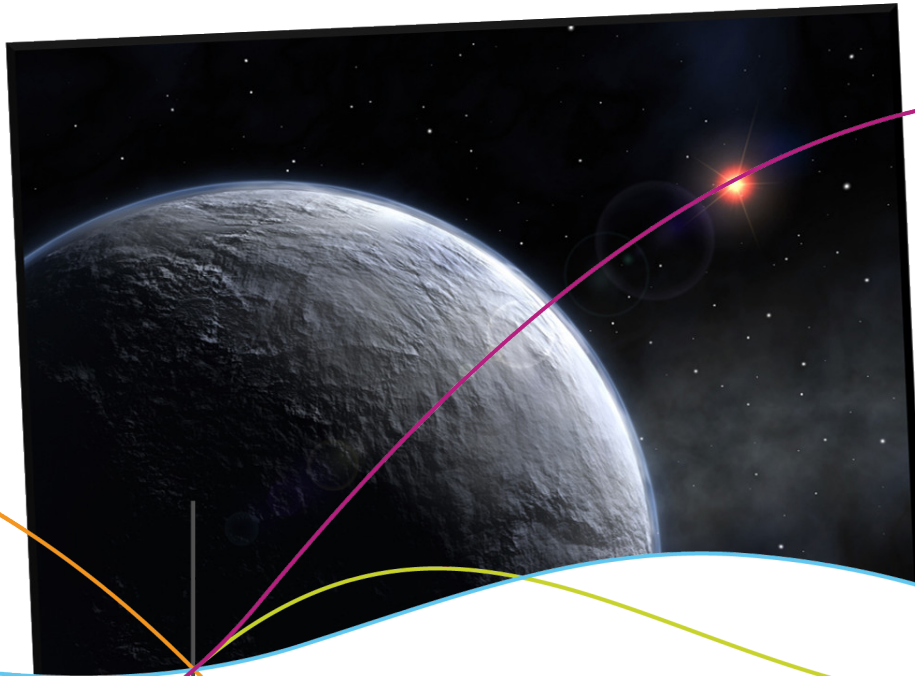


Simulation numérique des mouvements orbitaux



Enseignant responsable
Jérôme YON

Étudiants :

Rachel BLIN
Maxime JUMELLE
Colette PONCHEL

Médéric DOUSSELIN
Savinien PERTANT
Noël ZABLOCKI

Date de remise du rapport : 15/06/15

Référence du projet : STPI¹/P6/2015 – 046

Intitulé du projet : Simulation numérique des mouvements orbitaux

Type de projet : *Calcul, modélisation*

Objectifs du projet :

Il s'agissait d'étudier et simuler différents mouvements orbitaux, tout en comprenant les méthodes utilisées par les scientifiques qui étudient ces mouvements. Nous avons aussi pour objectif d'utiliser des méthodes différentes pour aboutir au résultat en fonction du problème, c'est à dire de résoudre analytiquement le problème quand c'est possible ou bien utiliser une méthode numérique avec le logiciel Scilab quand les équations ne peuvent être résolues à la main. Enfin, nous devons aussi présenter des applications de tels calculs dans le domaine de l'astronomie.

1. INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES DE ROUEN
DÉPARTEMENT SCIENCES ET TECHNIQUES POUR L'INGÉNIEUR
685 AVENUE DE L'UNIVERSITÉ BP 08- 76801 SAINT-ETIENNE-DU-ROUVRAY
TÉL : 33 2 32 95 66 21 - FAX : 33 2 32 95 66 31

Table des matières

Notations	5
Introduction	6
1 Méthodologie, organisation du travail	7
2 Calcul de la trajectoire d'un corps en fonction de son énergie mécanique	8
3 Les frondes gravitationnelles	11
3.1 Définition de l'effet de fronde	11
3.2 L'équation polaire de la trajectoire	11
3.3 Calculs des valeurs de e et p	12
3.4 Calcul de l'angle de déviation	13
3.5 Exemple de calcul de la trajectoire	14
4 Problème à deux corps : les exoplanètes	15
4.1 Définition et méthodes de détection des exoplanètes.	15
4.2 Détail du calcul de la résolution du problème à deux corps.	15
4.2.1 Détermination de C	17
4.2.2 Détermination de e	17
4.2.3 Détermination de V_0	18
4.2.4 Retour à un problème à deux corps	18
4.3 Calcul de la période du problème à 2 corps et application	18
4.4 Application à la détection d'exoplanètes	19
5 Problème à trois corps	21
5.1 Résolution	21
5.1.1 Application du principe fondamental de la dynamique	21
5.1.2 PFD sur M_1	21
5.2 Modélisation	22
Conclusion et perspectives	24
Bibliographie	27
A Documentation technique	28
A.1 Détail du calcul de la trajectoire en fonction de l'énergie mécanique d'un système.	28
A.2 Problème à trois corps	31
A.2.1 PFD sur M_1	31
A.2.2 PFD sur M_2	31
A.2.3 PFD sur M_3	31

A.3 Détermination de e pour les exoplanètes	32
A.4 Calcul de l'amplitude a pour les exoplanètes	32
A.5 Evolution de θ en fonction du temps	32
A.6 Calcul de la vitesse pour les frondes gravitationnelles	32

Notations et Acronymes

Cette partie a pour but d'introduire les bases du problème que nous allons résoudre tout le long de cette étude, et de fixer certaines notations. Pour cela, nous étudierons différents systèmes dans l'espace.

Les systèmes que l'on va résoudre seront chacun schématisés dans leur partie respective. Leur référentiel est noté R^* . On note M_1 et M_2 , les positions respectives de chacun des deux corps, et de la même façon m_1 et m_2 leurs masses. Puisque dans le problème des exoplanètes on aura besoin de poser un point fictif, M , pour se ramener à la résolution d'un problème à un seul corps, on pose r la distance entre le centre de gravité du système, G , et le point fictif M et L la distance entre M_1 et M_2 . La masse fictive du point M , qui s'exprime en fonction des masses m_1 et m_2 des deux corps du système, est notée μ et a pour valeur :

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

La vitesse du corps 1 par rapport au référentiel R^* est notée $V(M_1/R^*)$ ou encore V_1 , les notations suivent la même logique pour le corps 2 ainsi que pour le corps fictif qui servira à résoudre le système. F_{12} est la force d'attraction gravitationnelle exercée par le corps 1 sur le corps 2, et a pour formule :

$$F_{12} = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{u}$$

Dans cette formule, G est la constante gravitationnelle, et \vec{u} le vecteur allant de M_1 vers M_2 . On utilisera pour la résolution du système la formule de l'anomalie vraie qui est la suivante :

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(\theta)}$$

Ici, e représente l'excentricité de l'ellipse et p le paramètre de l'ellipse.

Pour la résolution du système d'une exoplanète, on aura recours à la formule de Binet relative à l'accélération qui est :

$$\vec{a} = -c^2 u^2 \left[u + \frac{d^2 u}{d\theta^2} \right] \vec{u}_r$$

On a $u = \frac{1}{r}$ et c la constante des airs qui vaut $r^2 \dot{\theta}$.

Introduction

Tout au long de ce semestre, nous avons élaboré ce projet ayant pour thème la simulation des mouvements orbitaux. Ce thème couvre un domaine très vaste, ce pourquoi dès la première séance nous avons commencé par réfléchir tous ensemble afin de déterminer quelles étaient les applications que nous pouvions traiter. Nous avons ainsi ciblé le domaine dans lequel nous voulions travailler. D'un commun accord, nous avons trouvé qu'il serait intéressant de pouvoir répondre à des problèmes concrets de physique puis de les modéliser.

Deux thèmes actuels sont rapidement sortis du lot : les exoplanètes et l'effet de fronde gravitationnelle, qui en plus étaient des cas abordables compte tenu de notre niveau de connaissance. En effet, de nos jours les connaissances scientifiques et les moyens d'obtenir des informations ont considérablement évolué. Nous sommes capables de déterminer de nombreuses caractéristiques sur des planètes situées à des années-lumières, et d'envoyer des sondes ou autres objets dans l'espace tout en contrôlant leur trajectoire par rapport aux objets cosmiques. Nous nous sommes donc tournés vers la résolution de problèmes à deux corps, mais nous n'avons pas exclu l'idée de travailler sur des modèles plus complexes. Dans le cas des frondes gravitationnelles, il s'agit d'étudier la déviation de la trajectoire d'un corps lorsqu'il passe à proximité d'un autre dans l'espace, phénomène que les physiciens utilisent lors du lancement de satellites dans l'espace. En revanche, dans le cas des exoplanètes nous sommes confrontés à un corps en orbite autour d'un autre, lui induisant un mouvement de rotation ; mouvement qui permet aux physiciens de les détecter dans l'espace.

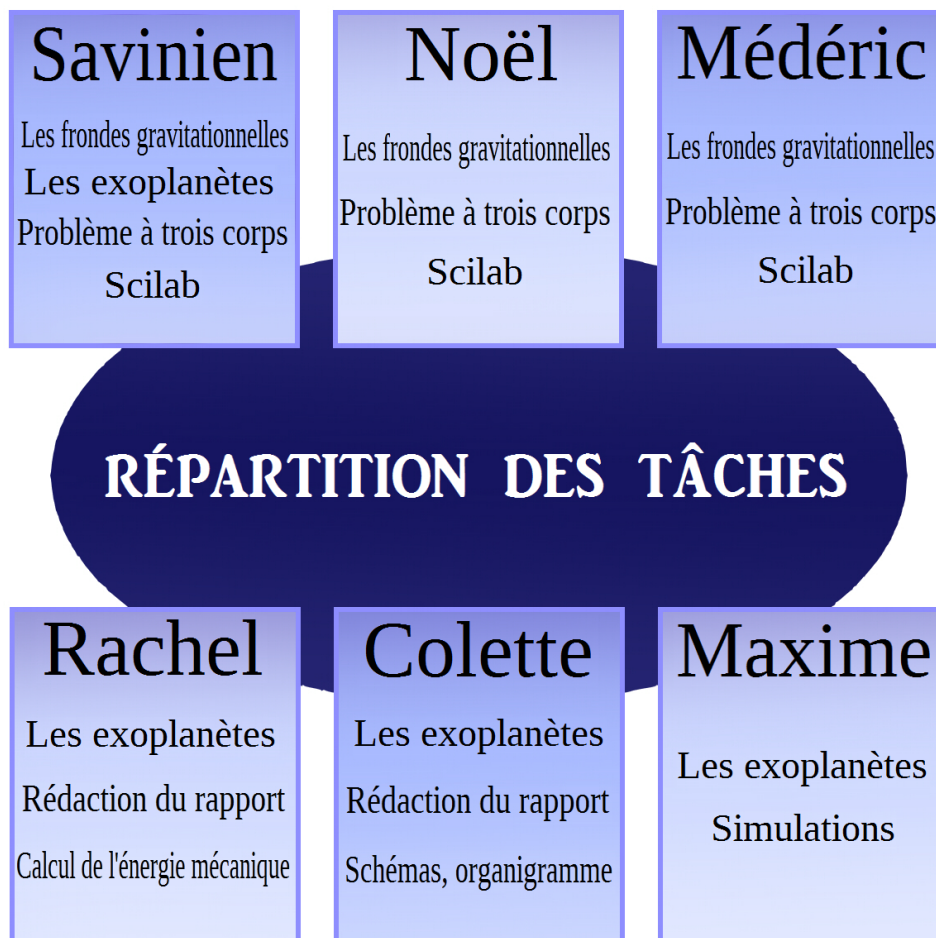
Nous avons réalisé que dans l'étude des exoplanètes et celle des frondes gravitationnelles avaient pour même point de départ le calcul de l'énergie mécanique explicité dans ce rapport. Cette cohérence dans notre projet nous a encouragé à continuer dans ces voies. Après avoir délimité les champs de recherche, nous avons posé des objectifs qui ont évolué au fil du projet. Nous voulions principalement résoudre les problèmes à deux corps des exoplanètes et des frondes, dans l'idée de les simuler, et surtout de comprendre les méthodes appliquées par les scientifiques spécialisés pour en découvrir plus sur notre univers et pour concrétiser la « conquête spatiale ». Cependant, les problèmes que nous avons résolu se rapprochaient beaucoup de la mécanique que nous avons étudié jusqu'à présent. C'est pourquoi nous nous avons décidé d'aller encore plus loin et de résoudre un problème à trois corps. Nous avons donc relevé le défi d'y répondre car actuellement la résolution de problèmes à trois corps et plus pose encore beaucoup de difficultés aux physiciens.

Ainsi, au-delà des phénomènes physiques concrets que nous avons voulu comprendre et modéliser, nous avons exploré une nouvelle facette de la mécanique en se penchant sur un problème qui est une parfaite illustration des limites de la mécanique actuelle. La simulation a ensuite pris une place importante dans le projet, à ce moment, il a été question de concrétiser notre travail.

Chapitre 1

Méthodologie, organisation du travail

Pour travailler efficacement tout au long du semestre, nous avons divisé notre groupe en deux sous groupes afin que chacun d'entre eux traite un thème différent. Noël, Savinien et Médéric ont travaillé sur les frondes gravitationnelles tandis que Colette, Maxime, Savinien et Rachel ont travaillé sur les exoplanètes. Chacun a pu participer à la résolution d'un ou plusieurs problèmes et apporter du contenu au projet. D'autres tâches ont été réparties au sein du groupe. Savinien, Noël et Médéric ont réalisé les modélisations d'une fronde gravitationnelle, ainsi que celles de trois corps à l'aide du logiciel SciLab. Maxime a réalisé des simulations de qualité avec le logiciel Unity 3D. Rachel et Colette se sont chargées de rédiger le rapport en Latex.



Chapitre 2

Calcul de la trajectoire d'un corps en fonction de son énergie mécanique

Dans cette partie, nous allons expliquer les grandes étapes du calcul de la trajectoire d'un corps en fonction de l'énergie mécanique du système. Les calculs détaillés se trouvent en annexe du dossier.

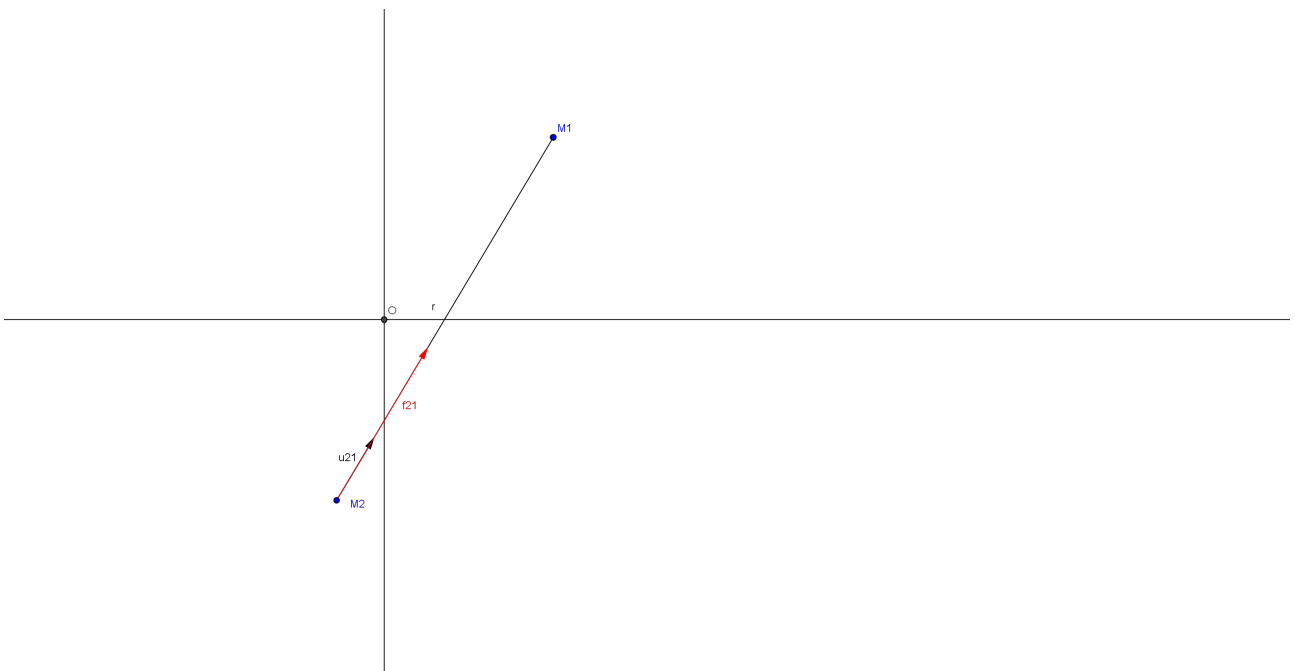


FIGURE 2.1 – Schéma de deux corps dans l'espace

Pour résoudre ce problème on part de la formule de l'attraction gravitationnelle du corps 2 sur le corps 1 et on obtient le résultat suivant :

$$F_{12} = -\frac{dE_p}{dr} \vec{u}_{12}(1) \quad (2.1)$$

Ici, $E_p(r) = \frac{k}{r}$ est l'énergie potentielle d'interaction. k est une constante qui dépend du système qui est positive lorsque la force entre deux corps est attractive et négative lorsqu'elle est répulsive. En remplaçant la valeur de $E_p(r)$ dans l'équation (1), on obtient une nouvelle

expression de F_{12} qui est :

$$F_{12} = \frac{k}{r^2} \quad (2.2)$$

En exprimant dEP en fonction des forces d'attraction gravitationnelles et des vecteurs $\overrightarrow{OM_1}$ et $\overrightarrow{OM_2}$ on obtient une expression simplifiée en fonction des masses et des vitesses des corps :

$$dEP = -d\left(\frac{1}{2}m_1v_1^2\right) - d\left(\frac{1}{2}m_2v_2^2\right) \quad (2.3)$$

En passant toute l'expression du même côté de l'égalité, on se rend compte que la dérivée de l'expression est nulle, on en déduit que l'expression est constante, et on pose la notation suivante :

$$Em = Ep + \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = cte(2) \quad (2.4)$$

On définit G le barycentre du système, et on en déduit que $m_1\overrightarrow{GM_1} + m_2\overrightarrow{GM_2} = 0$, et on obtient une expression du vecteur $\overrightarrow{M_1M_2}$ en fonction du centre de gravité du système et des masses des 2 corps :

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \frac{m_1 + m_2}{m_1}\overrightarrow{GM_2}(3) \quad (2.5)$$

Une autre façon d'exprimer la force d'attraction gravitationnelle entre deux corps est de l'exprimer en fonction de la dérivée seconde de la distance OM_1 en fonction du temps, soit :

$$\overrightarrow{F_{12}} = \frac{d^2\overrightarrow{OM_1}}{dt^2} \quad (2.6)$$

En injectant l'expression obtenue dans l'équation (3) on obtient une autre expression de la force d'interaction gravitationnelle qui est :

$$\overrightarrow{F_{21}} = \mu \frac{d^2\overrightarrow{r'}}{dt^2} \quad (2.7)$$

On appelle μ la masse réduite du système, et qui a pour expression $\mu = \frac{m_1m_2}{m_1+m_2}$.

On reprend maintenant l'expression de l'énergie mécanique obtenue dans l'équation (2), et introduit l'expression $\overrightarrow{GM_1} = \frac{m_2}{m_1+m_2}\overrightarrow{r'}$ ainsi qu'une expression similaire pour $\overrightarrow{GM_2}$, et en l'injectant dans l'équation (2) on obtient une nouvelle expression de Em :

$$Em = \frac{1}{2}\mu\left(\frac{d\overrightarrow{r'}}{dt}\right)^2 + Ep(r) \quad (2.8)$$

Pour la suite de la résolution, on introduit dans le problème le moment cinétique du système, qui a pour expression simplifiée après calcul :

$$\overrightarrow{\sigma_G} = \overrightarrow{r'} \wedge \mu \frac{d\overrightarrow{r'}}{dt} \quad (2.9)$$

Lorsque l'on calcule la dérivée du moment cinétique, on remarque qu'elle est nulle, ce qui nous permet de conclure qu'il est constant, et on pose pour la suite du problème que $\overrightarrow{\sigma_G} = \overrightarrow{\sigma_o} = cte$. On retrouve la valeur de σ_o grâce à la loi des aires :

$$\sigma_o = \mu r^2 \dot{\theta} \quad (2.10)$$

On remplace la valeur de σ_o obtenue dans l'expression de l'énergie mécanique. En dérivant la nouvelle expression, on trouve que la dérivée de l'énergie mécanique est nulle. On obtient

par la même occasion une équation différentielle. La résolution de l'équation différentielle nous permet de trouver le résultat suivant :

$$\frac{1}{r} = -\frac{\mu k}{\sigma_o^2} + A \cos(\theta - \theta_o) \quad (2.11)$$

On décide de se placer l'origine du repère, ainsi $\theta_o = 0$. De plus, on a $A = \frac{\epsilon}{p}$.

Si $k < 0$, alors $-\frac{\mu k}{\sigma_o^2} = \frac{1}{p}$, donc $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{\epsilon}{p} \cos(\theta)$. On obtiendra alors une conique de foyer F qui sera soit une ellipse, une parabole ou encore une hyperbole.

Si $k > 0$, alors $-\frac{\mu k}{\sigma_o^2} = -\frac{1}{p}$, donc $\frac{1}{r} = -\frac{1}{p} + \frac{\epsilon}{p} \cos(\theta)$. On obtiendra alors une hyperbole pour la trajectoire.

Pour notre dossier, on s'intéresse au cas où $k < 0$, et en remplaçant les résultats obtenus dans l'équation de l'énergie mécanique, on obtient une nouvelle expression de E_m en fonction de l'excentricité de la trajectoire.

$$E_m = \frac{\sigma_o^2}{2\mu} \frac{e^2 - 1}{p^2} \quad (2.12)$$

Lorsque $E_m < 0$, l'excentricité e est inférieure à 1, ce qui donne l'équation d'une ellipse.

Lorsque $E_m = 0$, l'excentricité e est égale à 1, ce qui donne l'équation d'une parabole.

Lorsque $E_m > 0$, l'excentricité e est supérieure à 1, ce qui donne l'équation d'une branche d'hyperbole.

Chapitre 3

Les frondes gravitationnelles

3.1 Définition de l'effet de fronde.

L'effet de fronde gravitationnelle ou encore l'assistance gravitationnelle consiste à utiliser l'attraction gravitationnelle d'un corps afin d'accélérer et de dévier la trajectoire d'un autre corps. En pratique, on utilise l'effet de fronde afin d'accélérer une sonde par l'intermédiaire des planètes.

Le principe de cette méthode est simple : il suffit de lancer l'objet spatial vers une planète ou une étoile de façon à ce que le corps tombe vers elle sans rester emprisonné dans son orbite. En tombant vers la planète de manière oblique, le corps gagne de la vitesse et ressort un peu plus loin sous l'effet de l'attraction gravitationnelle de la planète. Le corps a de ce fait gagné de la vitesse relative par rapport au reste de l'univers.

C'est grâce à ce principe que la sonde Helios 2, objet le plus rapide fabriqué par l'homme à ce jour a pu atteindre une vitesse de $292 km/h$, mais aussi que des sondes ont pu visiter plusieurs planètes du système solaire. L'assistance gravitationnelle permet aussi d'économiser du carburant consommé lors de l'accélération d'une sonde, pour arriver au même résultat.

3.2 L'équation polaire de la trajectoire

Les expressions du moment cinétique et du moment de force en O du satellite M_1 sont respectivement : $\vec{\sigma}_0(M_1) = \vec{OM}_1 \wedge m_1 \vec{v}$ et $\vec{M}_0(F) = \vec{OM}_1 \wedge \vec{F}$

— D'après le théorème du moment cinétique :

$$\frac{d\vec{\sigma}_0(M_1)}{dt} = \vec{M}_0(F)$$

Ici, on a : $\vec{M}_0(F) = \vec{0}$ car $\vec{OM}_1 = OM_1 \vec{u}_r$ et $\vec{F} = F \vec{u}_r$ sont colinéaires. On a donc, $\forall C \in \mathbb{R}$.

$$\frac{d\vec{\sigma}_0(M_1)}{dt} = \vec{0} \iff \vec{OM}_1 \wedge m_1 \vec{v} = \vec{C}$$

$$\iff r \vec{u}_r \wedge m_1 (r \dot{u}_r + r \dot{\theta} \vec{u}_\theta) = \vec{C}$$

$$\iff m_1 r^2 \dot{\theta} u_z = C$$

— D'après la 2ème loi de Newton :

$$m_1 \vec{a} = -\vec{F} \iff a = -G \frac{m_2}{r^2}$$

(Formule de Binet : $\vec{a} = -C^2 u^2 (\frac{d^2 u}{dt^2} + u) \vec{u}_r$ où $u = \frac{1}{r}$ et $r \neq 0$)

$$\begin{aligned}
 -C^2 u^2 \left(\frac{d^2 u}{dt^2} + u \right) &= Gm_2 u^2 \iff \frac{d^2 u}{dt^2} + u = \frac{Gm_2}{C^2} \\
 \iff u &= \frac{1 + e \cos(\theta)}{p}
 \end{aligned}
 \tag{3.1}$$

On appellera e : l'excentricité et p : le paramètre de la trajectoire.

3.3 Calculs des valeurs de e et p

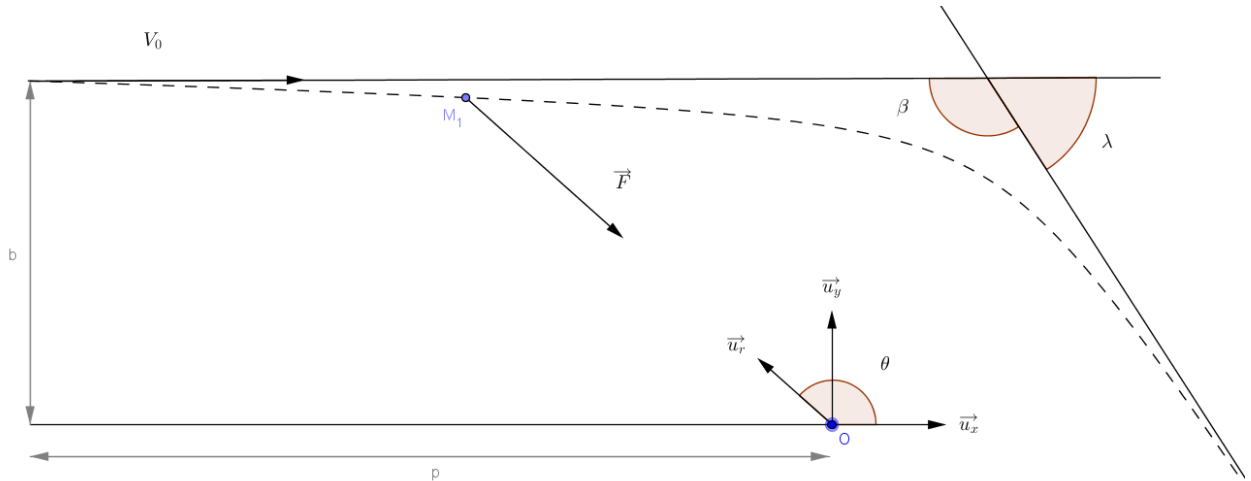


FIGURE 3.1 – Schéma des conditions initiales

— Recherche de C (constante des aires) :

$$\vec{OM} = -l\vec{u}_x + b\vec{u}_y \text{ et } \vec{v}_0 = v_0\vec{u}_x \text{ avec } b \text{ le paramètre d'impact.}$$

$$\text{donc } \vec{\sigma}_0 = -mbv_0\vec{u}_z$$

$$\text{d'où le résultat : } C = -bv_0$$

— Recherche de p :

On part de la valeur de u et cherche la valeur de $\frac{d^2 u}{dt^2} + u$:

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + u = -\frac{e}{p} \cos(\theta) + \frac{1}{p} + \frac{e}{p} \cos(\theta)$$

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + u = \frac{1}{p}$$

$$\text{On compare cette valeur à (1), donc } p = \frac{C^2}{Gm_2} = \frac{b^2 v_0^2}{Gm_2}$$

— Recherche de e (excentricité) :

Par définition $E_m = \frac{1}{2}m_1 v^2 - G\frac{m_1 m_2}{r} = cte$ (car conservation de l'énergie mécanique (force centrale)).

$$\vec{F} = -G\frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{u}_r$$

$$\iff \vec{F} = -\overrightarrow{grad}(E_p)$$

$$\iff \vec{F} = -\frac{dE_p}{dr} \vec{u}_r$$

donc

$$\frac{dE_p}{dr} = \frac{Gm_1m_2}{r^2} \iff E_p = -G\frac{m_1m_2}{r}$$

à $t = 0$ on a M_1 infiniment loin ($r \rightarrow \infty$), donc :

$$E_m = \frac{1}{2}m_1v_0^2$$

d'autre part, d'après la formule de Binet, on peut poser l'équation suivante :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}m_1v^2 - G\frac{m_1m_2}{r} &= \frac{1}{2}m_1C^2\left(u^2 + \left(\frac{du}{d\theta}\right)^2\right) - Gm_1m_2u \\ &= \frac{1}{2}m_1b^2v_0^2\left(\frac{1+2e\cos(\theta)+e^2\cos^2(\theta)}{p^2} + \frac{e^2\sin^2(\theta)}{p^2}\right) - Gm_1m_2\left(\frac{1+e\cos(\theta)}{p}\right) \\ &= \frac{1}{2}m_1v_0^2 \text{ (cette équation n'est pas déduite de la ligne du dessus mais de la valeur de } E_m \text{)} \end{aligned}$$

on résoud donc :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}b^2v_0^2\left(\frac{1+2e\cos(\theta)+e^2\cos^2(\theta)}{p^2} + \frac{e^2\sin^2(\theta)}{p^2}\right) - Gm_2\left(\frac{1+e\cos(\theta)}{p}\right) &= \frac{1}{2}v_0^2 \\ \iff \frac{1}{2}b^2v_0^2 \cdot \frac{G^2m_2^2}{b^4v_0^4}(1 + 2e\cos(\theta) + e^2) - \frac{G^2m_2^2}{b^2v_0^2}(1 + e\cos(\theta)) &= \frac{1}{2}v_0^2 \\ \iff \frac{G^2m_2^2}{b^2v_0^2}\left(\frac{1}{2} + e\cos(\theta) + \frac{e^2}{2} - 1 - e\cos(\theta)\right) &= \frac{1}{2}v_0^2 \\ \iff \frac{G^2m_2^2}{2b^2v_0^2}(e^2 - 1) &= \frac{1}{2}v_0^2 \\ \iff e^2 - 1 &= \frac{b^2v_0^4}{G^2m_2^2} \\ \iff e &= \sqrt{\frac{b^2v_0^4}{G^2m_2^2} + 1} \end{aligned}$$

L'excentricité est bien supérieure à 1 ce qui est cohérent puisque la trajectoire voulue est une hyperbole.

3.4 Calcul de l'angle de déviation

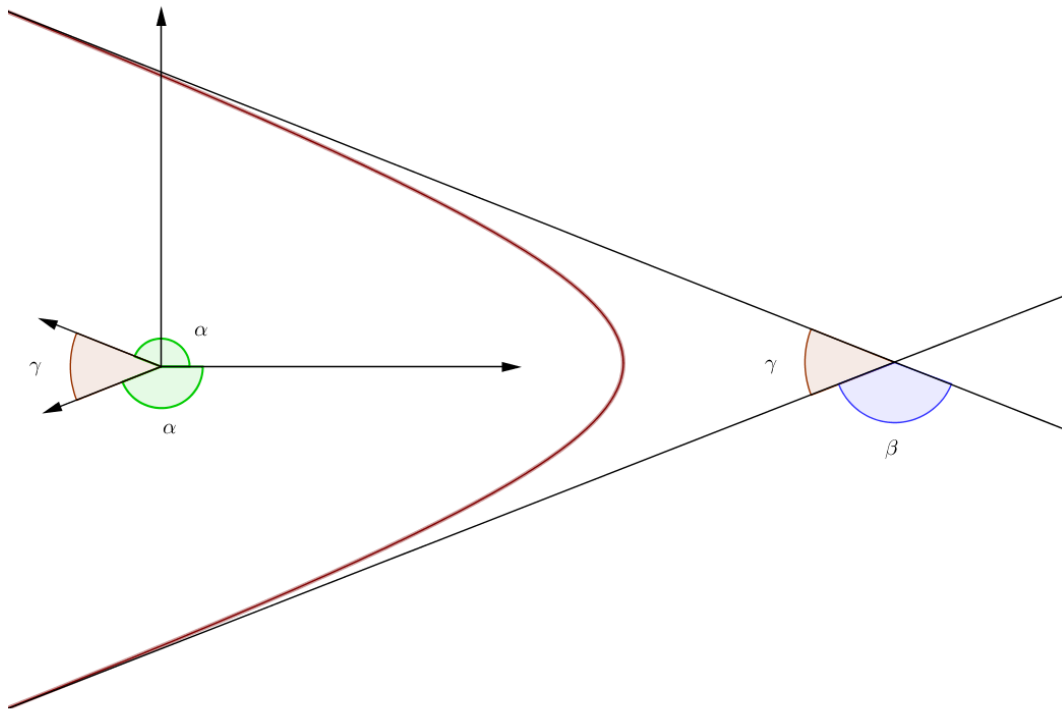


FIGURE 3.2 – Calcul de l'angle de déviation

Ce calcul d'angle est le cœur de notre problématique dans l'étude des frondes. Il s'agit après avoir exprimé tous les paramètres en fonction des données initiales du problème, de pouvoir avoir un contrôle sur l'angle de déviation engendré par l'effet de fronde gravitationnelle. On pourra ainsi jouer avec les paramètres du problème et les conditions initiales pour prévoir et modifier les déplacements des corps qui subissent l'effet fronde.

On définit $\alpha = \lim_{r \rightarrow +\infty} \theta(r)$ et β et γ comme sur le dessin.

$$r = \frac{p}{1+e \cos(\theta)}$$

Donc $1 + e \cos(\theta) = \frac{p}{r}$ donc $1 + e \cos(\alpha) \simeq 0$

donc $\alpha = -\arccos\left(-\frac{1}{e}\right)$

On a donc $\beta = \frac{2\pi - 2\gamma}{2} = \pi - 2\pi + 2|\alpha| = -\pi + 2|\alpha| = (2|\alpha| - \pi)$

avec $\alpha = -\arctan\left(-\frac{1}{e}\right)$ on prend α en valeur absolue et on a donc :

$$\beta = (2|\alpha| - \pi) \text{ donc } \beta \in]\pi; 0[$$

$$\beta = 2\left| -\arctan\left(-\frac{1}{e}\right) \right| - \pi$$

3.5 Exemple de calcul de la trajectoire

Valeurs et conditions initiales de la sonde Cassini-Huygens. La sonde avait pour mission l'exploration spatiale de la planète Saturne et de ses lunes. Malgré la puissance de son lanceur, Cassini-Huygens ne peut pas parvenir sur sa seule lancée jusqu'à Saturne. Pour y parvenir il aurait été nécessaire que la fusée Titan puisse accélérer la sonde spatiale à une vitesse de 15,1 km/s. Or, compte tenu de la masse de celle-ci, le lanceur n'a pu lui communiquer qu'une vitesse de 12,4 km/s. Les concepteurs de la mission ont donc prévu d'obtenir la vitesse manquante en utilisant l'assistance gravitationnelle de Vénus (deux fois), de la Terre. Une dernière assistance gravitationnelle de Jupiter est utilisée pour raccourcir la durée du voyage. On pose :

$$b = 6339000m$$

$$v_0 = 35000m \cdot s^{-2}$$

$$m_2 = 4,867 \cdot 10^{24}kg$$

$$G = 6,67 \cdot 10^{11}SI$$

$$e = 23,9413608167$$

$$p = 151631842,466891$$

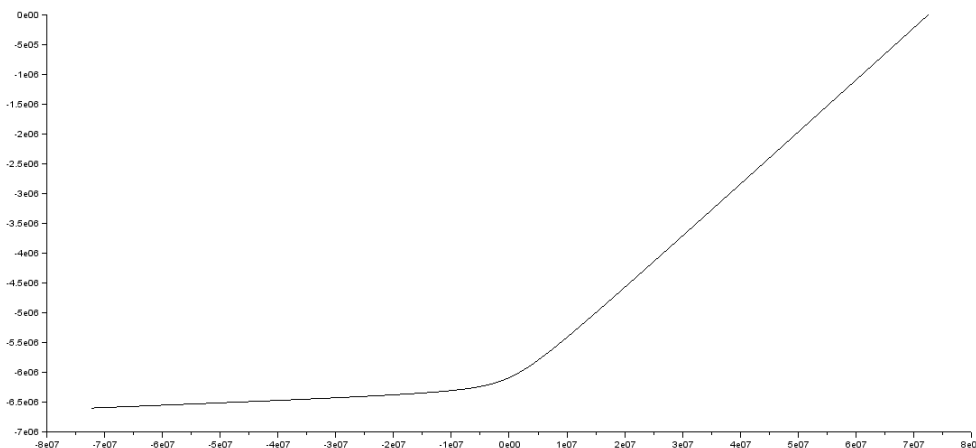


FIGURE 3.3 – Exemple de déviation d'une sonde spatiale passant à proximité d'une planète (ici Cassini-Huygens)

Chapitre 4

Problème à deux corps : les exoplanètes

4.1 Définition et méthodes de détection des exoplanètes.

Une exoplanète est par définition une planète située en dehors du système solaire, c'est-à-dire qu'elle est en orbite autour d'une étoile autre que le Soleil. Aujourd'hui, on connaît surtout des exoplanètes de type géante gazeuse, plus faciles à détecter que les planètes de type tellurique avec les méthodes que l'on possède actuellement. Grâce à ces méthodes, on a découvert aujourd'hui 245 exoplanètes, que l'on retrouve dans toutes les constellations. On estime que 10 pour 100 étoiles ont au moins une planète géante de période inférieure à 10 ans qui orbite autour d'elles, ce qui ferait des dizaines de milliards d'exoplanètes rien que dans notre galaxie.

Aujourd'hui, on ne peut pas voir directement une exoplanète, mais on détecte les effets particuliers qu'elles produisent lorsqu'elles sont en orbites autour de certaines étoiles. On retrouve tout d'abord la méthode de vitesses radiales, qui consiste à utiliser l'effet Doppler-Fizeau, c'est-à-dire que le mouvement de la planète autour de son étoile va induire un léger mouvement de recul de celle-ci, qui lui est détectable par les moyens dont on dispose actuellement. Les transits eux s'appliquent lorsque l'orbite de l'exoplanète est inclinée de 90 degrés par rapport à l'observateur. C'est cette propriété qui fait que l'on observe une très légère baisse de luminosité lorsque la planète passe devant son étoile. On retrouve d'autres méthodes de détection des exoplanètes telles que l'astrométrie ou l'effet microlentilles gravitationnelles, mais on étudiera la méthode des vitesses radiales au cours de ce projet.

4.2 Détail du calcul de la résolution du problème à deux corps.

Soient M_1 l'étoile et M_2 la planète de masses m_1 et m_2 , en mouvement dans le référentiel galiléen R_0 muni du repère d'espace $(0, u_x, u_y, u_z)$. Nous ne considérons que les champs d'attraction gravitationnelle des masses et donc $\vec{F}_{ext} = \vec{0}$.

Soit R^* le référentiel barycentrique muni de $(0, u_x, u_y, u_z)$ centré sur le centre d'inertie G .

On pose $r\vec{u}_r = M_1\vec{M}_2$ Donc $r\vec{u}_r = G\vec{M}_2 - G\vec{M}_1$ et ainsi :

$$G\vec{M}_1 = -\frac{m_2}{m_1+m_2}r\vec{u}_r \text{ et } G\vec{M}_2 = -\frac{m_1}{m_1+m_2}r\vec{u}_r$$

On pose $G\vec{M} = r\vec{u}_r$ et $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$ la masse réduite de M , le point fictif permettant d'interpréter le mouvement des deux corps.

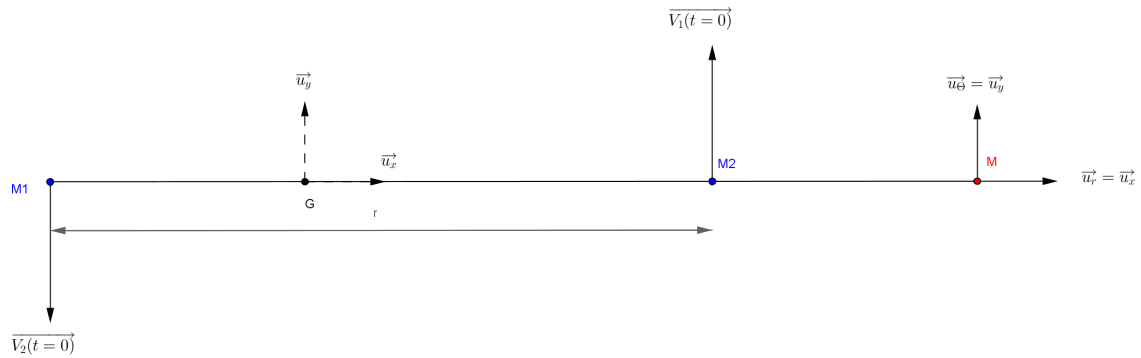


FIGURE 4.1 – Conditions initiales à $t = 0$

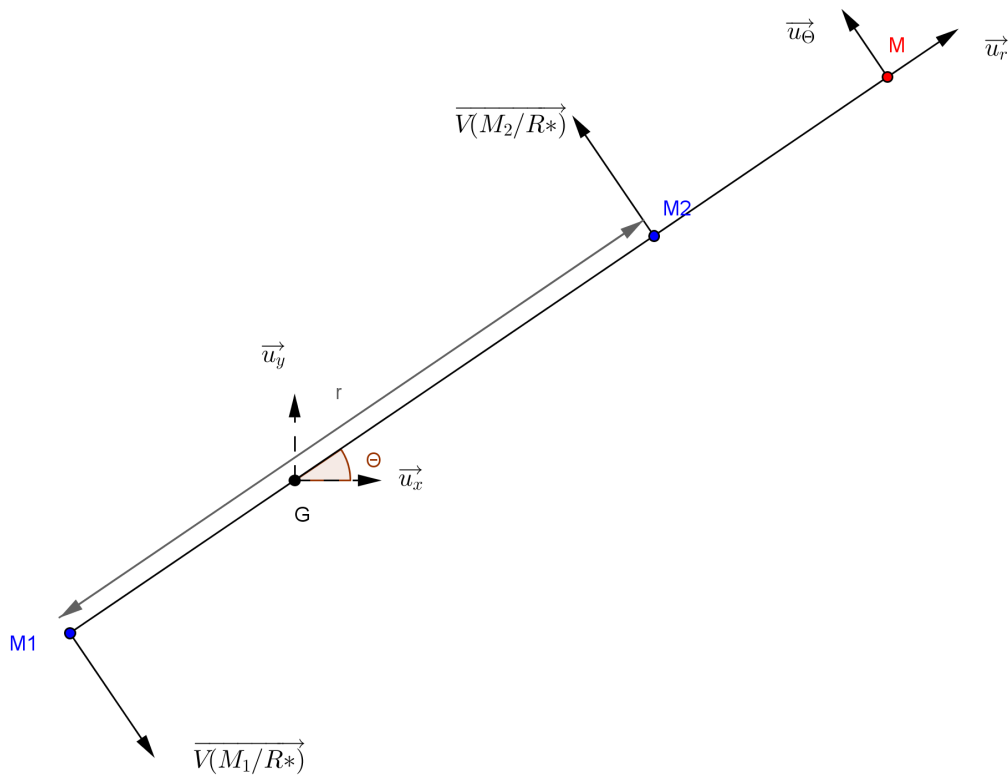


FIGURE 4.2 – Conditions initiales à un instant t

On applique le théorème du centre de masse : $M \frac{d\overrightarrow{V(G/R_0)}}{dt} = \overrightarrow{F_{ext}} = \overrightarrow{0}$. Ce qui montre que le centre de masse se déplace en translation rectiligne uniforme par rapport au référentiel galiléen. Nous pouvons donc considérer le référentiel R^* galiléen.

D'après le théorème du moment cinétique :

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_G(M)}{dt} &= M_G(\overrightarrow{F_{1 \rightarrow 2}}) \\ &= \overrightarrow{GM} \wedge \overrightarrow{F_{1 \rightarrow 2}} \quad \text{car colinéaires. Donc :} \\ &= \overrightarrow{0} \\ \overrightarrow{\sigma_G(M)} &= \overrightarrow{GM} \wedge \mu \overrightarrow{V(M/R^*)} \\ &= \mu \overrightarrow{GM} \wedge \overrightarrow{V} \quad \text{avec } \overrightarrow{C} = \overrightarrow{cte}. \\ &= \mu \overrightarrow{C} \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \overrightarrow{GM} \wedge \overrightarrow{V} = \overrightarrow{C} \Leftrightarrow r \overrightarrow{u}_r \wedge (\dot{r} \overrightarrow{u}_r + r \dot{\theta} \overrightarrow{u}_\theta) = \overrightarrow{C} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} r & \\ 0 & \dot{r} \\ 0 & r \dot{\theta} \end{vmatrix} = \overrightarrow{C}$$

$$\overrightarrow{GM} \wedge \overrightarrow{V} = \overrightarrow{C} \Leftrightarrow r \overrightarrow{u}_r \wedge (\dot{r} \overrightarrow{u}_r + r \dot{\theta} \overrightarrow{u}_\theta) = \overrightarrow{C} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} r & \\ 0 & \dot{r} \\ 0 & r \dot{\theta} \end{vmatrix} = \overrightarrow{C} \Leftrightarrow r^2 \dot{\theta} \overrightarrow{u}_z = \overrightarrow{C} \Leftrightarrow r^2 \dot{\theta} = C$$

$$\text{Nous appliquons le PFD et nous obtenons : } a(M/R^*) = \left. \frac{d^2 \overrightarrow{GM}}{dt^2} \right|_{R^*} = \overrightarrow{F_{1 \rightarrow 2}} \times \frac{1}{\mu} \quad (1)$$

Nous utilisons maintenant la formule de Binet relative à l'accélération : $a(M/R^*) = -C^2 u^2 \left(\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u \right) \overrightarrow{u}_r$ avec $u = \frac{1}{r}$.

Or $\overrightarrow{F_{1 \rightarrow 2}} = -Gm_1 m_2 u^2 \overrightarrow{u}_r$ donc (1) devient : $-C^2 u^2 \left(\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u \right) = -\frac{Gm_1 m_2}{\mu} u^2 \quad (2) \Leftrightarrow \frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = \frac{Gm_1 m_2}{C^2 \mu}$

$u = \frac{1+e \cos(\theta)}{p}$ est solution de l'équation.

$$-\frac{e \cos \theta}{p} + \frac{1+e \cos \theta}{p} = \frac{Gm_1 m_2}{C^2 \mu}$$

Donc $p = \frac{C^2 \mu}{Gm_1 m_2}$ et ainsi l'expression de u vérifie (2).

4.2.1 Détermination de C

À $t = 0$: $\overrightarrow{GM} = L \overrightarrow{u}_x$ (où L est la distance r entre M_1 et M_2 à l'instant $t = 0$).

$\overrightarrow{V(M/R^*)} = V_0 \overrightarrow{u}_y$ (où V_0 est la vitesse initiale de l'objet M . On déterminera V_0 en fonction des conditions initiales sur M_1 et M_2 par la suite).

$$\overrightarrow{\sigma_G(M)} = \begin{vmatrix} L & \\ 0 & \mu V_0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = \mu V_0 L \overrightarrow{u}_z = \mu C \overrightarrow{u}_z. \text{ Donc :}$$

$$C = V_0 L$$

4.2.2 Détermination de e

Energie mécanique :

$$\begin{aligned} E_m(M) &= E_c(M) + E_{pp}(M) \\ &= \frac{1}{2} \mu V(M/R^*)^2 + E_{pp}(M) \end{aligned}$$

Force gravitationnel de M_1 sur M_2 :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{F_{1 \rightarrow 2}} &= -\overrightarrow{\text{grad}}(E_{pp}(M)) \\ &= -\frac{\partial E_{pp}}{\partial r} \overrightarrow{u}_r \end{aligned}$$

Donc $E_m(M) = \frac{1}{2} \mu V(M/R^*)^2 - Gm_1 m_2 = \text{cte}$ car la force centrale entraîne la conservation de l'énergie mécanique.

$$E_m = E_m(t=0) = \frac{1}{2}\mu V_0^2 - \frac{Gm_1m_2}{L}$$

D'après Binet : $V^2 = C^2(u^2 + (\frac{du}{d\theta})^2)$ avec $u = \frac{1}{r}$

Donc : (voir la démonstration en annexe)

$$e = \sqrt{\frac{L^2V_0^4}{G^2(m_1+m_2)^2} - \frac{2V_0^2L}{G(m_1+m_2)}} + 1$$

Pour que la trajectoire soit une ellipse, $e < 1$.

$$\text{Donc } \frac{L^2V_0^4}{G^2(m_1+m_2)^2} < \frac{2V_0^2L}{G(m_1+m_2)}$$

Soit

$$\frac{V_0^2L}{G(m_1+m_2)} < 2$$

4.2.3 Détermination de V_0

$$\text{On a } \overrightarrow{GM_1} = -\frac{\mu}{m_1}\overrightarrow{GM}$$

$$\Leftrightarrow \left. \frac{d\overrightarrow{GM_1}}{dt} \right|_{R^*} = -\frac{\mu}{m_1} \left. \frac{d\overrightarrow{GM}}{dt} \right|_{R^*}$$

$$\Leftrightarrow V(M_1/R^*) = -\frac{\mu}{m_1}V(M/R^*)$$

$\Leftrightarrow V_1 = -\frac{\mu}{m_1}V_0$ où V_1 est la vitesse initiale de M_1 à $t=0$. On aurait pu utiliser M_2 , car les vitesses initiales des deux corps sont liées.

Ainsi :

$$V_0 = -\frac{m_1}{\mu}V_1$$

La condition pour une trajectoire elliptique devient :

$$\frac{L \times m_1^2 \times V_1^2}{G\mu^2(m_1+m_2)} < 2$$

$$\frac{LV_1^2(m_1+m_2)}{m_2^2G} < 2$$

4.2.4 Retour à un problème à deux corps

M , M_1 et M_2 ont la même excentricité :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{GM_1} &= -\frac{\mu}{m_1}r\overrightarrow{u_r} = -\frac{\mu}{m_1} \times \frac{p}{1+e\cos\theta}\overrightarrow{u_r} \\ \overrightarrow{GM_2} &= -\frac{\mu}{m_2} \times \frac{p}{1+e\cos\theta}\overrightarrow{u_r} \\ &= \frac{m_1m_2}{m_2(m_1+m_2)} \times \frac{V_0^2L^2m_1m_2}{(m_1+m_2)Gm_1m_2} \times \frac{1}{1+e\cos\theta}\overrightarrow{u_r} \\ &= \underbrace{\frac{V_0^2L^2}{G} \times \frac{m_1}{(m_1+m_2)^2}}_{p_2} \times \frac{1}{1+e\cos\theta}\overrightarrow{u_r} \end{aligned}$$

$$\text{De même, } p_1 = \frac{V_0^2L^2}{G} \times \frac{m_2}{(m_1+m_2)^2} (\overrightarrow{GM_1} \text{ porté par } -\overrightarrow{u_x})$$

4.3 Calcul de la période du problème à 2 corps et application

Le but de cette partie est de déterminer la période des 2 corps en interaction qui décrivent des mouvements elliptiques. Comme à chaque instant, $\overrightarrow{GM} = \overrightarrow{M_1M_2}$, la période du

mouvement de M est la même que celle de M_1 et M_2 . Il est intéressant de remarquer que la période de nos deux corps sera la même dans tous les cas elliptiques. Nous allons redémontrer la 3e loi de Kepler que nous appliquerons au point fictif M. En effet, cette loi est en général appliquée pour un corps décrivant une ellipse autour d'une étoile fixe, comme le Soleil. Nous ne pouvons donc pas prédire si elle était applicable dans le cas particulier de 2 corps en mouvement. Nous partons du fait que M, de masse $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ est soumis à une force centrale dirigée vers G, centre de masse du système. G est immobile ou en mouvement rectiligne uniforme puisque le système n'est pas soumis à des forces extérieures, on peut donc appliquer la deuxième loi de Kepler pour M, sous la forme :

$$\frac{dA}{dt} = \frac{C}{2}$$

Avec C la constante des aires précédemment calculée en fonction des données initiales du problème et dA l'aire balayée par l'ellipse pendant une durée dt.

On intègre :

$$\int_0^S dA = \int_0^T \frac{C}{2} dt$$

avec S la surface de l'ellipse et T la période du mouvement de M.

Donc :

$$\pi ab = \frac{C}{2} T \quad (4.1)$$

avec a le demi grand axe de l'ellipse décrite par M et b le demi petit axe. On peut montrer que l'aire d'une ellipse est égale à πab .

Or $2a = r_{min} + r_{max} = \frac{p}{1+e} + \frac{p}{1-e} = \frac{2p}{1-e^2}$ et $b = \sqrt{ap}$. (1) devient donc :

$$\pi a \sqrt{ap} = \frac{C}{2} T$$

$$\iff \pi^2 a^3 p = \frac{C^2}{4} T^2$$

$$\iff \frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2 p}{C^2}$$

$$\text{Or } \frac{p}{C^2} = \frac{C^2 \mu}{C^2 G m_1 m_2} = \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2) G m_1 m_2} = \frac{1}{G(m_1 + m_2)}$$

Finalement :

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G(m_1 + m_2)} = k$$

La troisième loi de Kepler est donc bien valide dans notre cas. L'amplitude 'a' du point fictif M est calculable en fonction des données du problème (voir annexe). On obtient $a_M =$

$$\frac{LG(m_1 + m_2)}{2G(m_1 + m_2) - LV_0^2}$$

Nous pouvons donc déterminer la période en fonction des conditions initiales et des masses des 2 corps.

4.4 Application à la détection d'exoplanètes

Nous avons vu que nous pouvons relier l'amplitude d'un mouvement orbital elliptique aux données du problème et la période peut donc être déterminée de la même manière. Quand une planète massive est en interaction avec une étoile, cette dernière effectue un léger mouvement elliptique dans un plan. La planète effectue une orbite plus grande dans

le même plan. Si un observateur terrestre se situe dans ce plan (cas très rare), il observera une légère baisse de la luminosité à intervalles périodiques, lorsque la planète passe devant l'étoile. Cette période est exactement celle du mouvement de la planète. Grâce à la troisième loi de Kepler, connaissant par exemple la masse de l'étoile, il pourra déterminer la masse de la planète puis déterminer l'amplitude de son mouvement. Cependant, dans la majeure partie des cas, nous ne sommes pas dans l'axe des mouvements orbitaux. Si nous observons une étoile effectuant un léger mouvement périodique, cela signifie qu'une exoplanète massive gravite autour d'elle. En mesurant sa période ou son amplitude si notre angle le permet, nous pouvons déterminer de même la masse de la planète ou les paramètres de sa trajectoire. Par exemple, si l'on mesure son amplitude, on peut déterminer sa masse (avec la formule en annexe sur l'amplitude) et en revenant à la loi de Kepler, calculer sa période. Nous pouvons donc reconstituer, avec suffisamment d'informations, la trajectoire d'une planète que l'on ne voit même pas !

Chapitre 5

Problème à trois corps

5.1 Résolution

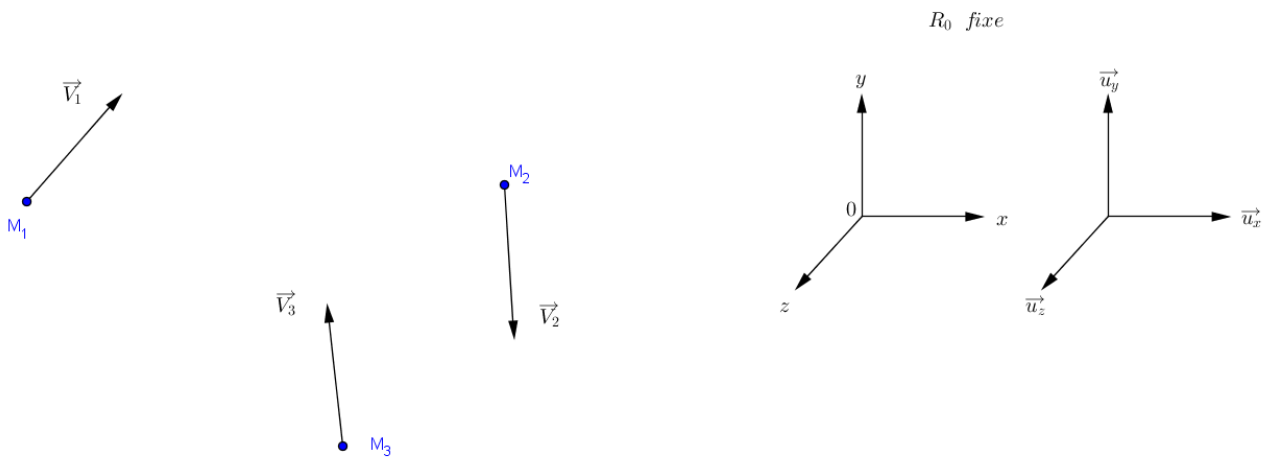


FIGURE 5.1 – Problème à trois corps

5.1.1 Application du principe fondamental de la dynamique

$$1. \overrightarrow{m_1 a(M_1/R_0)} = \frac{Gm_1m_2}{(M_1M_2)^3} \times \overrightarrow{M_1M_2} + \frac{Gm_1m_3}{(M_1M_3)^3} \overrightarrow{M_1M_3}$$

$$2. \overrightarrow{m_2 a(M_2/R_0)} = \frac{Gm_1m_2}{(M_2M_1)^3} \times \overrightarrow{M_2M_1} + \frac{Gm_2m_3}{(M_2M_3)^3} \overrightarrow{M_2M_3}$$

$$3. \overrightarrow{m_3 a(M_3/R_0)} = \frac{Gm_1m_3}{(M_3M_1)^3} \times \overrightarrow{M_3M_1} + \frac{Gm_3m_2}{(M_3M_2)^3} \overrightarrow{M_3M_2}$$

$$\overrightarrow{a(M_1/R_0)} = \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{y}_1 \\ \ddot{z}_1 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{M_1M_2} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix} \quad M_1M_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

5.1.2 PFD sur M_1

Projeté sur \vec{u}_x

$$\ddot{x}_1 = \frac{Gm_2(x_2 - x_1)}{[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2]^{\frac{3}{2}}} + \frac{Gm_3(x_3 - x_1)}{[(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2 + (z_3 - z_1)^2]^{\frac{3}{2}}}$$

Projeté sur \vec{u}_y

$$\ddot{y}_1 = \frac{Gm_2(y_2 - y_1)}{[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2]^{\frac{3}{2}}} + \frac{Gm_3(y_3 - y_1)}{[(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2 + (z_3 - z_1)^2]^{\frac{3}{2}}}$$

Les autres équations sont disponibles en annexe.

On remarque que ces équations font d'une part intervenir les 9 fonctions coordonnées des 3 corps et sont d'autre part non linéaires. Il est donc impossible de les résoudre analytiquement, c'est pour cela que nous avons utilisé Scilab en tant que solveur d'équations différentielles.

5.2 Modélisation

Voici la modélisation du problème à 3 corps avec un corps très massif (au centre de l'aire de l'intersection des deux ellipses) et deux corps plus légers de masses identiques. La trajectoire du corps massif est invisible car celui ne bouge que très peu. Les deux autres (qui pourraient être des planètes) décrivent des ellipses bien dessinées. Le mouvement est bien périodique mais étant donné que le corps central se déplace légèrement, la stabilité à long terme est difficile à prévoir.

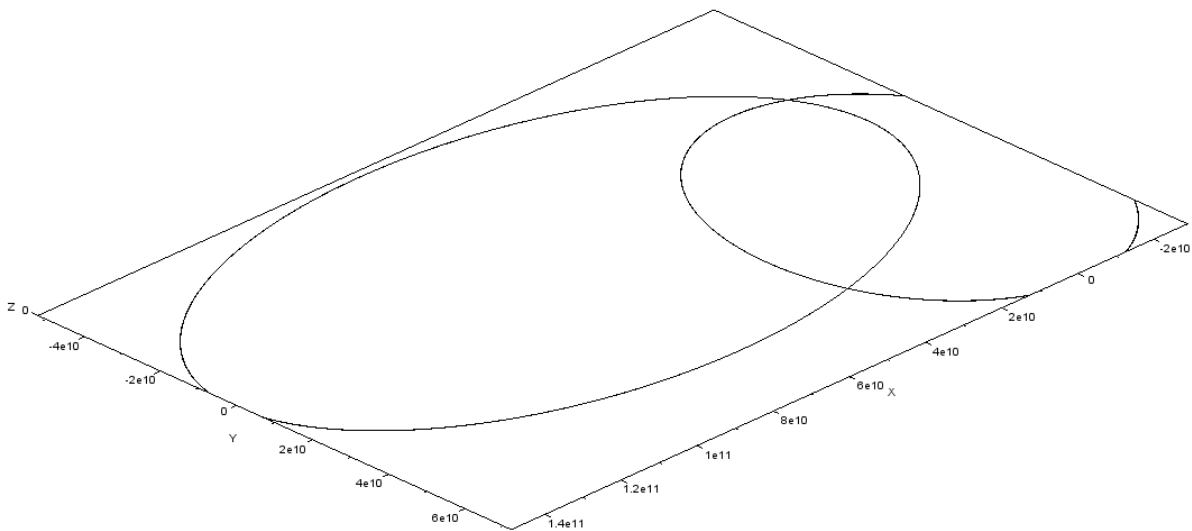


FIGURE 5.2 – Modélisation des trois corps

Le problème à 3 corps est intéressant à étudier puisqu'il semble très simple d'abord : 3 corps sont uniquement soumis à leurs attractions gravitationnelles réciproques dans le vide interstellaire. Cependant, en appliquant le PFD à ces 3 corps, on obtient des équations différentielles relatives à leurs coordonnées dans un repère cartésien qui sont non linéaires. Nous ne pouvons pas résoudre ces équations analytiquement, nous avons dû les traiter avec une méthode numérique par l'intermédiaire de Scilab. On remarque alors que la définition des paramètres initiaux (vitesses et positions de chaque corps) et des masses permet d'obtenir des systèmes complètement différents, stables ou non.

Conclusion et perspectives

— Conclusions sur le travail réalisé

Lors de ce projet, nous avons appris comment on pouvait modifier la trajectoire d'un corps grâce à la méthode des frondes gravitationnelles, mais aussi comment les physiciens détectaient la présence d'exoplanètes dans la galaxie. Nous avons grâce à cela pu réaliser des simulations de la trajectoire des corps dans l'espace. Ce projet nous a permis d'apprendre à travailler en groupe avec des personnes que nous ne connaissions pas auparavant ainsi que d'atteindre des objectifs que nous nous sommes fixés au fur et à mesure du semestre. Nous n'avons pas fait face à des difficultés concernant l'organisation du travail, car chaque membre du groupe s'informait de son côté toutes les semaines pour apporter des éléments à notre projet ; mais lors de la résolution de certaines équations, surtout concernant les exoplanètes. Bien que nous travaillions en deux sous groupes, nous avons su mettre nos compétences en commun afin de faire face à ces difficultés. Nous tenons à remercier M. YON qui nous a guidé tout au long de ce projet afin que nous puissions atteindre nos objectifs.

— Conclusions sur l'apport personnel de cette E.C. projet

★ Rachel BLIN

Ce projet a pour moi été l'occasion de continuer la physique dans mon parcours à l'INSA sachant que ce semestre j'ai pris les thématiques ASI-GM. J'ai ainsi eu l'occasion de découvrir une autre facette de la mécanique, surtout ses applications plus concrètes, car en cycle 1 nous avons essentiellement étudié des cas très théoriques. Au-delà de son contenu, ce projet m'a aussi permis de découvrir un autre aspect du travail de groupe. En effet, j'ai beaucoup apprécié le fait de travailler avec des personnes que je ne connaissais pas auparavant pour le plupart. De plus, ce projet s'est bien déroulé tout le long de ce semestre car les membres de l'équipe étaient tous investis et dévoués au bon fonctionnement de ce projet. Je tiens aussi à remercier particulièrement M. YON qui nous a accompagné tout au long de ce projet et qui était intéressé par le travail que nous faisons et toujours là pour nous remettre sur le bon chemin si nous avions du mal avec les calculs. Même si je ne compte pas travailler dans le domaine de la mécanique plus tard, ce projet m'a appris à affectionner cette discipline tout en l'appliquant à un domaine que j'aime : l'informatique pour la modélisation.

★ Médéric DOUSSELIN

En travaillant sur ce projet, j'ai pu acquérir de nombreuses connaissances en mécanique et plus généralement en physique. J'ai aussi pu découvrir et apprendre à utiliser Scilab, ce qui me sera utile à l'avenir. Ce projet m'a beaucoup intéressé, de part ses résolutions complexes et ses nombreuses applications. J'ai l'impression d'avoir pu réaliser quelque chose de concret. Étant donné mon choix de partir vers

les maths, ce projet m'a permis de terminer la physique sur un bon sentiment. En ce qui concerne le travail de groupe, je pense que j'ai vraiment compris les enjeux de l'organisation et de l'entente pour réaliser un tel projet, nous n'avons pas eu de difficultés à ce niveau et j'espère avoir autant de chances dans mes futurs projets.

★ Maxime JUMELLE

Durant ces quatre derniers mois, travailler sur ce projet m'a appris à mieux m'organiser et à planifier les tâches à effectuer. J'ai notamment apprécié le projet lorsqu'il a fallu explorer les méthodes de détection d'exoplanètes, mais également lors du développement des simulations, qui permet de confirmer nos résultats. Tout ceci a été bien évidemment possible grâce à l'aide de Mr. YON qui nous a conseillé et guidé tout au long du projet. Bien que, plus tard, ma formation ne soit pas liée avec la mécanique, je reste tout de même satisfait d'avoir participé à ce projet et surtout d'avoir appris de nouvelles choses intéressantes sur la mécanique céleste.

★ Savinien PERTANT

Ce projet a été l'occasion d'approfondir nos connaissances en mécanique du point et surtout d'appliquer ce que l'on avait appris au cas des trajectoires orbitales. J'ai trouvé le domaine de la mécanique spatiale intéressant car à partir de la simple force d'attraction, nous obtenons des problèmes qui sont assez techniques à résoudre. Les résultats ont été concrets et visuels et leurs applications dans le domaine de l'aérospatiale ont été instructives. Ce projet m'a aussi confirmé que le travail en groupe n'est pas évident tant au niveau de la répartition des tâches que de la communication. Il nous a néanmoins apporté de grandes satisfactions lorsque nous aboutissions à des résultats par nous-mêmes après des difficultés.

★ Colette PONCHEL

Ce projet m'a apporté un complément que je trouve assez important au sein de mon premier cycle à l'INSA. J'ai eu la chance de percevoir un aspect différent du travail de groupe dans chacun des projets que nous avons eu au troisième et au quatrième semestre. Pour la troisième fois après le Projet Maths et l'ADM, je me suis retrouvée dans un groupe de six personnes, mais l'organisation était totalement différente car cette fois-ci je n'ai pas remarqué de « hiérarchie » au sein du groupe. Il est vrai que la participation de chacun a été différente et que certains ont été des appuis clefs grâce à leurs capacités de compréhension et/ou leur investissement. Mais nous n'avons pas décidé d'un responsable et nous nous sommes organisés par rapport aux compétences de chacun. Je pense que le fait que nous ne nous connaissions pas tous a beaucoup joué, et j'ai conscience d'avoir eu la chance de réaliser ce projet avec des personnes sérieuses et investies. Le fait d'avoir été encadrés et encouragés par M. Yon a aussi été très bénéfique notamment pour garder nos objectifs à l'esprit. C'est donc une bonne expérience sociale en plus d'un apport de connaissances assez complet, personnellement j'ai développé un plus grand intérêt pour le « fonctionnement » de l'univers.

★ Noël ZABLOCKI

Ce projet a été constructif et intéressant, et ce pour 3 raisons : D'abord, il nous a permis d'approfondir nos connaissances théoriques sur le sujet, en nous donnant un bagage de culture générale. Ensuite, nous avons été obligés de travailler en équipe. Cela signifie énormément de choses : répartition des rôles, obligation de délais en cas d'interdépendances... Cet aspect sera probablement une grande part de notre vie d'ingénieurs. Enfin, un projet physique est toujours un certain challenge. La recherche de solutions aux nombreux problèmes qui se sont posés a été très enrichissante.

— Perspectives pour la poursuite de ce projet

En termes de perspectives, il nous paraît raisonnable de continuer de nous informer chacun de notre côté dans ce domaine. Nous ne pourrons très certainement pas développer ce projet par la suite étant donné les directions que vont prendre nos études, mais l'intérêt que nous avons eu pour les différentes simulations nous permettra très certainement par la suite d'approfondir nos connaissances, que ce soit en physique ou en informatique. Aussi, nous ne pouvons négliger l'idée de voir un autre groupe travailler sur ce projet l'année prochaine, que ce soit en reprenant nos recherches ou en développant des cas différents.

Bibliographie

- [1] JÉRÔME YON, *Systèmes de 2 points matériels*.
- [2] <https://media4.obspm.fr/exoplanetes/> (Valide à la date du 11/06/15)
- [3] <http://fr.wikipedia.org/wiki/Exoplanète/> (Valide à la date du 11/06/15)
- [4] http://fr.wikipedia.org/wiki/Assistance_gravitationnelle (Valide à la date du 11/06/15)
- [5] <http://www.le-saviez-vous.fr/2010/08/la-fronde-gravitationnelle.html> (Valide à la date du 11/06/15)
- [6] <http://rouxph.blogspot.fr/2012/10/une-solution-exacte-du-probleme-trois.html> (Valide à la date du 10/06/15)

Annexe A

Documentation technique

A.1 Détail du calcul de la trajectoire en fonction de l'énergie mécanique d'un système.

On sait que :

$$\vec{f}_{12} = -\overrightarrow{\text{grad}}E_p(r) = -\frac{dE_p}{dr}\vec{u}_{12}$$

Or l'énergie potentielle d'interaction est :

$$\begin{aligned}E_p(r) &= \frac{k}{r} \\ \vec{f}_{21} &= -\frac{dE_p}{dr}\vec{u}_r = -\frac{k}{r^2}\vec{u}_r = -\left(\frac{-k}{r^2}\right)\vec{u}_r \\ \vec{f}_{21} &= \frac{k}{r^2}\vec{u}_r\end{aligned}$$

Si $k < 0$: la force est attractive.

Si $k > 0$: la force est répulsive.

Or on a aussi :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM} &= r\vec{u}_r \\ \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} &= \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta \\ \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} &= (\ddot{r} - \dot{r}\dot{\theta}^2)\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta})\vec{u}_\theta\end{aligned}$$

De plus on a :

$$\begin{aligned}dE_p &= -\vec{f}_{12}d\overrightarrow{OM}_1 - \vec{f}_{21}d\overrightarrow{OM}_2 \\ dE_p &= -m_1\frac{d\vec{v}_1}{dt}d\overrightarrow{OM}_1 - m_2\frac{d\vec{v}_2}{dt}d\overrightarrow{OM}_2 \\ dE_p &= -m_1\vec{v}_1d\vec{v}_1 - m_2\vec{v}_2d\vec{v}_2 \\ dE_p &= -d\left(\frac{1}{2}m_1(v_1)^2\right) - d\left(\frac{1}{2}m_2(v_2)^2\right)\end{aligned}$$

On a donc :

$$\begin{aligned}dE_p + d\left(\frac{1}{2}m_1(v_1)^2\right) + d\left(\frac{1}{2}m_2(v_2)^2\right) &= 0 \\ \iff d\left(E_p + \frac{1}{2}m_1(v_1)^2 + \frac{1}{2}m_2(v_2)^2\right) &= 0 \\ \iff E_p + \frac{1}{2}m_1(v_1)^2 + \frac{1}{2}m_2(v_2)^2 &= cte = Em\end{aligned}$$

On définit le barycentre suivant :

$$m_1 \overrightarrow{GM_1} + m_2 \overrightarrow{GM_2} = 0$$

On pose $\overrightarrow{M_1M_2} = \vec{r} = r\vec{u}_{12}$
 $\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{M_1G} + \overrightarrow{GM_2} = \frac{m_1+m_2}{m_1} \overrightarrow{GM_2}$ (1)

Or :

$$\begin{cases} m_1 \frac{d^2 \overrightarrow{OM_1}}{dt^2} = \vec{f}_{12} \\ m_2 \frac{d^2 \overrightarrow{OM_2}}{dt^2} = \vec{f}_{21} \end{cases}$$

$$\iff \frac{d^2}{dt^2} (m_1 \overrightarrow{OM_1} + m_2 \overrightarrow{OM_2}) = \vec{f}_{12} + \vec{f}_{21}$$

$$\iff (m_1 + m_2) \frac{d^2 \overrightarrow{OG}}{dt^2} = 0$$

En reprenant la relation (1), on a :

$$\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \frac{d^2 \overrightarrow{M_1M_2}}{dt^2} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{f}_{21}$$

On pose $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$, la masse réduite.

Si $m_2 \ll m_1$, $\mu \rightarrow m_2$, $G \rightarrow M_1$

On a trouvé précédemment que :

$$Em = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + Ep(r)$$

$$Em = \frac{1}{2} m_1 \left(\frac{d\overrightarrow{GM_1}}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(\frac{d\overrightarrow{GM_2}}{dt} \right)^2 + Ep(r) \quad (2)$$

On introduit $\overrightarrow{GM_1} = \frac{m_2}{m_1+m_2} \overleftarrow{r}$ et $\overrightarrow{GM_2} = \frac{m_1}{m_1+m_2} \overleftarrow{r}$

En remplaçant dans (2) on obtient :

$$Em = \frac{1}{2} \mu \left(\frac{d\overleftarrow{r}}{dt} \right)^2 + Ep(r)$$

L'énergie mécanique peut être calculée à partir d'un seul mobile fictif de masse réduite m :

$$\overrightarrow{\sigma_G} = d\overrightarrow{GM_1} \wedge m_1 \frac{d\overrightarrow{GM_1}}{dt} + d\overrightarrow{GM_2} \wedge m_2 \frac{d\overrightarrow{GM_2}}{dt}$$

$$\overrightarrow{\sigma_G} = \frac{m_2}{m_1+m_2} \overleftarrow{r} \wedge \frac{m_2}{m_1+m_2} \frac{d\overleftarrow{r}}{dt} + \frac{m_1}{m_1+m_2} \overleftarrow{r} \wedge \frac{m_1}{m_1+m_2} \frac{d\overleftarrow{r}}{dt}$$

$$\overrightarrow{\sigma_G} = \overleftarrow{r} \wedge \mu \frac{d\overleftarrow{r}}{dt}$$

$$\frac{d\overrightarrow{\sigma_G}}{dt} = d \left(\overleftarrow{r} \wedge \frac{d\overleftarrow{r}}{dt} \right)$$

$$\frac{d\overrightarrow{\sigma_G}}{dt} = \overleftarrow{r} \wedge \mu \frac{d^2 \overleftarrow{r}}{dt^2}$$

$$\frac{d\overrightarrow{\sigma_G}}{dt} = \overleftarrow{r} \wedge \vec{f}_{21}$$

$$\frac{d\overrightarrow{\sigma_G}}{dt} = \overleftarrow{r} \wedge (-) \frac{d\overleftarrow{U_r}}{dr}$$

$$\frac{d\overrightarrow{\sigma_G}}{dt} = \vec{0}$$

On pose $\overrightarrow{\sigma_G} = \overrightarrow{\sigma_o} = c\vec{t}\vec{e}$

$$\overrightarrow{\sigma_G} = r\vec{u}_r \wedge \mu(r\dot{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta) = \mu r^2 \dot{\theta} \vec{k} = c\vec{t}\vec{e} = \overrightarrow{\sigma_o} = \sigma_o \vec{k}$$

Or d'après la loi des aires : $\sigma_o = \mu r^2 \dot{\theta}$

$$Em = Ec + Ep = \frac{1}{2\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + Ep}$$

$$Em = \frac{\sigma_o^2}{2\mu} \left(\left(\frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{r} \right) \right)^2 + \frac{1}{r^2} \right) + Ep = cte$$

En dérivant on obtient :

$$\frac{\sigma_o^2}{\mu} \left(\frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r^3} \frac{dt}{d\theta} \right) + \frac{dEp}{dr} \frac{dr}{d\theta} \right) = \frac{\sigma_o^2}{\mu} \left(\frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} \right) \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{r} \right) - r^2 \frac{dEp}{dr} \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{r} \right) = 0$$

On obtient donc l'équation différentielle :

$$\frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} = \frac{\mu r^2}{\sigma_o^2} \frac{dEp}{dr} \quad (3)$$

$$\mu \vec{a} = \mu(\ddot{r} - \dot{r}\theta^2) \vec{u}_r + \frac{\mu}{r} \frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) \vec{u}_\theta = \vec{f}_{21} = -\frac{dEp}{dr} \vec{u}_r$$

On obtient donc :

$$\begin{cases} \mu(\ddot{r} - \dot{r}\theta^2) = -\frac{dEp}{dr} \\ \frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = 0 \end{cases}$$

(car $r^2\dot{\theta} = cte = \frac{\sigma_o}{\mu}$)

D'où :

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{\sigma_o}{\mu} \frac{1}{r} \frac{dr}{d\theta} = -\frac{\sigma_o}{\mu} \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{r} \right)$$

$$\ddot{r} = \frac{d\dot{r}}{dt} = \frac{d}{d\theta} \left(-\frac{\sigma_o}{\mu} \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{r} \right) \right) \frac{d\theta}{dt} = -\frac{\sigma_o^2}{\mu} \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{r} \right)$$

$$\text{Donc } \mu(\ddot{r} - \dot{r}\theta^2) = -\frac{\sigma_o^2}{\mu} \frac{1}{r^2} \left(\frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} \right) = -\frac{dEp}{dr}$$

On retrouve l'équation différentielle du mouvement :

$$\frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} = \frac{\mu r^2}{\sigma_o^2} \frac{dEp}{dr}$$

$$\vec{f}_{21} = -\frac{dEp}{dr} \vec{u}_r = \frac{k}{r^2} \vec{u}_r$$

$$\frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} = -\frac{\mu k}{\sigma_o^2}$$

On peut donc en déduire que :

$$\frac{1}{r} = -\frac{\mu k}{\sigma_o^2} + A \cos(\theta - \theta_o)$$

En choisissant l'origine, on pose $\theta_o = 0$

On obtient donc :

$$-\frac{\mu k}{\sigma_o^2} = \pm \frac{1}{p} \text{ et } A = \frac{e}{p}$$

Si $k < 0$: $-\frac{\mu k}{\sigma_o^2} = \frac{1}{p}$ et $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{e}{p} \cos(\theta)$, ce qui donne un conique de foyer F qui peut être une ellipse, une parabole ou une hyperbole.

Si $k > 0$: $-\frac{\mu k}{\sigma_o^2} = -\frac{1}{p}$ et $\frac{1}{r} = -\frac{1}{p} + \frac{e}{p} \cos(\theta)$, ce qui donne une hyperbole

On obtient donc :

$$Em = Ec + Ep = \frac{\sigma_o^2}{2\mu} \left(\left(\frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{r} \right) \right)^2 + \frac{1}{r^2} \right) + \frac{k}{r} = cte$$

On s'intéresse au cas $k < 0$:

$$-\frac{\mu k}{\sigma_o^2} = \frac{1}{p} \quad (k = -\frac{\sigma_o^2}{\mu p} \text{ et } \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{e}{p} \cos(\theta))$$

On a donc :

$$Em = \frac{\sigma_o^2}{2\mu} \left(\frac{e^2}{p^2} \sin^2\theta + \frac{1}{p^2} + \frac{2e}{p^2} \cos\theta + \frac{e^2}{p^2} \cos^2\theta \right) - \frac{\sigma_o^2}{\mu} \left(\frac{1}{p^2} + \frac{e}{p^2} \cos\theta \right)$$

$$Em = \frac{\sigma_o^2}{2\mu} \frac{e^2 - 1}{p^2}$$

Lorsque $E_m < 0$, la trajectoire du corps est une ellipse, donc l'excentricité d'une ellipse est inférieure à 1.

Lorsque $E_m = 0$, la trajectoire du corps est une parabole, donc l'excentricité d'une parabole est égale à 1.

Lorsque $E_m > 0$, la trajectoire du corps est une branche d'hyperbole, donc l'excentricité d'une hyperbole est supérieure à 1.

A.2 Problème à trois corps

A.2.1 PFD sur M_1

Projeté sur \vec{u}_x

$$\ddot{x}_1 = \frac{Gm_2(x_2-x_1)}{[(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2]^{\frac{3}{2}}} + \frac{Gm_3(x_3-x_1)}{[(x_3-x_1)^2+(y_3-y_1)^2+(z_3-z_1)^2]^{\frac{3}{2}}}$$

Projeté sur \vec{u}_y

$$\ddot{y}_1 = \frac{Gm_2(y_2-y_1)}{[(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2]^{\frac{3}{2}}} + \frac{Gm_3(y_3-y_1)}{[(x_3-x_1)^2+(y_3-y_1)^2+(z_3-z_1)^2]^{\frac{3}{2}}}$$

Projeté sur \vec{u}_z

$$\ddot{z}_1 = \frac{Gm_2(z_2-z_1)}{[(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2]^{\frac{3}{2}}} + \frac{Gm_3(z_3-z_1)}{[(x_3-x_1)^2+(y_3-y_1)^2+(z_3-z_1)^2]^{\frac{3}{2}}}$$

A.2.2 PFD sur M_2

Projeté sur \vec{u}_x

$$\ddot{x}_2 = \frac{Gm_1(x_1-x_2)}{[(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2]^{\frac{3}{2}}} + \frac{Gm_3(x_3-x_2)}{[(x_3-x_2)^2+(y_3-y_2)^2+(z_3-z_2)^2]^{\frac{3}{2}}}$$

Projeté sur \vec{u}_y

$$\ddot{y}_2 = \frac{Gm_1(y_1-y_2)}{[(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2]^{\frac{3}{2}}} + \frac{Gm_3(y_3-y_2)}{[(x_3-x_2)^2+(y_3-y_2)^2+(z_3-z_2)^2]^{\frac{3}{2}}}$$

Projeté sur \vec{u}_z

$$\ddot{z}_2 = \frac{Gm_1(z_1-z_2)}{[(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2]^{\frac{3}{2}}} + \frac{Gm_3(z_3-z_2)}{[(x_3-x_2)^2+(y_3-y_2)^2+(z_3-z_2)^2]^{\frac{3}{2}}}$$

A.2.3 PFD sur M_3

Projeté sur \vec{u}_x

$$\ddot{x}_3 = \frac{Gm_1(x_1-x_3)}{[(x_3-x_1)^2+(y_3-y_1)^2+(z_3-z_1)^2]^{\frac{3}{2}}} + \frac{Gm_2(x_2-x_3)}{[(x_3-x_2)^2+(y_3-y_2)^2+(z_3-z_2)^2]^{\frac{3}{2}}}$$

Projeté sur \vec{u}_y

$$\ddot{y}_3 = \frac{Gm_1(y_1-y_3)}{[(x_3-x_1)^2+(y_3-y_1)^2+(z_3-z_1)^2]^{\frac{3}{2}}} + \frac{Gm_2(y_2-y_3)}{[(x_3-x_2)^2+(y_3-y_2)^2+(z_3-z_2)^2]^{\frac{3}{2}}}$$

Projeté sur \vec{u}_z

$$\ddot{z}_3 = \frac{Gm_1(z_1 - z_3)}{[(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2 + (z_3 - z_1)^2]^{\frac{3}{2}}} + \frac{Gm_2(z_2 - z_3)}{[(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2 + (z_3 - z_2)^2]^{\frac{3}{2}}}$$

A.3 Détermination de e pour les exoplanètes

$$\begin{aligned} E_m &= \frac{1}{2}\mu C^2 \left(u^2 + \left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 \right) - Gm_1 m_2 u = \frac{1}{2}\mu V_0^2 - \frac{Gm_1 m_2}{L} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2}\mu C^2 \left(\frac{1+2e \cos \theta + e^2 \cos^2 \theta}{p^2} + \frac{e^2 \sin^2 \theta}{p^2} \right) - \frac{Gm_1 m_2 (1+e \cos \theta)}{p} &= \frac{1}{2}\mu V_0^2 - \frac{Gm_1 m_2}{L} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2}\mu C^2 \left(\frac{1+2e \cos \theta + e^2}{p^2} \right) - \frac{Gm_1 m_2 (1+e \cos \theta)}{p} &= \frac{1}{2}\mu V_0^2 - \frac{Gm_1 m_2}{L} \\ \Leftrightarrow \frac{G^2 m_1^2 m_2^2 (1+2e \cos \theta + e^2)}{2C^2 \mu} - \frac{G^2 m_1^2 m_2^2 (1+e \cos \theta)}{C^2 \mu} &= \frac{1}{2}\mu V_0^2 - \frac{Gm_1 m_2}{L} \\ \Leftrightarrow \frac{m_1 m_2 (m_1 + m_2) G^2 (e^2 - 1)}{2C^2} &= \frac{1}{2}\mu V_0^2 - \frac{Gm_1 m_2}{L} \\ \Leftrightarrow \frac{(m_1 + m_2) G^2 (e^2 - 1)}{2C^2} &= \frac{V_0^2}{2(m_1 + m_2)} - \frac{G}{L} \\ \Leftrightarrow G^2 (m_1 m_2) (e^2 - 1) &= \frac{L^2 V_0^4}{m_1 + m_2} - 2GV_0^2 L \\ \Leftrightarrow e^2 &= \frac{L^2 V_0^4}{G^2 (m_1 + m_2)^2} - \frac{2V_0^2 L}{G(m_1 + m_2)} + 1 \end{aligned}$$

A.4 Calcul de l'amplitude a pour les exoplanètes

Calcul de l'amplitude a : $a = \frac{p}{1-e^2}$. L'amplitude qui nous intéresse est celle du corps M_1 ou M_2 . L'excentricité étant la même, il suffit d'utiliser la valeur de p correspondant au corps dont on cherche l'amplitude, que nous avons exprimée précédemment (dans la partie retour au problème à 2 corps).

$$\text{Par exemple, pour } M_1 : a_{M_1} = \frac{p_1}{1-e^2}.$$

$$1 - e^2 = \frac{2V_0^2 L}{G(m_1 + m_2)} - \frac{L^2 V_0^4}{G^2 (m_1 + m_2)^2} = \frac{LV_0^2 (2G(m_1 + m_2) - LV_0^2)}{G^2 (m_1 + m_2)^2}$$

$$\text{Donc } a_{M_1} = \frac{V_0 L^2 m_2}{G(m_1 + m_2)^2} \times \frac{1}{1-e^2} = \frac{Gm_2 L}{2G(m_1 + m_2) - LV_0^2}$$

De même, $a_{M_2} = \frac{Gm_1 L}{2G(m_1 + m_2) - LV_0^2}$ et $a_M = \frac{LG(m_1 + m_2)}{2G(m_1 + m_2) - LV_0^2}$. Il est intéressant de remarquer que l'amplitude du mouvement d'un corps est proportionnelle à la masse de l'autre corps !

A.5 Evolution de θ en fonction du temps

$$\dot{\theta}(t) = \frac{\theta(t+\Delta t) - \theta(t)}{\Delta t} = \frac{C}{[r(t)]^2} = \frac{V_0 L}{[r(t)]^2}$$

Donc :

$$\theta(t + \Delta t) = \frac{V_0 L}{[r(t)]^2} \times \Delta t + \theta(t)$$

A.6 Calcul de la vitesse pour les frondes gravitationnelles

On a $r = \frac{p}{1+e \cos(\theta)}$ et $\vec{v} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta$

$$v = \sqrt{\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2}$$

$$v = \sqrt{\dot{r}^2 + \frac{C^2}{r^2}}$$

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = p \cdot \left(\frac{e \sin(\theta)}{(1+e \cos(\theta))^2} \right) \cdot \frac{C}{r^2}$$

$$\dot{r} = \frac{1}{p} \cdot e \sin(\theta) \cdot \frac{p^2}{((1+e \cos(\theta))^2) \cdot r^2} \cdot \frac{C}{r^2}$$

$$\dot{r} = \frac{e \sin(\theta) C}{p}$$

Donc $v = \sqrt{C^2 \left(\frac{e^2 \sin^2(\theta)}{p^2} + \frac{1}{r^2} \right)}$

$$v = -C \sqrt{\frac{e^2 \sin^2(\theta)}{p^2} + \frac{1+2e \cos(\theta)+e^2 \cos^2(\theta)}{p^2}}$$

$$v = -C \sqrt{\frac{e^2+1+2e \cos(\theta)}{p^2}}$$

$$v = -\frac{C}{p} \sqrt{e^2 + 1 + 2e \cos(\theta)}$$

$$v = \frac{Gm_2}{bv_0} \sqrt{e^2 + 1 + 2e \cos(\theta)}$$

On étudie la dérivée :

$$\frac{dv}{d\theta} = \frac{Gm_2}{bv_0} \cdot \frac{-2e \sin(\theta)}{2\sqrt{e^2+1+2e \cos(\theta)}} = -\frac{Gm_2 e \sin(\theta)}{bv_0 \sqrt{e^2+1+2e \cos(\theta)}}$$

Donc la dérivée est du signe de $-\sin(\theta)$ avec $\theta \in [-\frac{\pi}{2}; \pi]$

On a donc pour $\theta \in [-\frac{\pi}{2}; 0]$ la vitesse qui est croissante et pour $\theta \in [0; \pi]$ la vitesse est maximum.

Vérifions que la sonde va plus vite à la fin qu'au début, donc que $v(-\frac{\pi}{2}) > v(\pi)$:

$$v(-\frac{\pi}{2}) = \frac{v_0 b}{p} \sqrt{e^2 + 1}$$

$$v(\pi) = \frac{v_0 b}{p} (e - 1)$$

donc $v(-\frac{\pi}{2}) > v(\pi)$ vrai car $e^2 + 1 > e^2 - 2e + 1 \iff 2e > 0$