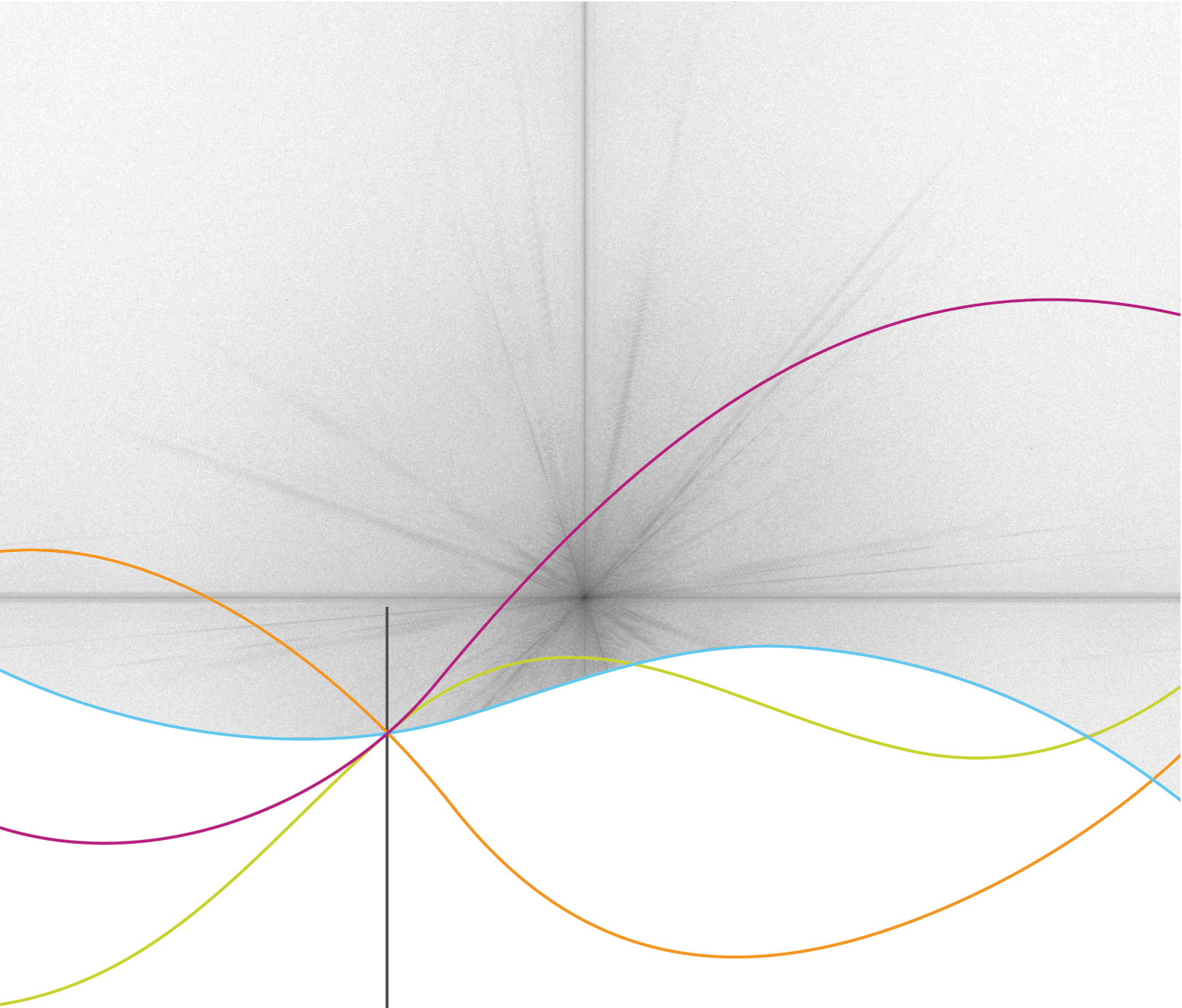


Analyse de Fourier



Enseignant responsable
Jérôme YON

Étudiants :
Anca-Georgiana
CARANFIL
Eva KOLICI

Sami BOUKORTT
Hamza EL HASSANI
Sophie LEVEUGLE

Date de remise du rapport : 18 juin 2012

Référence du projet : STPI¹/P6-3/2012

Intitulé du projet : Analyse de Fourier

Type de projet : bibliographique/expérimental

Objectifs du projet :

Appréhender la notion mathématique de série de Fourier, en étudier des exemples simples et voir quelles sont leurs applications en physique, notamment par l'étude de la résonance mécanique mais aussi par l'étude du traitement d'images.

Mots-clés du projet : Fourier, oscillations mécaniques, traitement d'images

1. INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES DE ROUEN
DÉPARTEMENT SCIENCES ET TECHNIQUES POUR L'INGÉNIEUR
BP 8 -PLACE EMILE BLONDEL- 76131 MONT-SAINT-AIGNAN - TÉL : 33 2 35 52 83 00 - FAX : 33 2 35 52 83 69

Remerciements :

Au terme de ce travail, nous souhaiterions tout d'abord remercier notre professeur encadrant, Monsieur Jérôme Yon, qui a su nous encadrer avec patience tout au long de notre travail, et répondre à nos multiples interrogations. Ses conseils nous ont beaucoup aidés durant ce projet qui, de nombreuses fois, nous a semblé difficile à réaliser.

Nous souhaiterions aussi remercier le corps enseignant pour le prêt du matériel qui nous a permis de réaliser notre expérience.

Nous exprimons également notre gratitude aux membres du jury pour leur attention lors de notre soutenance.

Table des matières

Notations	5
1. Introduction	6
2. Méthodologie, organisation du travail	7
3. Analyse de Fourier	8
3.1. Description mathématique	8
3.1.1. Série de Fourier	8
3.1.2. Transformée de Fourier	9
3.2. Applications en physique	10
3.2.1. Communications	10
3.2.2. Astronomie	10
3.2.3. Géologie	11
3.2.4. Optique	12
3.3. Application de la transformée de Fourier au traitement d'images	13
3.3.1. Notions théoriques	13
3.3.2. Compression d'images	14
3.3.3. Élimination du bruit	14
3.3.4. Reconstitution d'images	14
3.3.5. Exemple concret sur MATLAB	14
3.3.6. Les limites de la transformée de Fourier	19
3.4. TP de mécanique : oscillations et résonance	20
3.4.1. Description de l'expérience	20
3.4.2. Exploitation des mesures	22
3.4.3. Résultats	22
4. Conclusion et perspectives	26
5. Bibliographie	28
A. Listings des programmes réalisés	29

Notations et Acronymes

Acronymes :

FFT : *Fast Fourier Transform*

DFT : *Discrete Fourier Transform*

1. Introduction

Lors du quatrième semestre, nous avons effectué un projet de physique, à l'issue duquel nous avons produit le présent rapport. Nous le présenterons également oralement devant des examinateurs et d'autres élèves.

Ce projet s'inscrit bien dans l'idéologie de l'INSA qui vise à former des ingénieurs capables de s'intégrer rapidement au sein d'un groupe et disposant de capacités d'adaptation importantes.

Notre projet de physique porte sur l'analyse de Fourier et son application dans diverses expériences physiques comme la résonance mécanique ou encore le traitement de l'image. L'objectif principal consiste à appréhender de façon mathématique la notion d'analyse de Fourier et de voir à quel point cet objet peut être utile en physique.

Nos séances se sont d'abord déroulées dans une salle de projets pour la partie théorique (étude mathématique et étude d'applications physiques diverses), puis dans une salle de TP de physique pour des mesures expérimentales liées au TP de mécanique de première année sur les oscillations et la résonance.

Dans un premier temps, nous donnerons un aperçu synthétique de la notion de série de Fourier. Dans un second temps, nous présenterons plusieurs applications pratiques. Puis, nous étudierons l'analyse de Fourier appliquée au traitement d'images, en nous servant notamment du logiciel Matlab. Enfin, nous l'appliquerons au système masse-ressort étudié en P2 l'an dernier.

2. Méthodologie, organisation du travail

Ce sujet nous a été attribué après un sondage de préférence. Nous avons appris, tout d'abord, à nous connaître, puis à travailler ensemble. Cela s'est fait naturellement, au cours des séances.

Concernant l'organisation de notre travail, nous avons créé un groupe sur un réseau social afin de coopérer efficacement sur le projet. Nous nous en servions notamment pour écrire les comptes-rendus de chaque séance.

Nous avons mis un certain temps avant de bien comprendre le sujet qui nous était donné. En effet, comme dit précédemment, ce sujet repose sur de solides connaissances mathématiques de la notion d'analyse de Fourier. Nous n'étions pas familiers avec cette notion, ce qui nous a fortement ralentis.

Après plusieurs séances très théoriques, nous avons enfin pu passer à quelque chose de plus pratique mais, là encore, nous avons eu quelques problèmes avec le montage qui s'est révélé difficile à prendre en main.

Notamment, nous avons eu du mal à faire fonctionner le montage, ce qui nous a fait nous rendre compte de combien il était difficile de mettre en place un TP de mécanique fonctionnel.

Certains de nos objectifs ont du être revus à la baisse faute de temps mais, dans l'ensemble, nous avons réussi à faire ce que nous jugions important.

La figure 2.1 montre comment nous nous sommes répartis le travail.

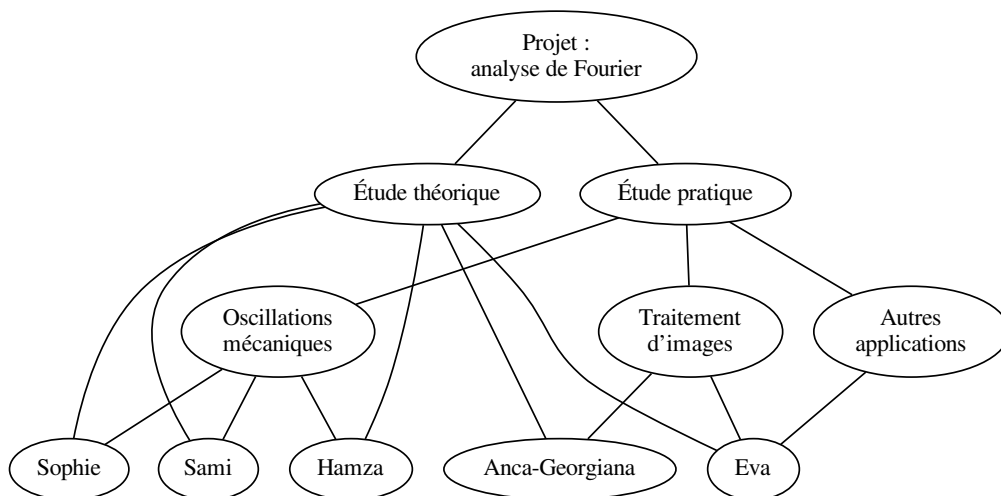


FIGURE 2.1.: répartition du travail

3. Analyse de Fourier

3.1. Description mathématique

Les études menées tout au long du lycée sur les signaux analogiques (majoritairement électriques) ont toujours été présentées en fonction du temps, et souvent obtenues par résolution d'une équation différentielle régissant le système.

Nous avons vu par la suite que l'on pouvait définir ces signaux en fonctions de la fréquence et de dégager la notion de spectre de fréquence d'un signal. Cela nous mènera donc à l'étude de série de Fourier.

3.1.1. Série de Fourier

Nous avons vu en cours de M9 que tout signal périodique suffisamment régulier peut être approché par une combinaison linéaire de sinusoides harmoniques.

Pour cela nous allons introduire deux formules générales équivalentes.

Formule réelle

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t))$$

Intéressons-nous d'abord à cette première formule.

Ici n'importe quelle fonction f peut être approximée par une combinaison de cosinus et de sinus. Il est très simple de calculer les coefficients de Fourier a_n et b_n avec la formule suivante :

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cdot \cos(n\omega t) dt$$
$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cdot \sin(n\omega t) dt$$

Faire la décomposition spectrale d'une fonction revient donc à déterminer les suites a_n et b_n tandis que restituer un signal connaissant a_n et b_n consiste à faire la synthèse spectrale des deux suites.

Formule complexe

Il existe cependant une formule plus concise, qui calcule une décomposition spectrale plus rapidement. Nous verrons dans nos exemples que la formule à coefficients réels est pratique pour les fonctions paires ou impaires.

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f) e^{i\frac{2\pi}{T}nt}$$

Avec c_n coefficient de Fourier suivant :

$$c_n(f) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-i\frac{2\pi}{T}nt} dt$$

Cette formule, plus générale, s'adapte aux fonctions complexes.

3.1.2. Transformée de Fourier

La notion de transformée de Fourier est tout simplement une généralisation de la théorie des séries de Fourier pour les fonctions non périodiques.

$$\mathcal{F}(f) : \xi \mapsto \hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-j\xi x} dx$$

Cela permettra de déterminer le spectre fréquentiel d'un signal comme nous allons le voir plus loin avec un exemple simple.

Il est intéressant de noter que la notion de transformée de Fourier inverse (opération notée \mathcal{F}^{-1}), appliquée à \hat{f} , permet (sous conditions appropriées) de retrouver f à partir des données fréquentielles.

Cette opération sera utile dans la suite du projet pour pouvoir retrouver des signaux en connaissant leur spectre fréquentiel.

Application à un exemple simple

Nous nous proposons ici de calculer la transformée de Fourier de la fonction f définie par :

$$f : t \mapsto A \cdot \sin(\omega_0 \cdot t + \varphi)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f)(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} A \cdot \sin(\omega_0 \cdot t + \varphi) \cdot e^{-j\omega t} dt \\ &= A \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2j} \cdot (e^{j\omega_0 t} \cdot e^{j\varphi} - e^{-j\omega_0 t} \cdot e^{-j\varphi}) \cdot e^{-j\omega t} dt \\ &= \frac{A}{2j} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{j(\omega_0 - \omega)t} \cdot e^{j\varphi} - e^{-j(\omega_0 + \omega)t} \cdot e^{-j\varphi}) dt \\ &= \frac{A}{2j} \cdot \left(e^{j\varphi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j(\omega_0 - \omega)t} dt - e^{-j\varphi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j(\omega_0 + \omega)t} dt \right) \\ &= \frac{A}{2j} \cdot (e^{j\varphi} \cdot \delta\{\omega_0 - \omega\} - e^{-j\varphi} \cdot \delta\{\omega_0 + \omega\}) \\ &= \begin{cases} \frac{A}{2} e^{j(\varphi - \frac{\pi}{2})} & \text{si } \omega = \omega_0 \\ \frac{A}{2} e^{-j(\varphi - \frac{\pi}{2})} & \text{si } \omega = -\omega_0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

(δ est la distribution de Dirac, qui vaut 1 si son paramètre contient 0, 0 sinon. On ne l'applique ici qu'à des singletons.)

3.2. Applications en physique

La transformée de Fourier a de nombreuses applications. En fait, n'importe quel domaine de la science physique qui utilise des signaux sinusoïdaux, comme la mécanique, l'électricité, les mathématiques appliquées, la chimie, font usage des séries de Fourier et de la transformée de Fourier.

Il serait impossible de donner des exemples de tous les domaines où la transformée de Fourier importe, mais voici quelques exemples issus de la physique, de l'ingénierie, et du traitement du signal.

3.2.1. Communications

Dans la théorie des communications, le signal est habituellement une tension, et la théorie de Fourier est essentielle pour comprendre comment se comporte un signal quand il passe à travers les filtres, les amplificateurs et les canaux de communication.

Même les communications discrètes numériques qui utilisent des 0 ou des 1 pour envoyer des informations ont encore le contenu fréquentiel. C'est peut-être plus facile à saisir dans le cas où l'on essaie d'envoyer une seule impulsion carrée dans un canal. Le domaine des communications s'étend sur une gamme d'applications de gestion de réseau de haut niveau jusqu'à envoyer des bits individuels dans un canal. La transformée de Fourier est généralement associée à ces aspects de bas niveau des communications.

3.2.2. Astronomie

La transformée de Fourier ne se limite pas à des exemples simples de laboratoire. Lorsqu'elle est utilisée dans des situations réelles, elle peut avoir de profondes implications sur le monde qui nous entoure.

Prenons par exemple le domaine de l'astronomie. Quelquefois, il n'est pas possible d'obtenir d'un télescope normal toutes les informations dont on a besoin et on doit utiliser des ondes radio ou un radar au lieu de la lumière. Ces signaux sont traités comme n'importe quel autre signal ordinaire de tension dépendant du temps et peuvent être traités numériquement.

Un exemple récent de cette technique était le satellite de la NASA Magellan qui a été libéré de la navette spatiale Atlantis le 4 mai 1989 et envoyé à Vénus sur un trajet de 15 mois. Vénus est la planète la plus proche de la Terre, et est proche en termes de taille et de diamètre. Il est difficile d'étudier la surface de Vénus, car elle est constamment recouverte d'une couche nuageuse que les télescopes optiques ne peuvent pas pénétrer. Magellan avait un radar de traitement avancé des signaux numériques qui a été conçu pour voir à travers cette couche de nuages. Sa mission était la carte de la planète avec le radar et la découverte des caractéristiques de sa surface.

Magellan était aussi porteur d'une autre antenne plus petite qui pointait vers le bas et qui mesurait le temps pris pour un signal afin de se refléter sur la surface. Il a été utilisé pour construire une carte topographique de la surface sous l'engin spatial. La combinaison de ces données avec les images antérieures du radar a rendu possible la construction d'un modèle 3D de la surface de Vénus. Le modèle a été animé pour fournir un film MPEG qui mène à travers les

montagnes Maxwell sur Vénus. Tout cela n'aurait pas été possible sans le traitement numérique du signal et la transformée de Fourier rapide.

3.2.3. Géologie

La recherche sismique a toujours été un utilisateur fréquent de la transformée de Fourier discrète (et de la FFT). Si l'on regarde l'histoire de la FFT, l'on constate que l'une des premières utilisations de la FFT était de faire la distinction entre les événements sismiques naturels et les explosions nucléaires expérimentales, car ils génèrent des spectres de fréquence différents.

Méthode de Sismique Réflexion

L'outil d'exploration majeur utilisé par l'industrie pétrolière et de gaz pour localiser de nouvelles réserves d'hydrocarbures est la méthode de Sismique Réflexion. Cette technique permet de cartographier les couches de roches sédimentaires en sous-surface, à partir de mesures de l'amplitude et temps de réflexion d'événements obtenus par les ondes de reflet sismiques provenant des couches.

Les caractéristiques de base de la technique sont les suivantes :

1. Une source d'énergie sismique, qui est activée à la surface de la Terre.
2. La propagation vers le bas des ondes sismiques dans la terre.
3. La réflexion des ondes sismiques à partir des interfaces séparant les milieux géologiques ayant des propriétés acoustiques différentes.
4. La propagation vers le haut de la réflexion des ondes sismiques.
5. Détection des ondes réfléchies sismiques à la surface de la Terre en utilisant des récepteurs situés à différentes distances de la source.
6. Enregistrement des signaux à chaque récepteur.

La transformée (rapide) de Fourier est utilisée pour convertir le signal dans le domaine fréquentiel, où la convolution entre les deux signaux est obtenue simplement en les multipliant ensemble. Une fois de plus la transformée de Fourier est utilisée comme un outil de traitement numérique du signal pour effectuer d'autres opérations, plutôt que de produire un résultat final lui-même.

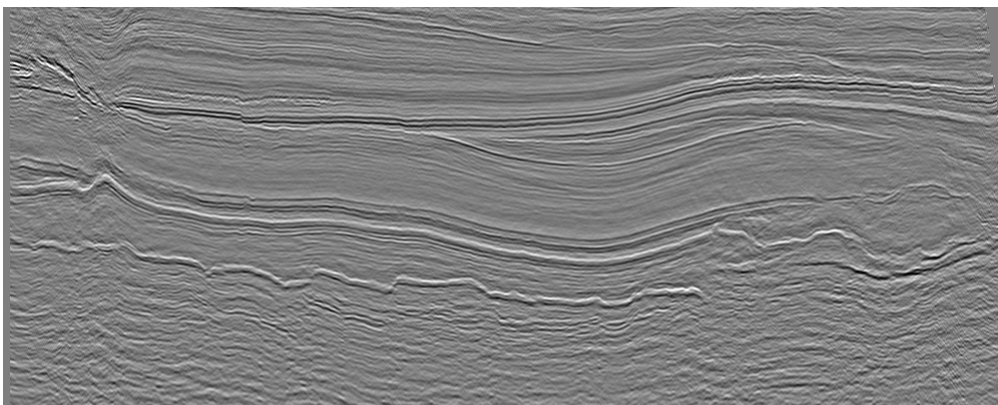


FIGURE 3.1.: exemple de section sismique

Les données de la figure 3.1 page précédente sont très intéressantes, car elles montrent plusieurs caractéristiques géologiques telles que les couches continues au sommet. Plus important encore, au sommet de l'image, à droite du milieu, il y a des couches sédimentaires qui ont été coupées par des couches plus récentes. Cela pourrait être une zone d'hydrocarbures piégés. Les données sont composées de 1 000 traces, chacune de 400 échantillons, et proviennent d'une zone de la mer du Nord.

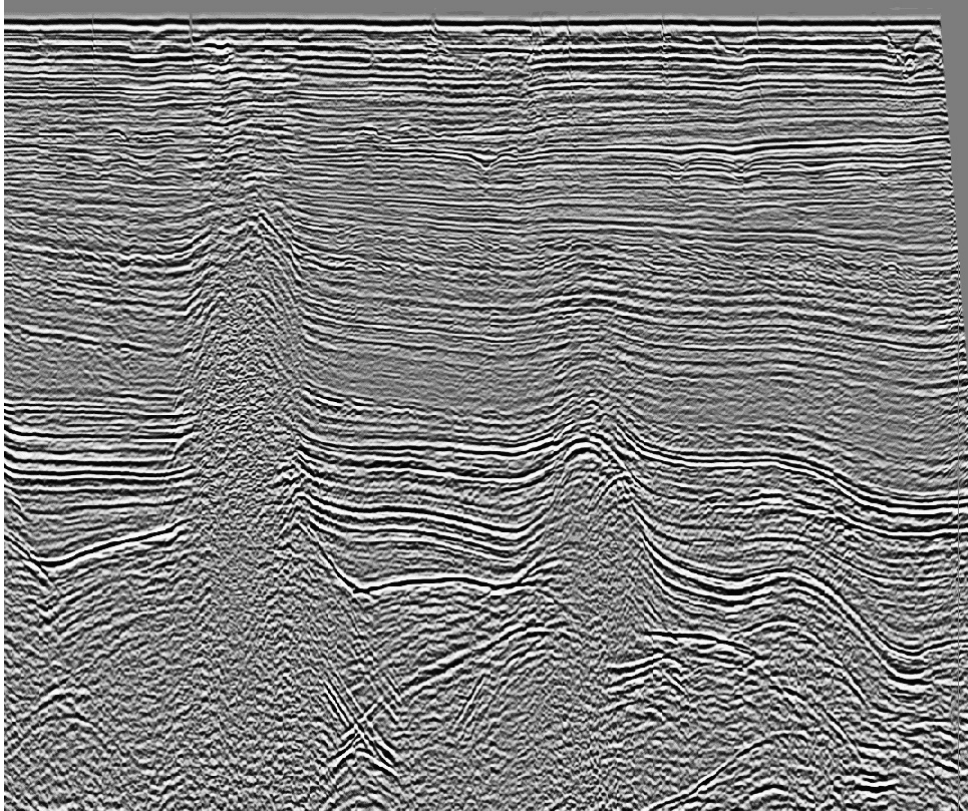


FIGURE 3.2.: dômes de sel

Dans une autre section sismique (figure 3.2), les données contiennent deux dômes de sel. Celui sur la gauche est inhabituel car sa taille est bien supérieure à celles que l'on rencontre généralement. Ces données proviennent, elles aussi, de la mer du Nord.

3.2.4. Optique

En théorie électromagnétique, l'intensité de la lumière est proportionnelle au carré du champ électrique oscillant qui existe en tout point de l'espace. La transformée de Fourier de ce signal est l'équivalent de la séparation de la lumière dans le spectre lumineux.

Un exemple simple d'application de la transformée de Fourier en optique est la diffraction de la lumière lorsqu'elle passe à travers des fentes étroites. Les idées représentées ici peuvent également être appliquées à l'acoustique, aux rayons X, à la diffraction des micro-ondes ou à toute autre forme de diffraction d'ondes.

3.3. Application de la transformée de Fourier au traitement d'images

3.3.1. Notions théoriques

Le traitement d'images est une discipline de l'informatique et des mathématiques appliquées qui étudie les images numériques et leurs transformations, dans le but d'améliorer leur qualité ou d'en extraire de l'information.

Une image numérique est une fonction dont l'ensemble de définition est discret et borné, prenant ainsi des valeurs discrètes. L'ensemble de définition est multidimensionnel, en général 2D ou 3D. Les valeurs peuvent être scalaires (images en niveaux de gris), ou bien vectorielles (imagerie multicomposante, imagerie couleur).

Une image numérique est associée à un pavage de l'espace, en général rectangulaire. Chaque élément du pavage, appelé « pixel », est désigné par ses coordonnées entières.

Une image numérique 2D est représentée par une matrice I de m lignes et n colonnes. Le pixel est désigné par un couple (i, j) où i est l'indice de ligne ($i \in \llbracket 0; m \rrbracket$) et j l'indice de colonne ($j \in \llbracket 0; n \rrbracket$), m étant la hauteur et n la largeur de I . Par convention, le pixel origine $(0, 0)$ est en général en haut à gauche. Dans le cas d'une image en niveaux de gris, le nombre $I_{i,j}$ est la valeur (ou le niveau de gris) du pixel (i, j) , $I_{i,j} \in \llbracket 0; N_{\max} \rrbracket$, où N_{\max} est le nombre de niveaux de gris. Pour une image en couleurs, $I_{i,j}$ n'est plus un nombre mais un vecteur dont les composantes représentent généralement les niveaux de rouge, vert et bleu (les trois couleurs primaires pour la synthèse additive), et éventuellement un niveau de transparence ou canal alpha.

Une image numérique ne constitue donc qu'une version approchée de « l'image réelle » formée par la projection de la scène 3D sur la surface photosensible du capteur.

Il existe plusieurs types d'images numériques : image binaire, image en niveaux de gris, image couleur et image à valeurs réelles.

Une image binaire est une image pour laquelle chaque point peut prendre uniquement la valeur 0 ou 1. Les pixels sont noirs (0) ou blancs (1). Le niveau de gris est codé sur un bit.

Une image en niveaux de gris autorise un dégradé de gris entre le noir et le blanc. En général, on code le niveau de gris sur un octet (8 bits) soit 256 nuances de dégradé.

Une image couleurs est la composition de trois images en niveaux de gris sur trois composantes. On définit donc trois plans de niveaux de gris, un rouge, un vert et unbleu. La couleur finale est obtenue par synthèse additive des ces trois composantes.

Une image à valeurs réelles est telle que le niveau de gris est un réel compris entre 0 et 1. Il est préférable de définir l'image de départ et l'image résultat comme des images à valeurs réelles dans le cas où certains calculs sur les images ne sont pas des entiers.

La transformée de Fourier est un outil mathématique de traitement du signal qui permet de passer d'une représentation temporelle à une représentation fréquentielle du signal. La puissance de cet outil réside dans le fait que cette transformation est réversible et qu'elle peut être

étendue aux signaux non périodiques (qu'on considère alors comme de période infinie).

En traitement d'images, la transformée de Fourier a plusieurs applications, le principe étant toujours le même : l'image numérique est considérée comme le motif d'une fonction périodique dont on fait la transformée de Fourier, ce qui permet d'appliquer ensuite un filtre ou un procédé adéquat avant de faire la transformée inverse.

L'hypothèse de la périodicité a un effet important sur l'interprétation de la transformée de Fourier, car la périodisation crée en général des contours verticaux et horizontaux artificiels qui se traduisent par des amplitudes importantes pour les fréquences horizontales et verticales, soit des valeurs élevées au niveau des axes des fréquences.

Dans le domaine de Fourier, une image contient deux informations : l'amplitude (la partie réelle) et la phase (la partie imaginaire). On peut donc tracer un spectre d'amplitudes et un spectre de phases.

Le spectre d'amplitudes fournit des informations sur les structures présentes dans l'image : les fréquences et les directions principales.

Le spectre de phases indique les positions relatives des différentes composantes sinusoidales les unes par rapport aux autres, ce qui joue un rôle déterminant dans la forme des objets.

Les applications les plus importantes sont la compression d'images, l'élimination du bruit, la reconstitution d'images ou encore l'application de filtres.

3.3.2. Compression d'images

Dans ce cas, la transformée de Fourier est très utile car au lieu de stocker toutes les valeurs de tous les pixels d'une image, il suffit de stocker un petit nombre de coefficients de Fourier. Cette idée est à la base de la norme JPEG.

3.3.3. Élimination du bruit

Le bruit est généralement associé aux hautes fréquences. Pour l'éliminer, il faut donc ramener vers zéro les coefficients de Fourier correspondant aux grandes fréquences, par l'application d'une contraction. L'image est bien entendu reconstruite par la transformée inverse.

3.3.4. Reconstitution d'images

L'utilité de la transformée de Fourier pour la reconstitution d'images vient du fait qu'il est possible de calculer de façon approchée les coefficients de Fourier ; par conséquent, même si les valeurs de certains pixels ne sont pas connues, une approximation dans l'espace de Fourier permet de les reconstituer.

3.3.5. Exemple concret sur MATLAB

Après de nombreuses recherches sur l'application de la transformée de Fourier en traitement d'images, nous avons décidé de travailler sur un exemple simple, pour voir plus exactement comment cet outil s'applique et quels sont ses effets sur l'image analysée.

Pour cela, nous avons choisi MATLAB, un logiciel avec lequel nous avons déjà travaillé. Dans le cadre de notre étude, nous allons nous intéresser à une image en niveau de gris. Il s'agit donc d'une matrice bidimensionnelle associant à chaque pixel, donc à chaque couple (i, j) de coordonnées, une valeur correspondant au niveau de gris du pixel.

Les principales fonctions de traitement d'images sous MATLAB sont :

- fft** : calcule la transformée de Fourier d'un vecteur (1D) ;
- fft2** : calcule la transformée de Fourier d'une matrice (2D) ;
- ifft2** : calcule la transformée de Fourier inverse d'une matrice ;
- abs** : amplitude (module) d'une transformée de Fourier ;
- angle** : phase d'une transformée de Fourier ;
- real** : partie réelle d'une variable complexe ;
- imag** : partie imaginaire d'une variable complexe ;
- log** : logarithme (pratique pour l'affichage) ;
- fftshift** : changement de référentiel qui place la composante continue au centre de l'image (pratique pour l'affichage) ;
- imagesc** : affiche une image avec interpolation des couleurs.

FFT est l'acronyme de *Fast Fourier Transform*, un algorithme utilisé couramment en traitement d'images pour le calcul de la transformée de Fourier discrète, car plus rapide que la méthode classique. Il permet de transformer des données discrètes du domaine temporel dans le domaine fréquentiel.

Nous avons commencé par la construction et la visualisation d'une image de dimensions 400×400 . Nous avons choisi de générer une onde d'une certaine direction dans l'espace.

De manière générale, l'équation d'une onde est :

$$f = A \cdot e^{j \cdot (\omega \cdot t - \vec{k} \cdot \overrightarrow{OM})}$$

où A représente l'amplitude, ω la pulsation, \overrightarrow{OM} le vecteur directeur et \vec{k} le vecteur d'onde.
 $\vec{k} = \vec{u}_{\text{propag}} \cdot \frac{2\pi}{\lambda}$.

L'équation d'une onde suivant une seule direction, telle que nous l'avons vu en cours d'optique, est :

$$f = A \cdot e^{j \cdot (\omega \cdot t - k \cdot x)}$$

En deux dimensions, cette équation devient :

$$f = A \cdot e^{j \cdot (\omega t - k_x \cdot x - k_y \cdot y)}$$

Comme dans ce cas il s'agit d'une représentation spatiale, la variable t de l'équation correspond à une constante ; pour générer une onde, nous n'avons donc besoin que de la direction

$$\vec{k} \begin{vmatrix} k_x \\ k_y \end{vmatrix}.$$

Pour construire une onde, on peut donc utiliser la formule :

$$f = A \cdot e^{-j \cdot (k_x \cdot x + k_y \cdot y)}$$

Pour simplifier l'étude, nous avons pris $A = 1$ et, pour garder l'origine en haut à gauche de l'image, nous avons choisi le complexe j à la place de $-j$.

Voici le code MATLAB pour générer et visualiser cette onde :

```

dim = 400;
kx = (2 * 3.14) / 25;
ky = (2 * 3.14) / 5;
A = zeros(dim, dim);

for i = 1:dim
    for j = 1:dim
        A(i, j) = exp(complex(0, 1) * (kx * j + ky * i));
    end
end

figure
imshow(A)
title('image ')
colormap(gray)
    
```

L'image que nous avons générée est représentée par la figure 3.3.

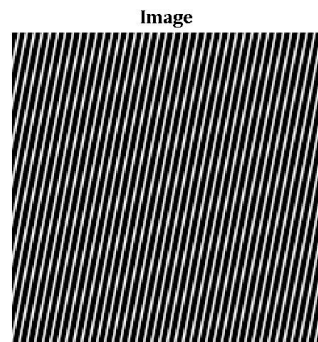


FIGURE 3.3.: image générée

Nous pouvons retrouver la longueur d'onde en regardant la distance entre deux maximums, comme représenté en figure 3.4.

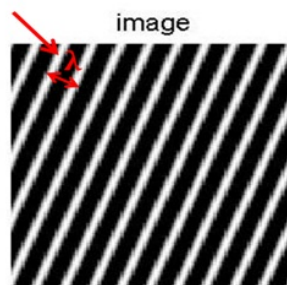


FIGURE 3.4.: longueur d'onde dans l'image générée

Nous avons ensuite appliqué la transformée de Fourier.

Comme les fonctions considérées en traitement d'images sont discrètes, la formule utilisée n'est plus tout à fait celle donnée dans la première partie de ce rapport. La transformée de Fourier est calculée à partir de :

$$F_{u,v} = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f_{m,n} \cdot \exp\left(-2i\pi\left(u\frac{m}{M} + v\frac{n}{N}\right)\right)$$

Les calculs sont très compliqués à effectuer à la main ; par conséquent, nous allons retenir directement le résultat. L'image de la transformée de Fourier est donnée par la figure 3.5.

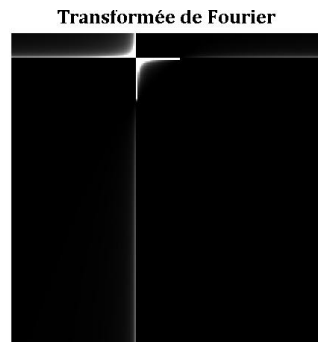


FIGURE 3.5.: transformée de Fourier de la figure 3.3 page précédente

Comme nous l'avons vu dans la partie théorique, ce sont le spectre d'amplitudes et le spectre de phases qui fournissent des informations sur les images. Nous avons donc regardé ces deux spectres. Nous obtenons les deux images données en figure 3.6.

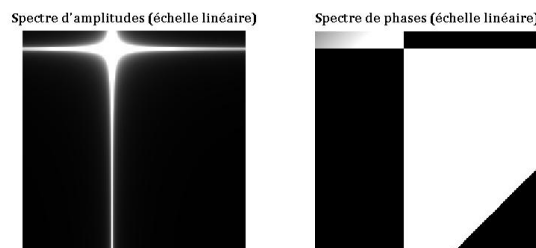
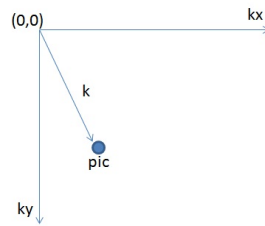


FIGURE 3.6.: spectre d'amplitudes et spectre de phases de la figure 3.3 page précédente

Le spectre d'amplitudes présente un pic, qui représente l'onde de notre image initiale. Le spectre d'amplitudes est représenté en fonction de k_x et k_y , l'amplitude étant donnée par l'intensité lumineuse du pic. Pour des images simples comme celle que nous étudions, nous pouvons retrouver dans le spectre d'amplitudes la valeur de \vec{k} , donc la valeur de la longueur d'onde λ , comme illustré par la figure 3.7 page suivante.

On observe que la direction de l'onde est donnée justement par ce pic. Le spectre d'amplitudes nous donne donc la direction principale, en concordance avec la théorie.


 FIGURE 3.7.: valeur de \vec{k} dans le spectre d'amplitudes

La représentation du spectre d'amplitudes contient aussi deux droites, une verticale et une horizontale avec des valeurs d'amplitude élevées. Ceci est dû à l'hypothèse de la périodicité que nous avons faite afin de pouvoir appliquer la transformée de Fourier, l'image étant considérée comme le motif de base d'une image infinie.

Le spectre de phases ne nous fournit pas d'informations pertinentes dans ce cas précis, ce qui est loin de signifier l'inutilité de ce spectre dans le cas général.

Nous avons ensuite modifié l'onde initiale pour voir les changements produits au niveau du spectre d'amplitudes. Avec $k_x = \frac{2\pi}{100}$ et $k_y = 0$, on obtient les résultats de la figure 3.8.

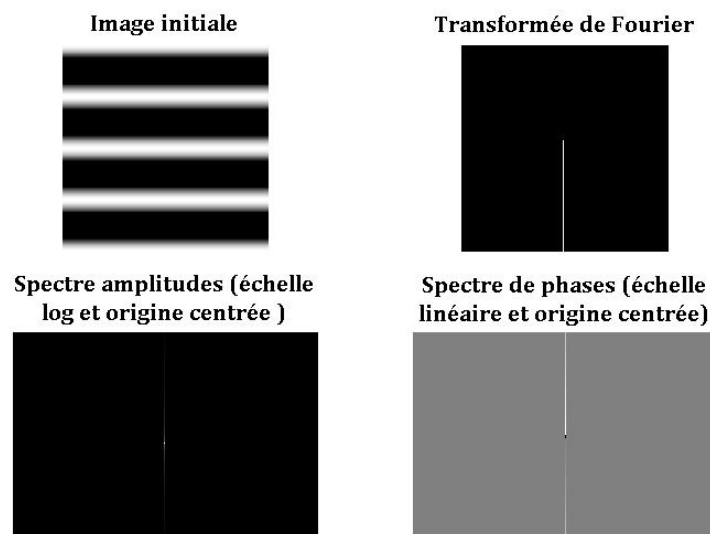


FIGURE 3.8.: transformée de Fourier d'une nouvelle onde

Nous voyons bien que le spectre d'amplitudes change en fonction des directions principales de l'image. Pour des raisons d'affichage, nous avons choisi de centrer l'origine, sans quoi le spectre n'aurait pas été visible.

Après avoir étudié l'effet de l'application de la transformée de Fourier, nous allons maintenant voir comment s'en servir pour filtrer une image.

Nous avons étudié la transformée de Fourier et les spectres correspondants d'une image plus compliquée. Cette étude est représentée par la figure 3.9.

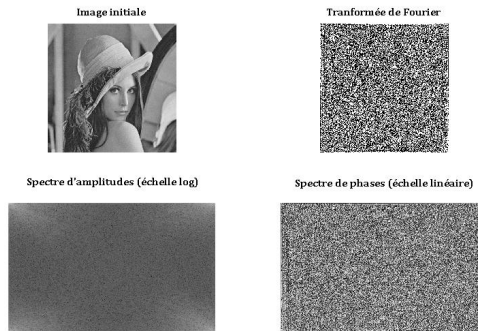


FIGURE 3.9.: transformée de Fourier d'une image en niveaux de gris plus complexe

Le spectre d'amplitudes et le spectre de phases sont, cette fois-ci, plus compliqués et difficiles à interpréter directement.

Pour filtrer une image, il suffit de faire la convolution entre la transformée de Fourier et le filtre. Nous nous sommes fixés comme but la modification de la luminosité de l'image.

Dans notre cas, la transformée de Fourier est une matrice ; nous avons donc défini le filtre comme une matrice 2×2 prenant des valeurs entre 0 et 1 qui correspondent aux différents niveaux de gris. Par une convolution avec la transformée de Fourier, nous avons voulu augmenter la valeur de tous les pixels pour augmenter ainsi la luminosité.

Le résultat est donné en figure 3.10.



FIGURE 3.10.: résultat d'un traitement d'image visant son éclaircissement

3.3.6. Les limites de la transformée de Fourier

La transformée de Fourier est très utile en traitement d'images, mais elle a aussi ses limites.

En effet, la transformée de Fourier est bien adaptée pour les fonctions continues, mais en réalité nous devons très souvent analyser des fonctions qui ne sont pas continues en tout point. Pour les fonctions présentant de fortes discontinuités, le phénomène de Gibbs est observé. Il s'agit d'une forte oscillation au niveau du point de discontinuité, dont l'amplitude est de plus en plus grande lorsque le nombre de termes tend vers l'infini.

Un exemple en une dimension de ce phénomène, à savoir l'approximation de la fonction créneau à l'ordre 250, est donné par la figure 3.11.

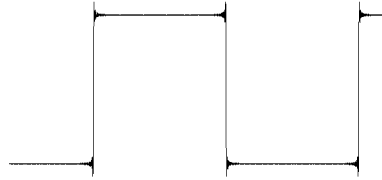


FIGURE 3.11.: illustration du phénomène de Gibbs pour la fonction créneau

En traitement d'images, le phénomène de Gibbs peut avoir l'effet représenté en figure 3.12. Le problème qui peut intervenir se situe au niveau des contours des formes.

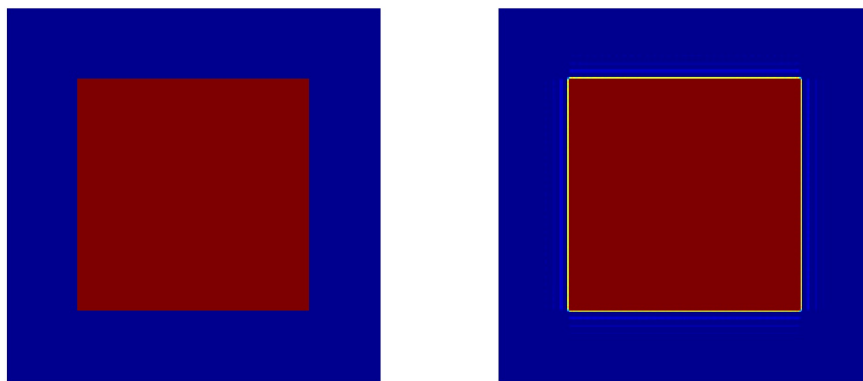


FIGURE 3.12.: illustration du phénomène de Gibbs en reconstitution d'image

Un autre inconvénient de cet outil est le fait que toute l'information temporelle est perdue après avoir appliqué la transformée de Fourier. Ce n'est donc pas adapté que pour des signaux stationnaires.

Une méthode qui donne une représentation temps-fréquences est la méthode d'Ondelettes qui est à privilégier lorsque le temps joue un rôle important.

3.4. TP de mécanique : oscillations et résonance

Afin de mettre en œuvre concrètement l'analyse de Fourier, nous avons procédé à une expérience physique basée sur le montage du TP de mécanique sur les oscillations.

3.4.1. Description de l'expérience

Nous avons commencé par obtenir le diagramme de Bode du ressort utilisé, de la même manière que dans le TP originel (c'est-à-dire en mesurant l'amplitude d'un signal sinusoïdal forcé avec une corde seule puis avec le ressort, comme le montre la figure 3.13 page suivante), à

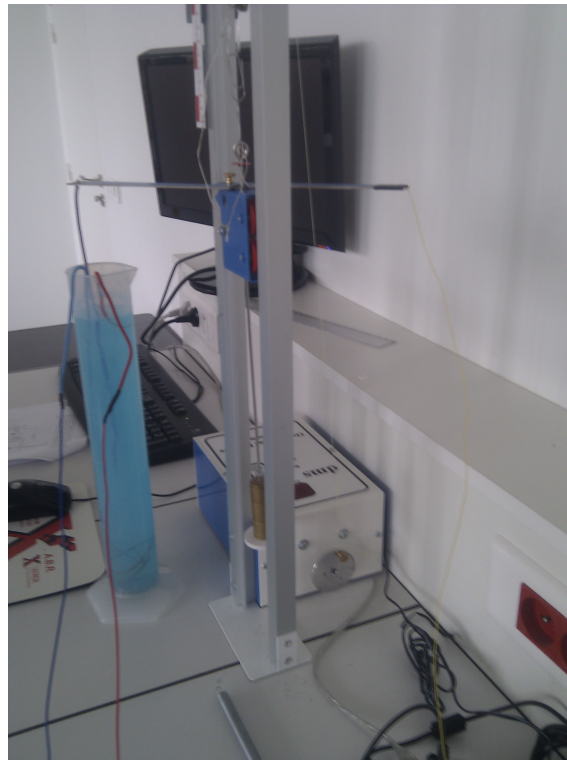


FIGURE 3.13.: montage d'obtention du diagramme de Bode

ceci près que n'avons effectué les mesures que pour les fréquences dont nous avons besoin par la suite (le diagramme de Bode n'étant pas notre finalité, juste un moyen), puis nous en avons déduit les paramètres numériques du diagramme de Bode à l'aide de sa formule théorique et du logiciel « QtiPlot » :

$$|\underline{H}(\omega)| = \frac{1}{K} \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^4 + \left(\frac{\omega}{\omega_0 \cdot Q}\right)^2}}$$

$$K = 1,145$$

$$Q = 1,423$$

$$\omega_0 = 8,056$$

En retrouvant la formule théorique de notre fonction de transfert, nous nous sommes rendus compte que, contrairement à ce que l'on aurait pu penser intuitivement, la courbe ne passait pas nécessairement par le point (0, 1). C'est effectivement ce qui se passe dans notre cas : notre paramètre K est manifestement différent de 1.

Ensuite, nous avons relevé l'évolution de la hauteur de la masse au cours du temps avec un signal non sinusoïdal. Afin d'obtenir ce signal non sinusoïdal, nous avons d'abord essayé de faire passer le fil autour de deux vis placées sur l'arbre. Nous nous sommes cependant rendus compte que sur le spectre fréquentiel du signal obtenu n'apparaissait qu'un seul pic.

Nous avons alors pensé à ajouter un moteur, réglé sur une fréquence différente de celle du premier, afin qu'il perturbe le signal sinusoïdal. Les deux moteurs ont été réglés, respectivement, à 0,40 Hz et à 0,60 Hz.

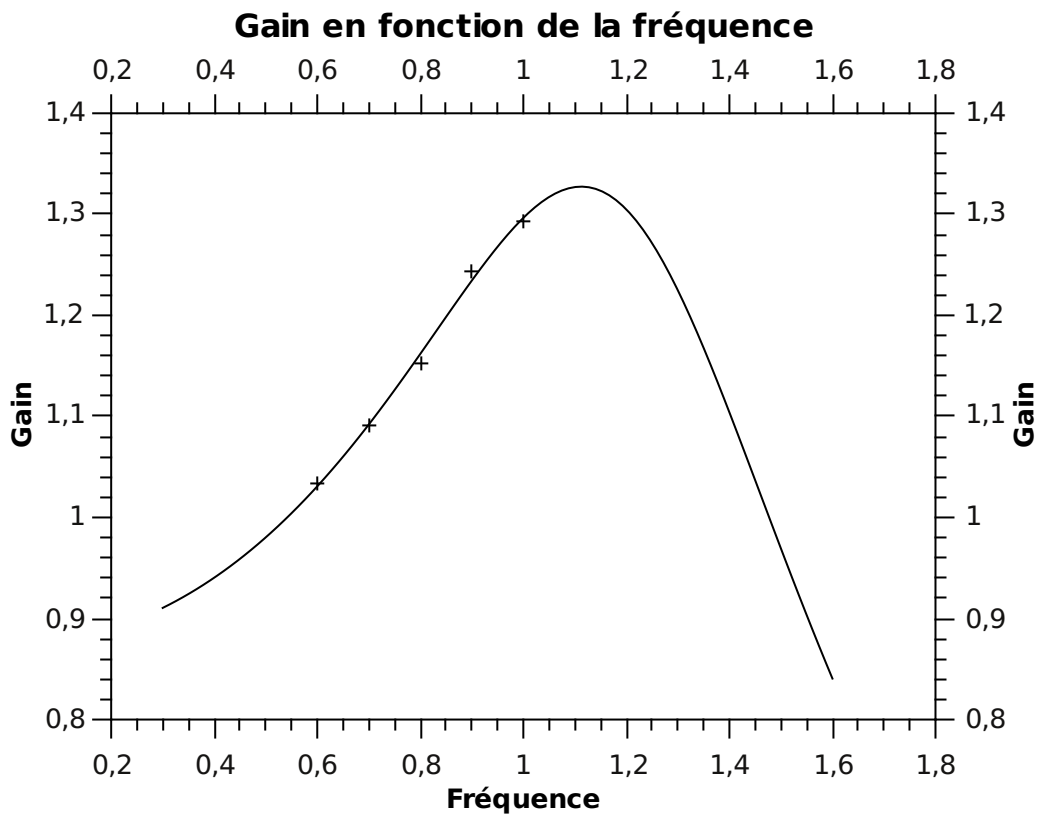


FIGURE 3.14.: Mesures du gain effectuées et fonction de transfert théorique

Nous avons d'abord procédé à cette mesure avec la corde uniquement (graphique 3.15 page suivante), ensuite avec le ressort dont nous avons le diagramme de Bode (graphique 3.20 page 25).

3.4.2. Exploitation des mesures

Cette expérience avait pour but de voir si, à partir du signal avec la corde et en s'aidant de l'analyse de Fourier et du diagramme de Bode du ressort, nous pouvions prévoir l'allure du signal avec le ressort.

Nous avons donc appliqué une transformée de Fourier au premier signal, y avons appliqué le diagramme de Bode et avons procédé à une transformée de Fourier inverse, dans l'espoir d'obtenir le signal réel avec ressort.

3.4.3. Résultats

Il convient de noter qu'entre les mesures, nous n'avons pas pu assurer la synchronisation des deux moteurs. En conséquence, le déphasage n'a pas pu être conservé, d'où la constatation que l'on peut faire que les signaux théoriques et réels avec le ressort ne correspondent pas parfaitement.

De plus, notre choix de fréquences pour les deux moteurs s'est révélé peu judicieux : le gain pour ces deux fréquences étant relativement proche, il n'est pas forcément évident que l'analyse de Fourier permet de prévoir le signal réel avec le ressort à partir du signal avec la corde.

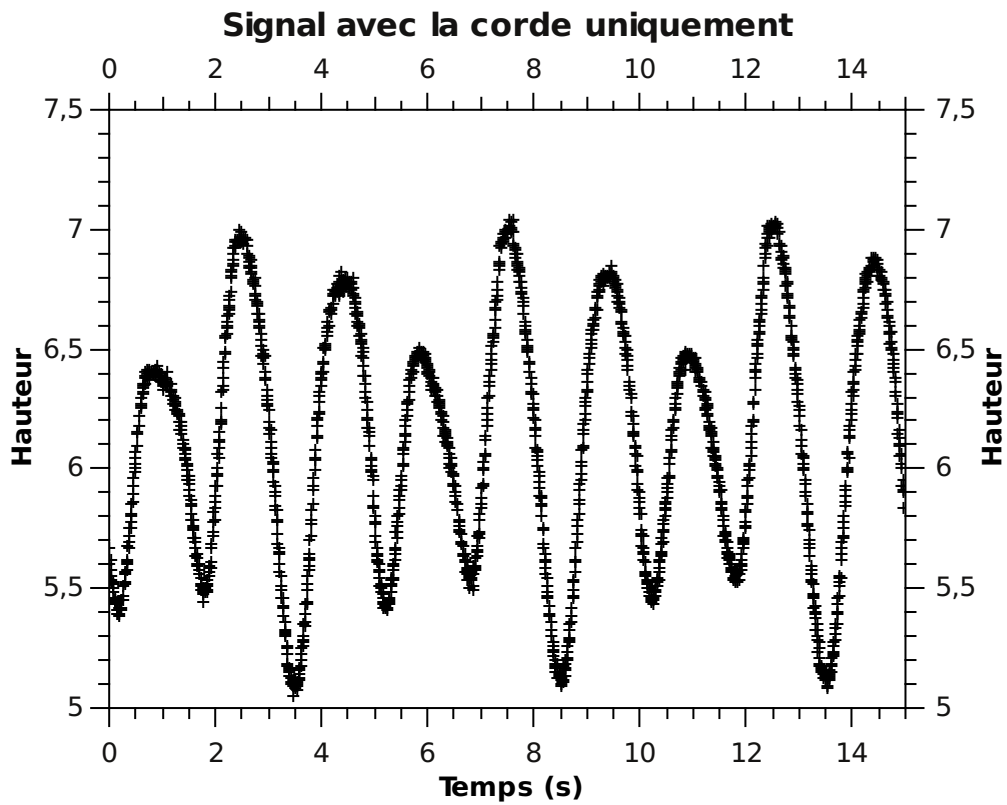


FIGURE 3.15.: signal avec la corde uniquement

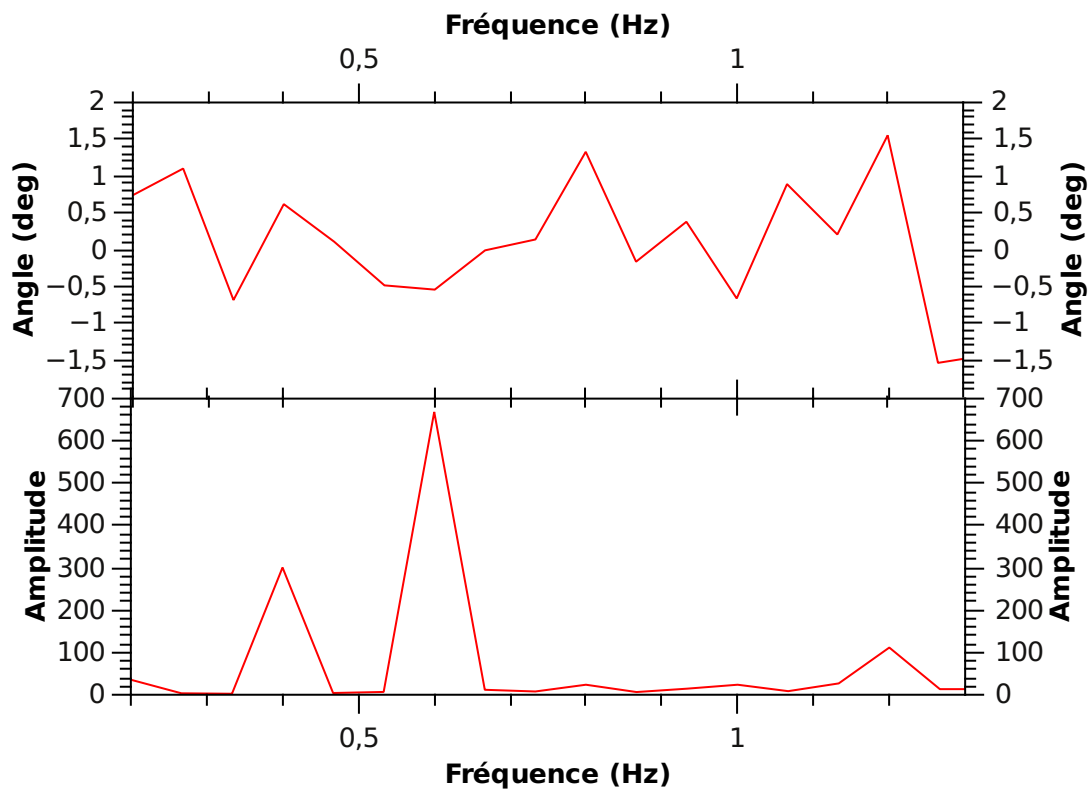


FIGURE 3.16.: spectre du signal obtenu avec la corde

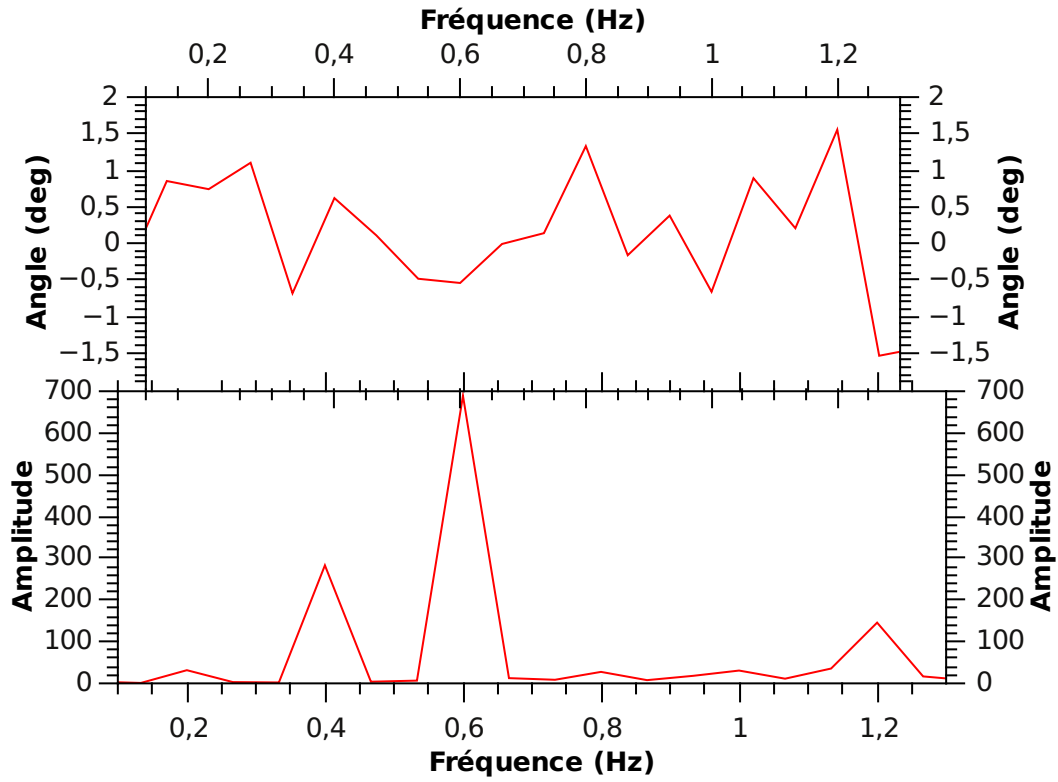


FIGURE 3.17.: spectre du signal théorique avec le ressort

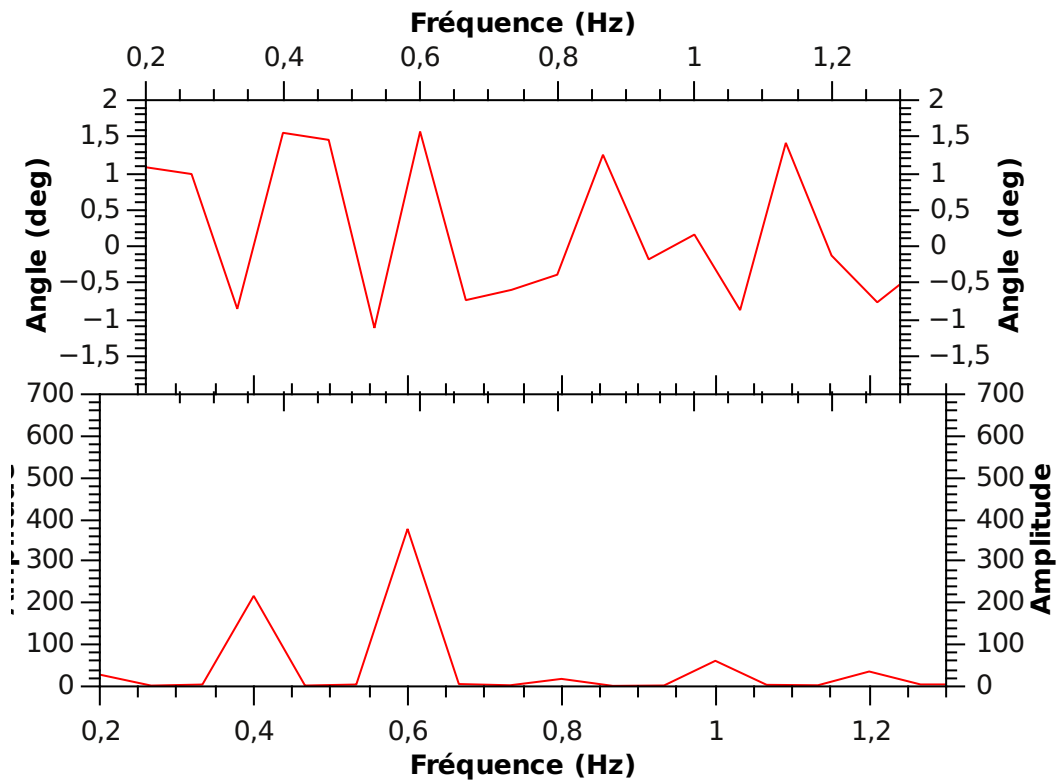


FIGURE 3.18.: spectre du signal avec le ressort

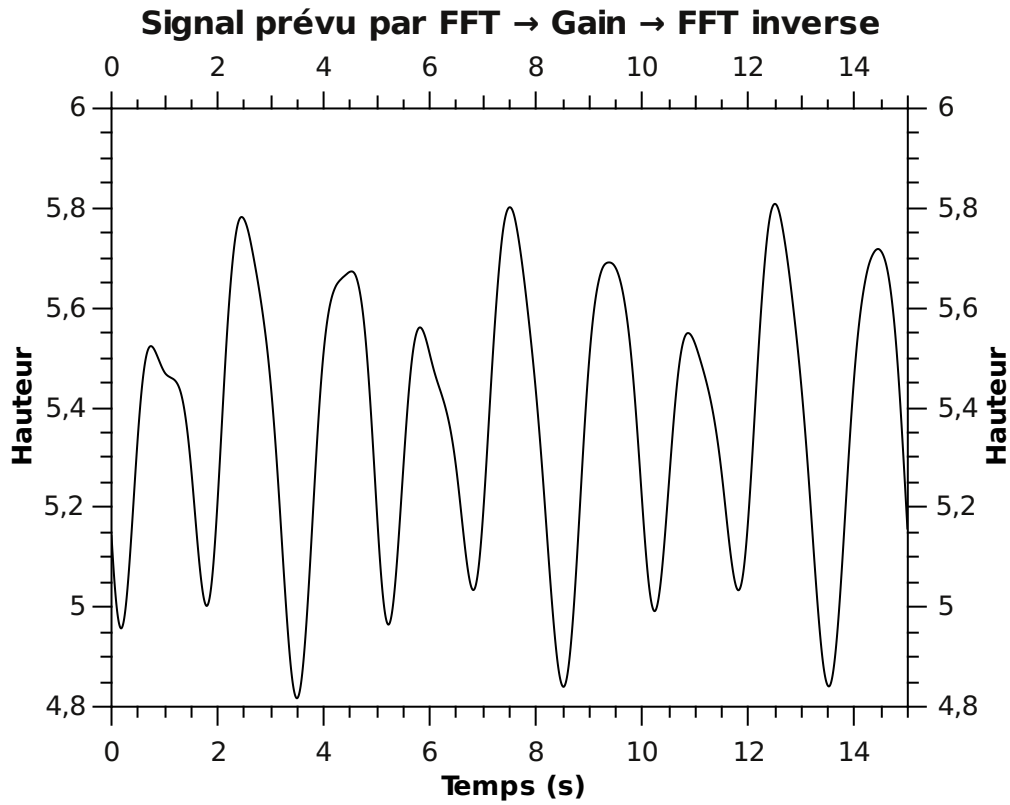


FIGURE 3.19.: signal théorique avec le ressort

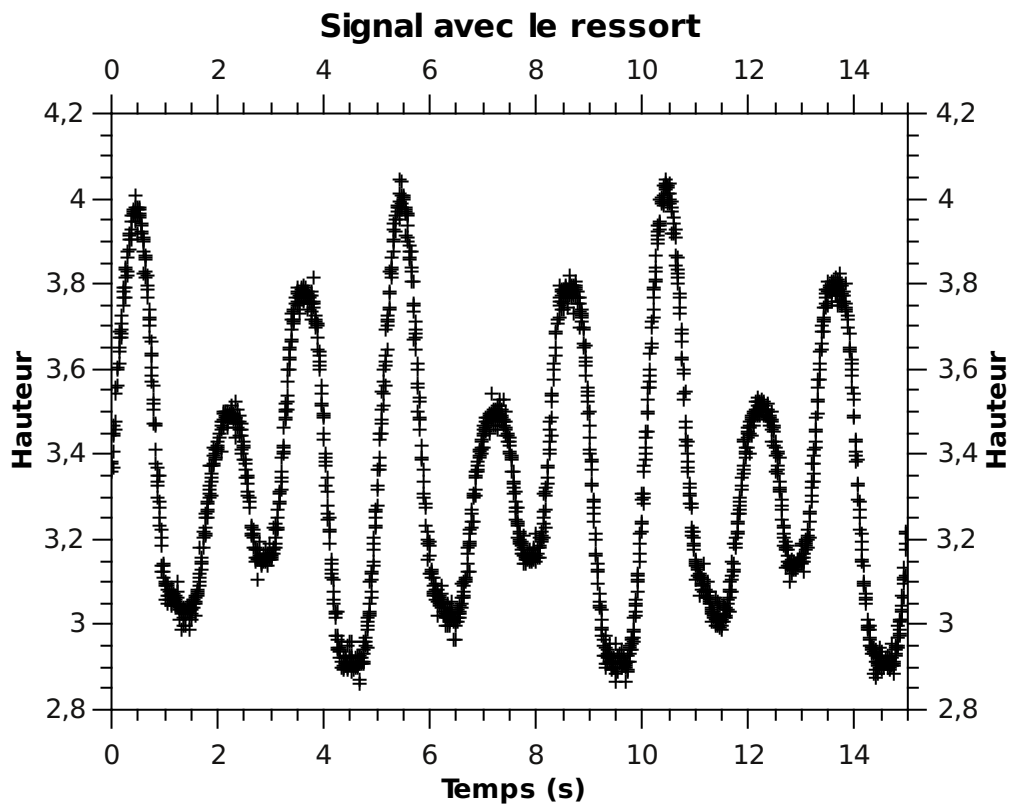


FIGURE 3.20.: signal réellement obtenu avec le ressort

4. Conclusion et perspectives

Au cours de ce projet, nous avons appris une nouvelle notion en mathématiques qui s'est révélée très présente dans des domaines très divers en sciences. De plus, au cours de notre quatrième semestre, nous avons eu l'occasion de reparler d'analyse de Fourier en cours de M9 et en M10 ce qui nous a permis d'en apprendre encore plus sur les aspects théoriques.

Nous nous sommes intéressés à deux applications en particulier : le traitement de l'image dans un premier temps, la résonance mécanique dans un second temps. Pour ce dernier phénomène, nous avons à nouveau utilisé des méthodes en provenance d'un TP de mécanique de l'année dernière pour acquérir des mesures et utiliser des analyses de Fourier. Il est malheureux que les résultats de cette expérience n'aient pas été plus concluants. Nous avons commencé cette étude trop tard, ce qui a été encore empiré par les divers problèmes que nous avons rencontrés en essayant de prendre les mesures, de sorte que nous n'avons pas pu la retenter avec des choix de fréquences plus judicieux.

En étudiant le traitement de l'image, nous avons beaucoup appris sur les différentes manières par lesquelles l'analyse de Fourier était utile. Nous avons ainsi appris comment elle est utilisée pour la compression ou pour appliquer plus efficacement et plus facilement certains traitements pour images matricielles comme le flou.

Ce projet a été très enrichissant dans le cadre de nos études et pour notre formation d'ingénieurs. Tout d'abord, il nous a permis de mieux appréhender la gestion d'un projet, la notion de groupe et surtout de nous confronter à une autonomie que l'on ne retrouve pas en cours. Nous avons appris à travailler en groupe, c'est-à-dire à travailler à plusieurs et donc à respecter les idées et travaux de nos camarades et cela durant plusieurs mois.

Nous nous sommes rendus compte que chaque personne est différente et a ses propres compétences, ses qualités et ses lacunes. Pour bien mener ce projet, il nous a fallu réussir à conjuguer toutes ces compétences et qualités pour en tirer le meilleur.

Cependant, chaque personne avait aussi ses propres volontés. Il a donc été nécessaire d'écouter et de tenir compte du point de vue des autres. Par plusieurs fois, nos idées ont divergé mais cela nous a appris que ce sont les débats qui créent la richesse du travail en groupe. De plus, notre groupe était composé de plusieurs élèves de nationalités différentes ce qui nous a semblé être une force puisque l'aspect cosmopolite de notre groupe ne peut qu'être bénéfique pour notre future carrière professionnelle.

Ce projet nous a beaucoup apporté sur le plan scientifique. Il nous a permis d'acquérir des connaissances et d'étudier des domaines auxquels nous ne nous serions pas intéressés aussi tôt autrement.

Nous nous sommes rendus compte que nos cours ne pourraient pas constituer nos uniques ressources. En effet, même s'ils nous permettent d'acquérir une certaine culture et des bases scientifiques, il est nécessaire, pour réaliser un projet de cet ordre, d'effectuer des recherches, de sortir d'un cadre purement scolaire pour réfléchir concrètement à des solutions et approfondir nos connaissances.

Enfin, ce projet nous a permis de nous rendre compte qu'il est très difficile de mettre en place un dispositif expérimental qui fonctionne correctement. Souvent, en TP, les élèves se plaignent car les dispositifs expérimentaux ne fonctionnent pas nécessairement bien. Il est certain que ce projet nous a donné un nouveau regard à ce propos.

5. Bibliographie

- [1] John BRAYER : Introduction to the Fourier Transform. <http://www.cs.unm.edu/~brayer/vision/fourier.html>.
- [2] Jérôme BRIOT : Gestion des images sous MATLAB. <http://briot-jerome.developpez.com/matlab/tutoriels/introduction-gestion-images/>.
- [3] Arnak DALALYAN : Mathématiques pour l'image. http://imagine.enpc.fr/~marletr/enseignement/mathimage/MPI_Seances1.pdf.
- [4] Florent HUMBERT : Transformée de Fourier en traitement d'images. <http://humbert-florent.developpez.com/algorithmique/traitement/fourier/>.
- [5] Alice POREBSKI : Théorie du signal. http://lagis-vi.univ-lille1.fr/~ap/files/Cours_Th-Signal_08-09.pdf.
- [6] Ben Jemaa SALMA, Houissa HICHEM et Souidène WIDED : Transformée de Fourier. <http://www.tsi.telecom-paristech.fr/pages/enseignement/ressources/beti/ondelettes-2g/francais/Fourier/TF2Dimage.htm>.
- [7] WIKIPÉDIA : Le phénomène de Gibbs. http://fr.wikipedia.org/wiki/Phénomène_de_Gibbs.
- [8] WIKIPÉDIA : Transformée de Fourier rapide. http://fr.wikipedia.org/wiki/Transformée_de_Fourier_rapide.

A. Listings des programmes réalisés

Traitement d'images

```
% Construction de l'image
dim = 400;
kx = (2 * 3.14) / 100;
ky = 0;
A = zeros(dim, dim);
for i = 1:dim
    for j = 1:dim
        A(i, j) = exp(complex(0, 1) * (kx * i + ky * j));
    end
end

% Transformée de Fourier de l'image
Af = fft2(A);

% Affichage image, transformée de Fourier,
% spectre d'amplitudes et spectre de phases
figure
subplot(2,2,1); imshow(A)
title('\fontsize{14} Image initiale')
subplot(2,2,2); imshow(fftshift(Af))
title('\fontsize{14} Transformée de Fourier')
subplot(2,2,3); imagesc(log10(abs(fftshift(Af))))
title('\fontsize{14} Spectre amplitudes (échelle linéaire)')
subplot(2,2,4); imagesc(angle(fftshift(Af)))
title('\fontsize{14} Spectre phases (échelle linéaire)')
colormap(gray)

% Exemple image plus compliquée
% Lecture de l'image
img = imread('lena.jpg');
img = rgb2gray(img);
img = double(img) / 255;

% Transformée de Fourier de l'image
Af = fft2(img);

% Construction du filtre et application sur l'image
h = [0.4, 0.4; 0.4, 0.4];
H = fft2(h);
F = filter2(H, Af);
```

```
G = ifft2(F);  
  
% Affichage image initiale et image filtrée  
figure,  
subplot(1,2,1); imshow(img)  
title('Image initiale')  
subplot(1,2,2); imshow(G)  
title('Image filtrée')  
colormap(gray)
```