pas précédent.

2.3.2 Applications

Nous avons donc utilisé un programme que notre professeur nous a fourni. Il utilise la méthode Runge-Kutta (expliqué précédemment) afin d'arriver à la même vitesse que Mercure, voire à une vitesse inférieure, soit $58.98 km.s^{-1}$ et de calculer la trajectoire avec freinage. En effet, la trajectoire directe pour aller de la Terre à Mercure que nous avons calculée précédemment ne permettait pas à l'engin de se satelliser. La vitesse choisie correspond à la vitesse maximale de Mercure lorsque celle-ci est à son périhélie ($46 Mkm$)

Pour réaliser les simulations, nous avons pris :

- Une position angulaire de départ de l'engin spatial par rapport au soleil de 130°
- La valeur du rayon au point N sur le schéma = $5,327558.10^7 km$

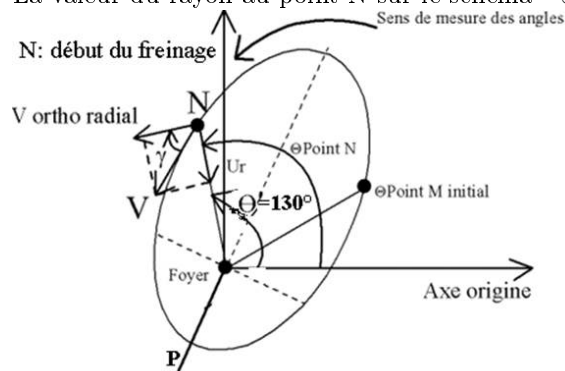


FIGURE 2.3 – Schéma d'une trajectoire utilisant la méthode Runge Kutta

— $I_{sp} = 2000s$

Détermination de la masse initiale à introduire dans le programme :

$$m_{ergol} = m_{finale}(K - 1)$$

Avec $K = e^{\frac{\Delta V}{g_0 I_{sp}}}$

Or on a vu avec Hohmann que le ΔV du freinage est de $18,65 km.s^{-1}$, avec $K = e^{\frac{18,65}{9,81 \cdot 2000}} = 2.587159$

D'où $m_{ergol} = 1071 kg$ (au moment du freinage) = $675 + 1071 = 1746 kg$

Nous avons commencé par fixer la poussée à $5N$: condition initiale de freinage que nous avons prise pour notre simulation. Puis nous avons fait varier la durée du freinage. Enfin, nous avons étudié les valeurs du rayon et de la vitesse pour une position angulaire de 240° qui définit le périgée :

point où l'engin rencontre Mercure car nous savons qu'à ce point, nous devons trouver un rayon de 46M km et une vitesse de l'ordre de 58.98 km.s^{-1} . Bien évidemment, le freinage transforme peu à peu la trajectoire. Celle-ci ne sera donc pas elliptique contrairement aux méthodes précédentes.

<i>Poussée = 5N</i>	Masse en <i>kg</i>	Rayon en Million de <i>km</i>	angle en °	Vitesse relative en <i>km.s⁻¹</i>	Commentaires
10 jours de freinage	1525	52.01	240	58.5	rayon est trop grand, il faut augmenter le temps de freinage
20 jours de freinage	1365	51.71	240	56.5	le rayon diminue mais la vitesse devient trop faible : il faut modifier la poussée

Nous voyons qu'il n'est pas possible d'atteindre les valeurs du rayon et de la vitesse avec une poussée de 5N. Nous regardons leur évolution avec une poussée de 10N :

<i>Poussée = 10N</i>	Masse en <i>kg</i>	Rayon en Million de <i>km</i>	angle en °	Vitesse relative en <i>km.s⁻¹</i>	Commentaires
10 jours de freinage	1305	48.8	240	58.2	le rayon est trop grand : il faut augmenter le temps de freinage
12 jours de freinage	1217	48.4	240	57.15	le rayon diminue mais la vitesse devient trop faible : il faut modifier la poussée

Le rayon est toujours trop grand, et la vitesse trop faible avec une poussée de 10N, il n'est pas possible d'atteindre les valeurs de 46M km et de 58,98 km/s pour le rayon et la vitesse, nous faisons varier la poussée :

modification de la poussée	Masse en kg	Rayon en Million de km	angle en °	Vitesse relative en km.s ⁻¹	Commentaires
<i>Poussée</i> = 13N, 10 jours de freinage	1173	46.7	240	58.2	le rayon diminue mais il est encore trop grand : il faut augmenter la poussée
<i>Poussée</i> = 15N, 10 jours de freinage	1085	45.2	240	58.3	le rayon est un peu trop petit : il faut diminuer le nombre de jours de freinage
<i>Poussée</i> = 15N, 9 jours de freinage	1151	45.8	240	58.8	le rayon et la vitesse sont proches des valeurs souhaitées
<i>Poussée</i> = 15N, 8 jours de freinage	1217	46.5	240	59.1	Les valeurs pour le rayon et la vitesse s'éloignent des valeurs recherchées, les valeurs précédentes sont plus satisfaisantes

Ci-dessous les graphiques et les résultats donnés par le programme avec les valeurs suivantes :

Données pour le freinage sur une portion de trajectoire	
angle de départ pour le freinage degré	130
rayon pour ce debut de freinage (km)	5.327558.10 ⁷
force de freinage (N)	15
durée du freinage (jours)	9
pas de temps de calcul (s)	10
pas de temps d'écriture (s)	3600
durée de la simulation (jours)	250
masse initiale	1746
<i>I_{sp}</i>	2000

Et les courbes suivantes :

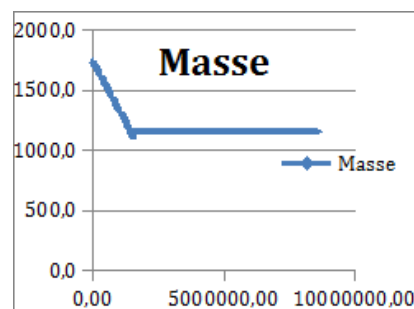


FIGURE 2.4 – Graphique de la variation de la masse : on voit que celle-ci diminue ce qui est normal à cause du carburant consommé pendant le freinage puis elle reste stable.

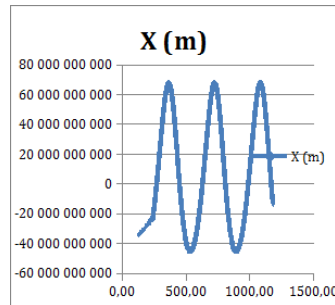


FIGURE 2.5 – Graphique montrant la variation de X : on voit que le satellite, après avoir atteint le périhélie de Mercure parcourt une ellipse toujours identique.

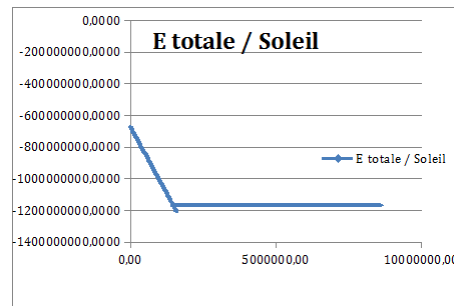


FIGURE 2.6 – Graphique de la variation d'énergie : on voit que celle-ci diminue pendant le freinage, puis varie très peu. Cela est normal puisque l'énergie se conserve.

Interprétations des résultats : On obtient pour 130° et 240° les valeurs suivantes :

Instant (s)	Masse	Rayon (m)	Teta (deg)	d teta/dt (rd/s)	X (m)	Y (m)	E totale / Soleil	V_relatif	Poussée
10.00	1746.0	53 275 391 036	130.00	0.00	-34 245 201 435	40 810 947 902	-6.70262E+08	60343.74	15.00
1483210	1151.5	45 765 977 575	239.928901	1.2786E-06	-22 932 154 053	-39 606 072 941	-1.16897E+09	58834	0

Enfin si on regarde la position du satellite avec et sans freinage on voit que la position avec freinage est plus proche du soleil, ce qui est normal vu qu'il ralentit. Afin de repérer cette position on regarde sur la ligne de calcul avec un angle de 240° ce qui correspond au périhélie de Mercure (l'endroit où l'on souhaite arriver puisque selon nos calculs avec Hohmann c'est la méthode la plus économique).

- Sans freinage, à 240° on a :
 X et Y : $-2.522.10^7 km$ et $-4.368.10^7 km$
- Avec freinage :
 X et Y : $-2.293.10^7 km$ et $-3.96.10^7 km$

Après plusieurs simulations nous avons vu que la force du moteur nécessaire pour que le satellite atteigne Mercure était de 15 N or, un moteur ionique ne possède pas une telle puissance ($\approx 0.1N$). On voit donc bien à l'aide de cette simulation qu'il est nécessaire d'utiliser l'attraction gravitationnelle d'autres planètes telles que Vénus pour ralentir le satellite.

Chapitre 3

Conclusion et perspective

3.1 Conclusions sur le travail réalisé

Pour conclure, de nombreuses interrogations concernant Mercure restent sans réponse, c'est pourquoi l'ESA et la JAXA se sont associées pour organiser la mission Bepicolombo avec l'objectif de mieux connaître cette planète. L'engin spatial qui sera envoyé par cette mission utilisera un moteur ionique pour optimiser la consommation en carburant et une trajectoire flyby avec des rebonds gravitationnels autour de la Terre, de Vénus et de Mercure.

Pour cela, nous avons réalisé une étude de trajectoire directe avec un moteur ionique afin de comprendre l'utilité des rebonds gravitationnels. Comme trajectoire directe, nous avons utilisé celle de Hohmann car parmi une infinité de trajectoires possibles, c'est celle qui est la plus économique en carburant. Ensuite grâce au programme Excel fourni par M. Vuillamy, nous avons pu améliorer notre étude en utilisant la méthode mathématique de Runge-Kutta.

En effet, le freinage modifie continuellement la trajectoire, et cette méthode nous a permis de la rectifier. Après plusieurs simulations, nous avons observé qu'il était impossible avec la puissance d'un moteur ionique de freiner suffisamment vite pour atteindre Mercure en prenant une trajectoire directe. Afin de pouvoir utiliser le moteur ionique, une trajectoire par rebond gravitationnel est donc obligatoire, ce qui explique le long chemin suivi par l'engin spatial de la mission Bepicolombo.

3.2 Perspectives pour la poursuite de ce projet

Afin d'être plus complet sur ce projet, nous pourrions étudier une trajectoire par rebond gravitationnel utilisant Vénus afin de comprendre l'économie de carburant que ce choix de trajectoire permet. Nous avons commencé à le faire en modifiant le programme Excel de Mr Vuillamy et en créant un programme Matlab qui permettrait de modéliser la trajectoire. Cependant le temps nous a manqué pour avoir des résultats probants. On pourrait également prendre en compte le fait que les orbites des différentes planètes ne sont pas sur le même plan, mais cela complexifie tellement les calculs que M. Vuillamy lui-même a préféré prendre l'hypothèse qu'elles étaient sur le même plan.

3.3 Conclusions sur l'apport personnel de cet E.C. projet

Le projet P6 nous a appris la complexité d'une mission spatiale et surtout des calculs de trajectoires qui prennent en compte des paramètres aussi divers que le moteur utilisé, la masse de carburant nécessaire pour freiner et la date de lancement (donc la position de la Terre par rapport au Soleil et à Mercure). Nous avons choisi ce sujet car l'astronomie nous intéressait tous, mais nous avons sous-estimé la difficulté du projet. De plus, nous avons découvert la technique du rebond gravitationnel et la méthode mathématique de Runge Kutta.

Bibliographie

Livre :

”L’exploitation du système solaire” de BOND – Traduction de Nicolas Dupont-Bloch, ouvrage original « Exploring the Solar System » de Peter Bond. Edité par Wiley-BlackWell, première publication en 2012.

Articles :

”Chemical and solar electric propulsion options for a cornerstone mission to Mercury” de Yves LANGEVIN (CNRS), Volume 47, Issues 2–9, July–November 2000, Pages 443-452.

”Isas Mercury orbiter mission trajectory design strategy” de Hiroshi Yamakawa, Institute of Space and Astronautical Science (ISAS) 3-1-1 Yoshinodai, Sagamihara, Kanagawa, 229-8510 Japan.

”Twin Engine Tests of the T6 Ion Engine for ESA’s Bepicolombo Mercury Mission”, de Ismat M. Ahmed Rudwan, Neil Wallace et Steve Clark, IEPC-2011-125.

Sites :

http://lpce.cnrs-orleans.fr/www_experim/experim_espace_am2p_details_fr.php (valide à la date du 08/06/2016)

<https://fr.wikipedia.org/wiki/MESSENGER> (valide à la date du 08/06/2016)

<https://fr.wikipedia.org/wiki/Bepicolombo> (valide à la date du 08/06/2016)

https://bepicolombo.cnes.fr/fr/BEPICOLOMBO/Fr/GP_mission.htm (valide à la date du 08/06/2016)

http://www.esa.int/Our_Activities/Space_Science/BepiColombo_overview2 (valide à la date du 08/06/2016)

<http://www.esa.int/science/bepicolombo> https://fr.wikipedia.org/wiki/Vitesse_de_lib%C3%A9ration (valide à la date du 08/06/2016)

http://accens-lyon.fr/clea/archives/cahiers-clairaut/CLEA_CahiersClairaut_127_07.pdf (valide à la date du 08/06/2016)

Chapitre 4

Annexes

4.1 Documentation technique

Tous les fichiers suivants nous ont été fournis par M. Vuillamy afin de nous aider dans notre projet.

documentation_orbites.docx, un document qui rassemble quelques données essentielles sur notre système solaire (constantes universelles, données sur les planètes.)

ellipse.doc, un document expliquant des relations fondamentales de trajectoires.

expli_1_Bepicolombo_STPI_2015_2016.pdf, un document décrivant les étapes nécessaire à l'accomplissement d'une trajectoire directe.

runge_kutta.doc, un document détaillant la méthode d'ordre 4 de Runge-Kutta.

4.2 Listings des programmes réalisés

Orbite_perso2_STPI_2015_2016.xls, un classeur excel permettant de calculer différentes valeurs dont la vitesse pour une trajectoire directe.

TrajectoireSatellite.m, début de programme matlab dans l'optique d'étudier une trajectoire par rebond gravitationnel.

Programmes/Orbite_perso2_Soleil_Planetes_STPI_2015_2016_allégé.xlsm, un classeur excel comportant deux exemples de rebonds gravitationnels.

4.3 Propositions de sujets de projets (en lien ou pas avec le projet réalisé)

- Etude d'une des possibles missions vers Mars. Deux semblent aujourd'hui en cours de développement, une réalisée par la NASA et une autre par la compagnie privée SpaceX.
- Etude des découvertes d'exoplanètes et de leurs implications scientifiques.
- Etude du lanceur Ariane 5, et pourquoi pas de sa relève en cours de développement : Ariane 6.
- Etude des rovers Spirit et Opportunity lancé sur Mars en 2004.