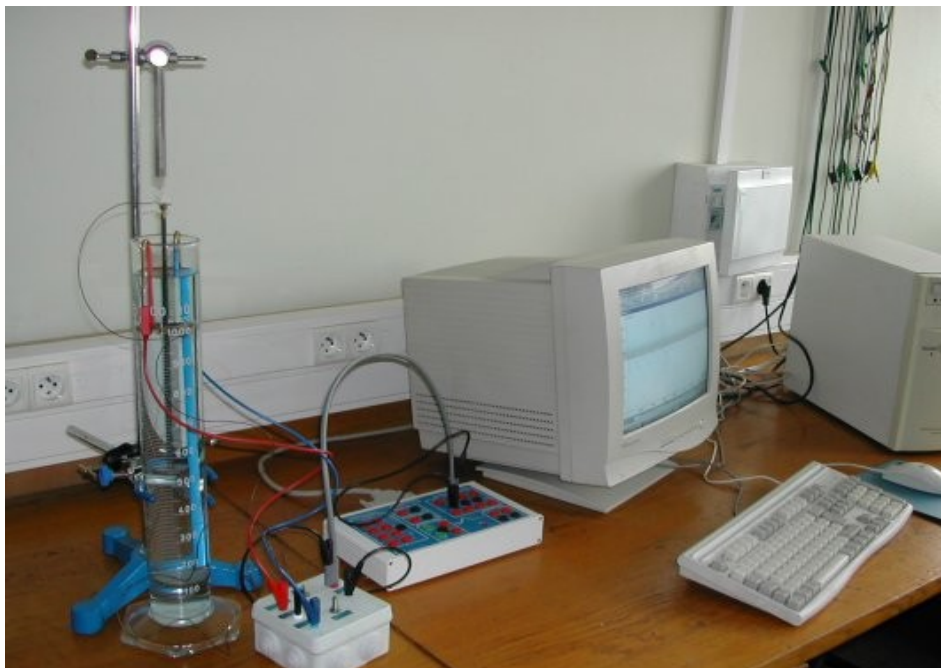


Projet de Physique P6-3
STPI/P6-3/2011 – 2012

Étude d'un oscillateur (système masse-ressort)



Etudiants :

Rémy BOURNIQUE

Mathilde JAOUEN

Xhiao LIN

Andréa DUFOUR

Thibaut LEMOINE

Enseignant-responsable du projet :

Bernard GLEYSE

Cette page est laissée intentionnellement vierge.

Date de remise du rapport : **18/6/12**

Référence du projet : **STPI/P6-3/2012-4**

Intitulé du projet : ***Étude d'un oscillateur (système masse-ressort)***

Type de projet : ***Modélisation et simulation***

Objectifs du projet :

À partir de l'étude expérimentale du mouvement d'un système masse-ressort, trouver des solutions théoriques et les modéliser à l'aide d'une méthode numérique

Mots-clefs du projet : ***masse-ressort, simulation, équations différentielles***

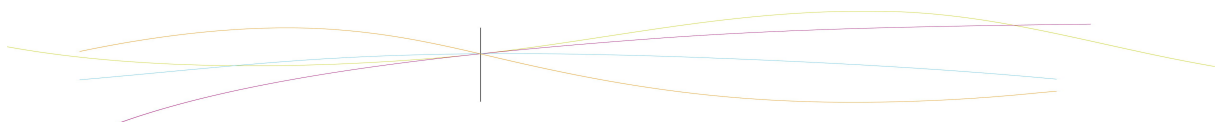
Si existant, n° cahier de laboratoire associé : **xxx**

TABLE DES MATIERES

1. Introduction.....	6
2. Méthodologie / Organisation du travail.....	7
3. Travail réalisé et résultats.....	9
3.1. Travail théorique.....	9
3.1.1. Système soumis uniquement aux forces de gravité.....	9
3.1.2. Système soumis aux forces de frottements fluides.....	10
3.1.3. Système soumis à des forces de frottements fluides en oscillations entretenues.....	12
3.2 Travail pratique.....	15
3.3 Méthode numérique Runge-Kutta 4.....	24
3.4 Partie simulation.....	27
4. Conclusions et perspectives.....	35
5. Bibliographie.....	35
6. Annexes.....	38
6.1. Listing des programmes réalisés – Code Maple.....	38
6.2. Listings des programmes réalisés – Code Pascal.....	46

NOTATIONS, ACRONYMES

RK4 : Range Kutta 4

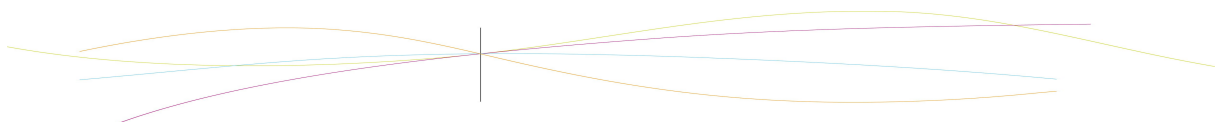


1. INTRODUCTION

Dans le cadre de notre formation d'ingénieur à l'INSA de Rouen, nous avons à plusieurs reprises eu l'occasion de travailler en groupe autour de projets. Après les projets mathématiques et informatique où l'on se contentait de faire des applications numériques sans réel sens physique, voici enfin venu le temps du projet physique ! Le nôtre porte sur l'étude du système masse-ressort. L'étude de ce dernier est un projet relativement complet, qui rassemble à la fois de la programmation, de l'analyse numérique, des mathématiques, et ce bien sûr en gardant toujours un certain sens physique. Ce projet est l'occasion pour nous d'user habilement des outils mathématiques à notre disposition pour mieux comprendre le sens physique de notre système. Enfin un projet qui se rapproche vraiment du travail d'un ingénieur !

Pour pouvoir étudier ce système, nous sommes partis du TP que nous avons fait au semestre 1, intitulé « résonance mécanique ». L'objectif de notre projet est, dans un premier temps, de réaliser une modélisation mathématique, permettant de résoudre les équations différentielles d'ordre 2 (avec Maple et en programmation pascal) pour pouvoir ensuite comparer les résultats théoriques apportés par les méthodes numériques aux résultats expérimentaux trouvés lors du TP. Pour ce faire, nous sortirons les conditions initiales expérimentales qui serviront à effectuer les modèles mathématiques.

Nous allons, dans ce dossier, commencer par vous présenter l'étude théorique de ce système masse-ressort se basant sur le TP et faisant apparaître les conditions initiales et les différentes équations différentielles. Nous nous servirons ensuite de ces résultats pour vous présenter les différentes méthodes numériques établies afin d'obtenir une solution approchée de nos équations différentielles, puis une modélisation numériquement. Enfin, nous pourrons effectuer une comparaison entre les résultats de nos expériences, nos résultats théoriques et ceux obtenus numériquement.

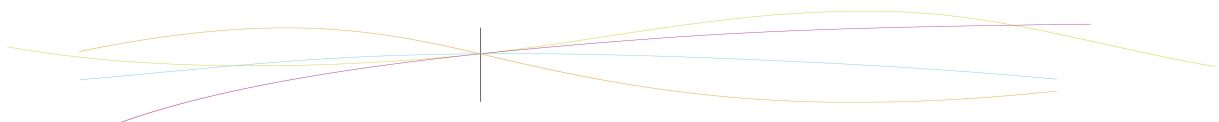


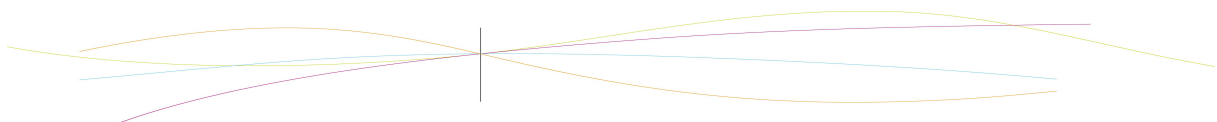
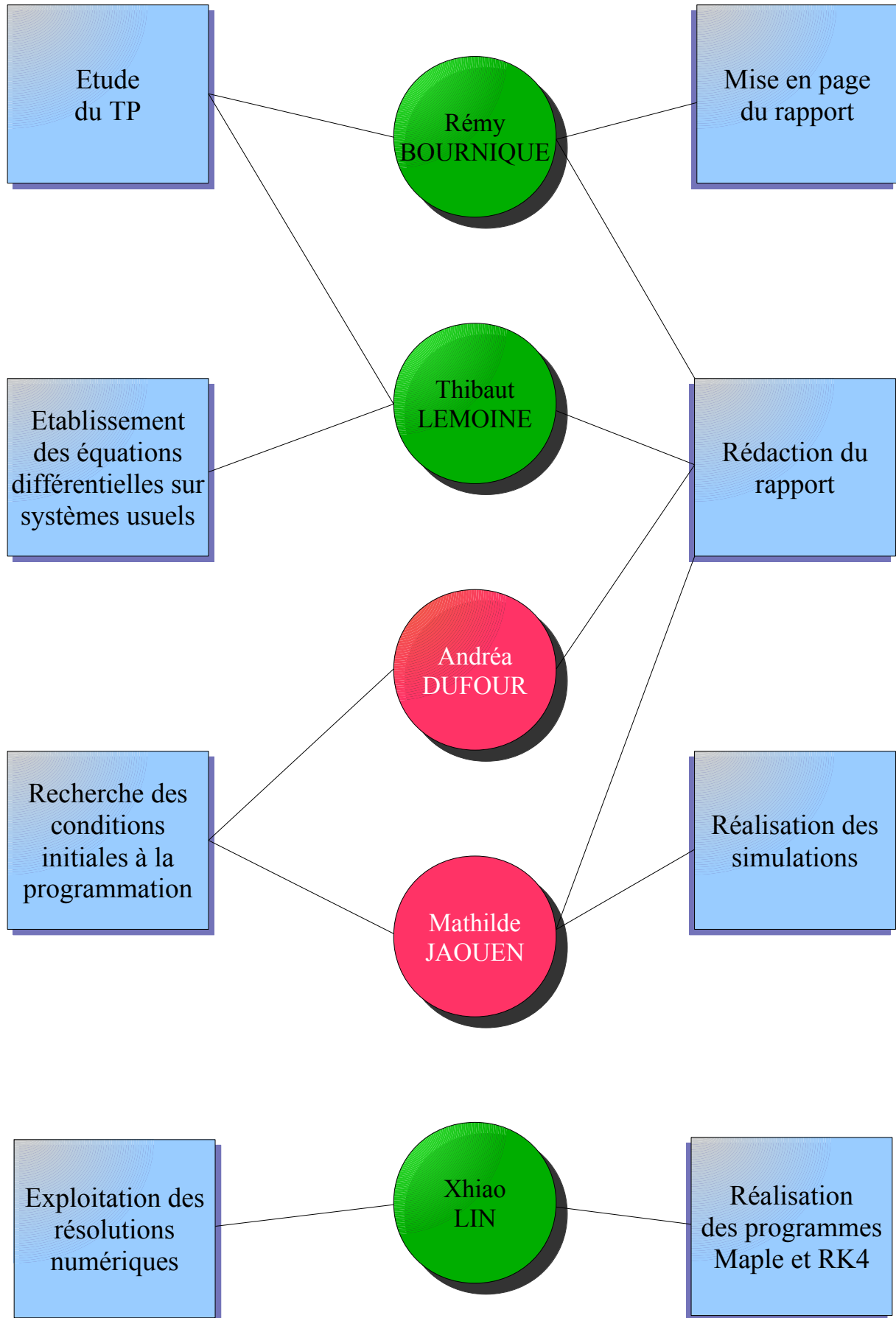
2. MÉTHODOLOGIE / ORGANISATION DU TRAVAIL

Ce sujet nous a été attribué après un sondage de préférence. Le groupe a donc été formé ne tenant aucunement compte des affinités. Il a donc fallu apprendre à travailler ensemble, à se partager le travail et à communiquer et ce dans un temps imparti de 4 mois. En outre, nous avons tous les cinq des niveaux éclectiques en informatique, nous avons ainsi dû apprendre à travailler en conciliant les différents niveaux et connaissances de chacun.

Afin de mener à bien notre projet dans les temps impartis, nous nous sommes efforcés de suivre un planning, auquel s'ajoutaient quelques réunions pour rendre compte de l'avancé du projet et mettre en commun nos travaux respectifs.

Nous nous sommes donc partagé le travail selon nos connaissances respectives et avons fait en sorte que celles-ci se complètent. Une fois la phase de recherches documentaires communes passée nous nous sommes réparti le travail de la façon indiquée page suivante.





3. TRAVAIL RÉALISÉ ET RÉSULTATS

3.1. Travail théorique

3.1.1. *Système soumis uniquement aux forces de gravité*

On se place dans le référentiel terrestre, considéré galiléen, dans le repère cartésien de vecteurs unitaires $\{ \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z \}$.

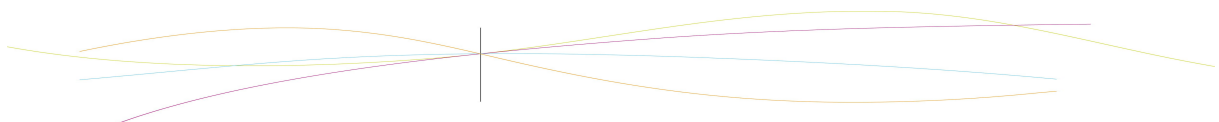
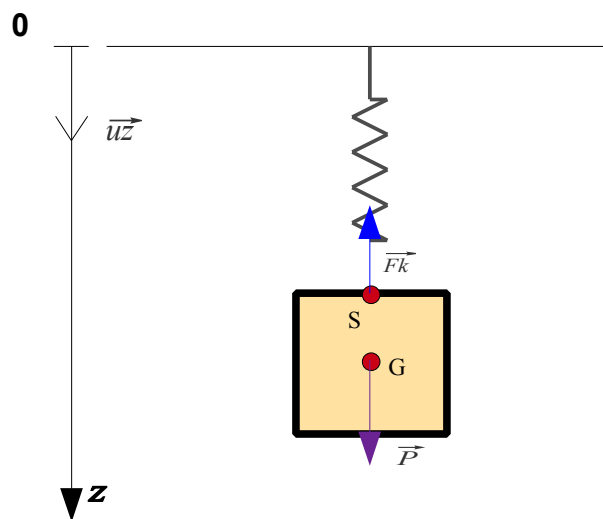
On suspend une masse m à un ressort de raideur k , elle est alors soumise aux forces suivantes :

- le poids \vec{P}

- x **direction** : verticale
- x **sens** : vers le bas
- x **point d'application** : le centre de gravité G
- x **norme** : $\vec{P} = m \cdot g \cdot \vec{u}_z$ où g est la force de gravité

- la tension du ressort \vec{F}_k

- x **direction** : verticale
- x **sens** : vers le haut
- x **point d'application** : le point S de contact entre le ressort et la masse
- x **norme** : $\vec{F}_k = -k \cdot (z - z_0) \cdot \vec{u}_z$



Le Principe Fondamental de la Dynamique (PFD), ou deuxième loi de Newton, nous dit que, dans un référentiel galiléen :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m \cdot \vec{a}$$

Ce principe nous donne ici, avec les forces en présence :

$$\vec{P} + \vec{F}_k = m \cdot \vec{a}$$

$$\Leftrightarrow P \cdot \vec{u}_z - Fk \cdot \vec{u}_z = m \cdot a \cdot \vec{u}_z$$

On projette sur \vec{u}_z et on remplace par les valeurs de chaque membre (note : on prend $z_0=0$). On obtient alors l'équation différentielle suivante :

$$m \cdot g - k \cdot z = m \cdot \frac{d^2z}{dt^2}$$

$$\Leftrightarrow m \cdot z'' + k \cdot z = m \cdot g$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{g} \cdot (z'' + \frac{k}{m} z) = 0$$

On pose $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ qui correspond à la pulsation propre du système.

$$\Leftrightarrow z'' + \omega_0^2 z = 0$$

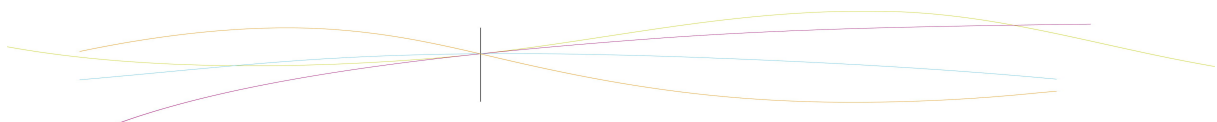
3.1.2. Système soumis à des forces de frottements fluides

On se place dans le référentiel terrestre, considéré galiléen, dans le repère cartésien de vecteurs unitaires $\{\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z\}$.

On suspend une masse m à un ressort de raideur k dans un liquide, elle est alors soumise aux forces suivantes :

- le poids \vec{P}

- x **direction** : verticale
- x **sens** : vers le bas
- x **point d'application** : le centre de gravité G
- x **norme** : $\vec{P} = m \cdot g \cdot \vec{u}_z$



- la tension du ressort \vec{F}_k

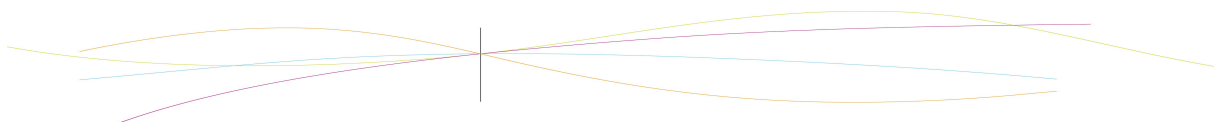
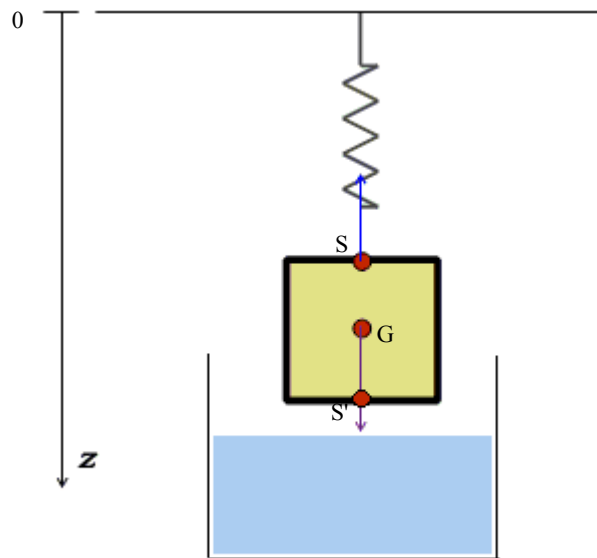
- x **direction** : verticale
- x **sens** : vers le haut
- x **point d'application** : le point S de contact entre le ressort et la masse
- x **norme** : $\vec{F}_k = -k.z.\vec{u}_z$

- la poussée d'Archimède $\vec{\pi}$

- x **direction** : verticale
- x **sens** : vers le haut
- x **point d'application** : le centre de gravité G
- x **norme** : $\vec{\pi} = -\rho_{eau}.g.V_{liq}.\vec{u}_z$ avec $\rho_{eau}=1$

- les frottements fluides \vec{F}_f

- x **direction** : verticale
- x **sens** : vers le haut
- x **point d'application** : le point S' de contact entre la masse et le fluide
- x **norme** : $\vec{F}_f = -\alpha.v.\vec{u}_z$ où v est la vitesse instantanée du mobile et α une constante positive



On utilise le PFD avec les forces citées précédemment :

$$\vec{P} + \vec{Fk} + \vec{\pi} + \vec{Ff} = m \cdot \vec{a}$$

$$\Leftrightarrow P \cdot \vec{u}_z - Fk \cdot \vec{u}_z - g \cdot V_{liq} \cdot \vec{u}_z - Ff \cdot \vec{u}_z = m \cdot a \cdot \vec{u}_z$$

On projette sur \vec{u}_z et on remplace par les valeurs de chaque membre (note : on prend $z_0=0$). On obtient alors l'équation différentielle suivante :

$$m \cdot g - k \cdot z - g \cdot V_{liq} - \alpha \cdot \frac{dz}{dt} = m \cdot \frac{d^2z}{dt^2}$$

$$\Leftrightarrow m \cdot g - k \cdot z - g \cdot V_{liq} - \alpha \cdot z' = m \cdot z''$$

$$\Leftrightarrow m \cdot z'' + \alpha \cdot z' + k \cdot z = m \cdot g - g \cdot V_{liq}$$

$$\Leftrightarrow z'' + \frac{\alpha}{m} \cdot z' + \frac{k}{m} \cdot z = g - \frac{g}{m} \cdot V_{liq}$$

$$\Leftrightarrow z'' + \frac{\alpha}{m} \cdot z' + \omega_0^2 \cdot z = g \cdot \left(1 - \frac{V_{liq}}{m}\right)$$

3.1.3. **Système soumis à des forces de frottements fluides en oscillations entretenues**

On se place dans le référentiel terrestre, considéré galiléen, dans le repère cartésien de vecteurs unitaires $\{ \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z \}$.

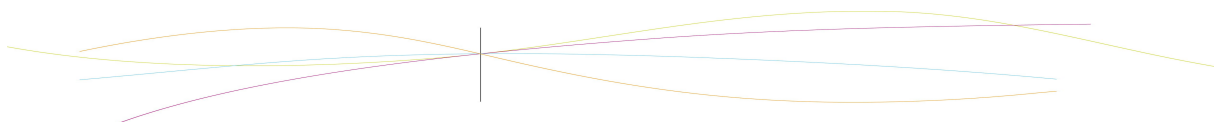
On suspend une masse m à un ressort de raideur k dans un liquide, et on installe un moteur qui entretient les oscillations de la masse. Elle est alors soumise aux forces suivantes :

- le poids \vec{P}

- x **direction** : verticale
- x **sens** : vers le bas
- x **point d'application** : le centre de gravité G
- x **norme** : $\vec{P} = m \cdot g \cdot \vec{u}_z$

- la tension du ressort \vec{Fk}

- x **direction** : verticale
- x **sens** : vers le haut
- x **point d'application** : le point S de contact entre le ressort et la masse
- x **norme** : $\vec{Fk} = -k \cdot z \cdot \vec{u}_z$



- la poussée d'Archimède $\vec{\pi}$

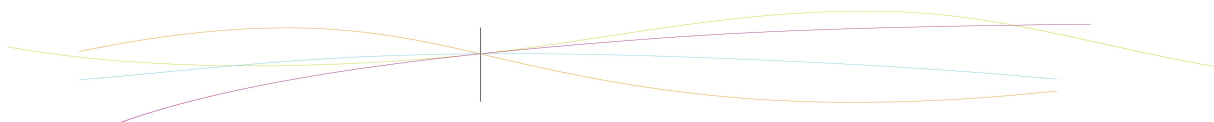
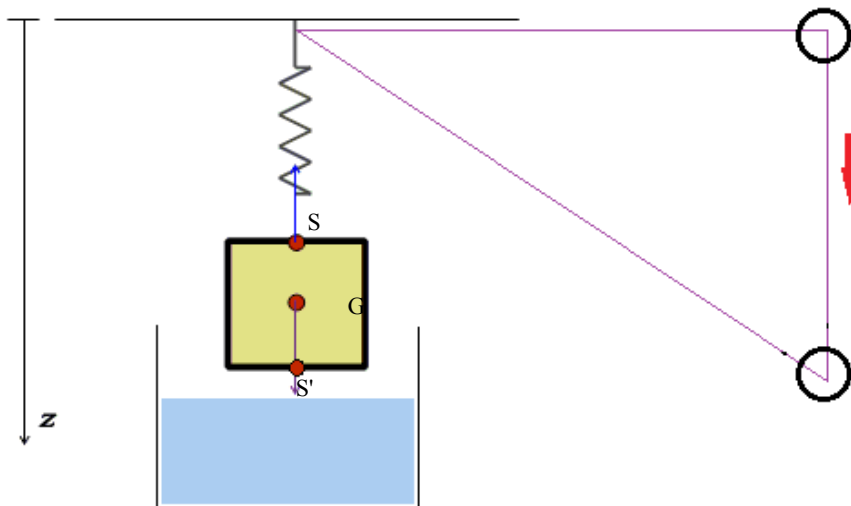
- x **direction** : verticale
- x **sens** : vers le haut
- x **point d'application** : le centre de gravité G
- x **norme** : $\vec{\pi} = -\rho_{eau}.g.V_{liq}.\vec{u}_z$ avec $\rho_{eau}=1$

- les frottements fluides \vec{F}_f

- x **direction** : verticale
- x **sens** : vers le haut
- x **point d'application** : le point S' de contact entre la masse et le fluide
- x **norme** : $\vec{F}_f = -a.v.\vec{u}_z$

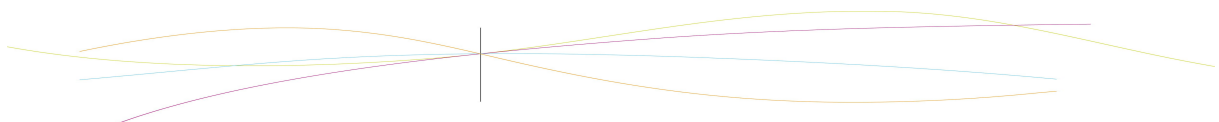
- la force d'excitation sinusoïdale \vec{F}_e

- x **direction** : verticale
- x **sens** : variant (vers le bas puis vers le haut)
- x **point d'application** : le point S
- x **norme** : $\vec{F}_e = F_e.\cos(\omega e.t + \varphi e)$ où F_e est l'amplitude positive, ωe la pulsation et φe la phase



On utilise le PFD et on projette sur \vec{u}_z comme précédemment pour obtenir l'équation différentielle suivante :

$$z'' + \frac{\alpha}{m} \cdot z' + \omega_0^2 \cdot z = g \cdot \left(1 - \frac{V_{liq}}{m}\right) + \frac{F_e}{m} \cdot \cos(\omega_e \cdot t + \varphi_e)$$

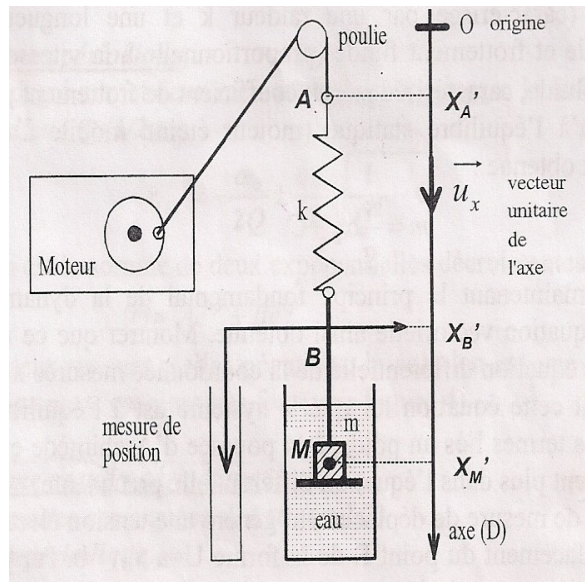


3.2. Travail pratique

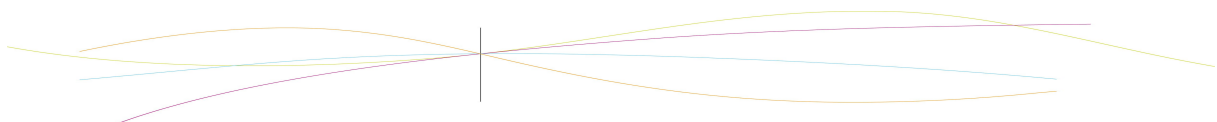
Nous allons maintenant comparer les valeurs théoriques que nous venons de trouver avec des résultats expérimentaux. Pour cela, nous utiliserons le TP de P2 : Mécanique du point matériel de STPI 1, qui nous donne les courbes expérimentales et des valeurs des paramètres des équations.

Les objectifs de ce TP sont d'observer la réponse du système à un déplacement du mobile depuis sa position d'équilibre puis à une excitation périodique dans l'air puis dans l'eau.

On a donc réalisé le montage schématisé ci après, où le système oscillant est un point matériel de masse m (point M) attaché à un ressort (point B) de raideur k lui-même excité périodiquement via le point A dont on peut modifier la vitesse angulaire de rotation.



La mesure de position s'effectue grâce à une éprouvette de solution de sulfate de cuivre de concentration 0.125 mol/L avec des électrodes en cuivre. L'électrolyse qui se produit est du type à anode soluble. Il n'y a donc pas de création d'une force électromotrice et l'ensemble se comporte comme une résistance pure. La tension entre l'électrode mobile et la masse du circuit est visualisée à l'aide du logiciel Synchronie et donne alors une indication linéaire du point B sur l'axe vertical. A l'équilibre, cette tension n'est pas nulle.



1. Système statique

On retire le tube à eau de façon à laisser libre une masse initiale de 50g sur l'oscillateur et on éteint le moteur. On positionne ensuite successivement différentes masses sur le dispositif et on mesure à l'aide d'une règle les différentes positions d'équilibre $x_{B'}$. On trace sur Synchronie la figure $m=f(x_{B'})$ pour différentes masses. On effectue une régression linéaire de cette courbe et on en déduit d'après l'équation 1 ci-après, la raideur du ressort.

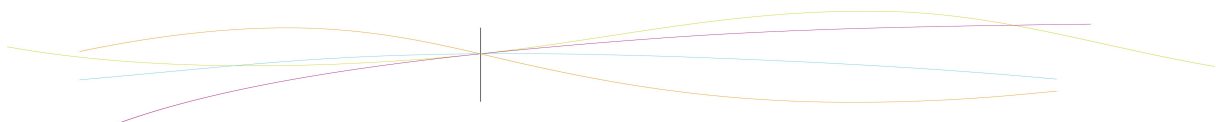
Equation 1 : $m = \frac{k}{g} \cdot x_{B'} + Cste$

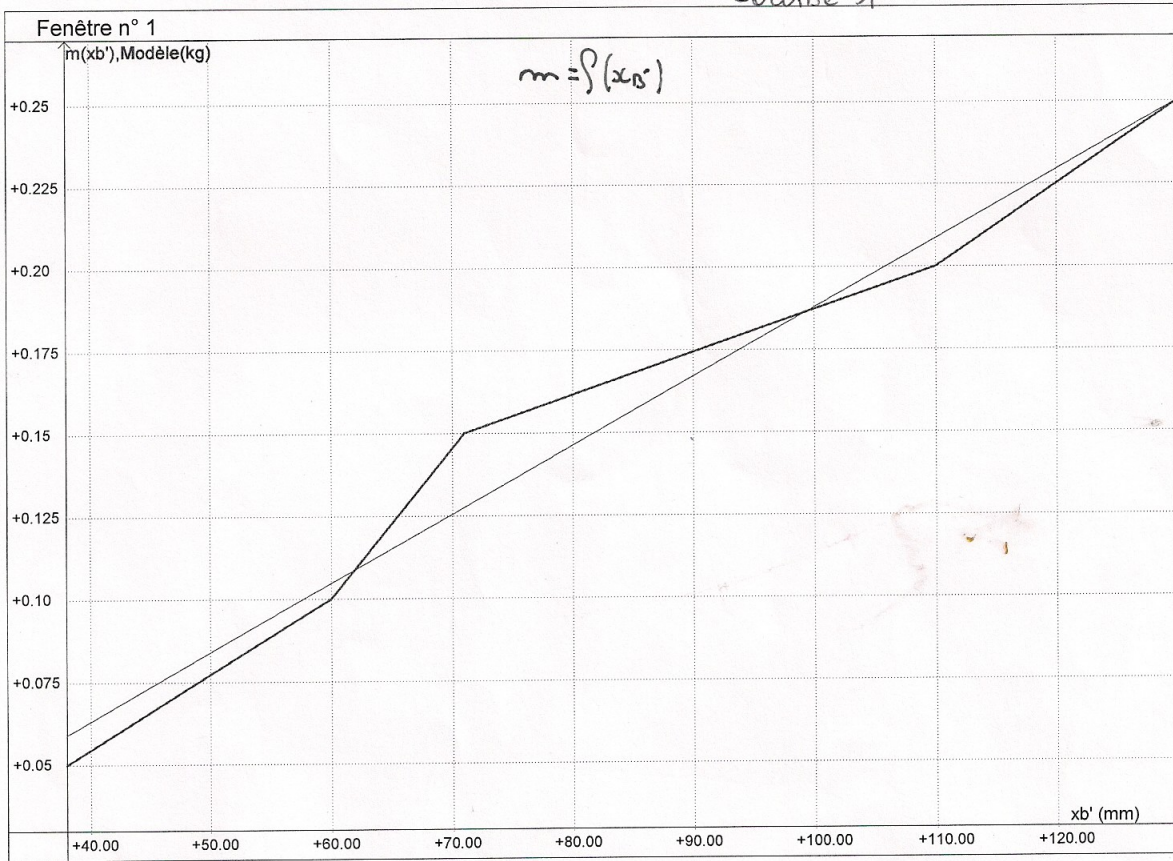
On remarque que cette équation est de la forme $ax+b$. Grâce à la régression linéaire on obtient le coefficient directeur $a=2.078 \text{ kg/m}$. Donc, par identification, $k=a.g=9,81 \cdot 2,078=20,4\text{N/m}$.

On détermine ainsi la pulsation propre ω_0 pour une masse $m=100\text{g}$:

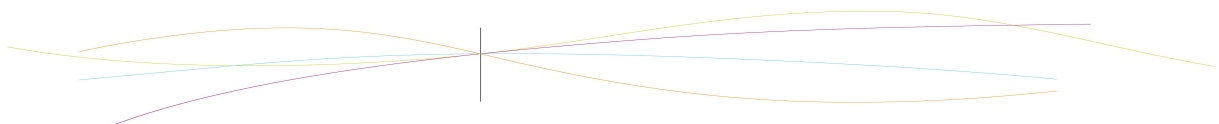
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\left(\frac{20,4}{100 \cdot 10^{-3}}\right)} = 14,3 \text{ rad/s}$$

m (en g)	50	100	150	200	250
$x_{B'}$ (en cm)	3,8	6	7,1	11	13



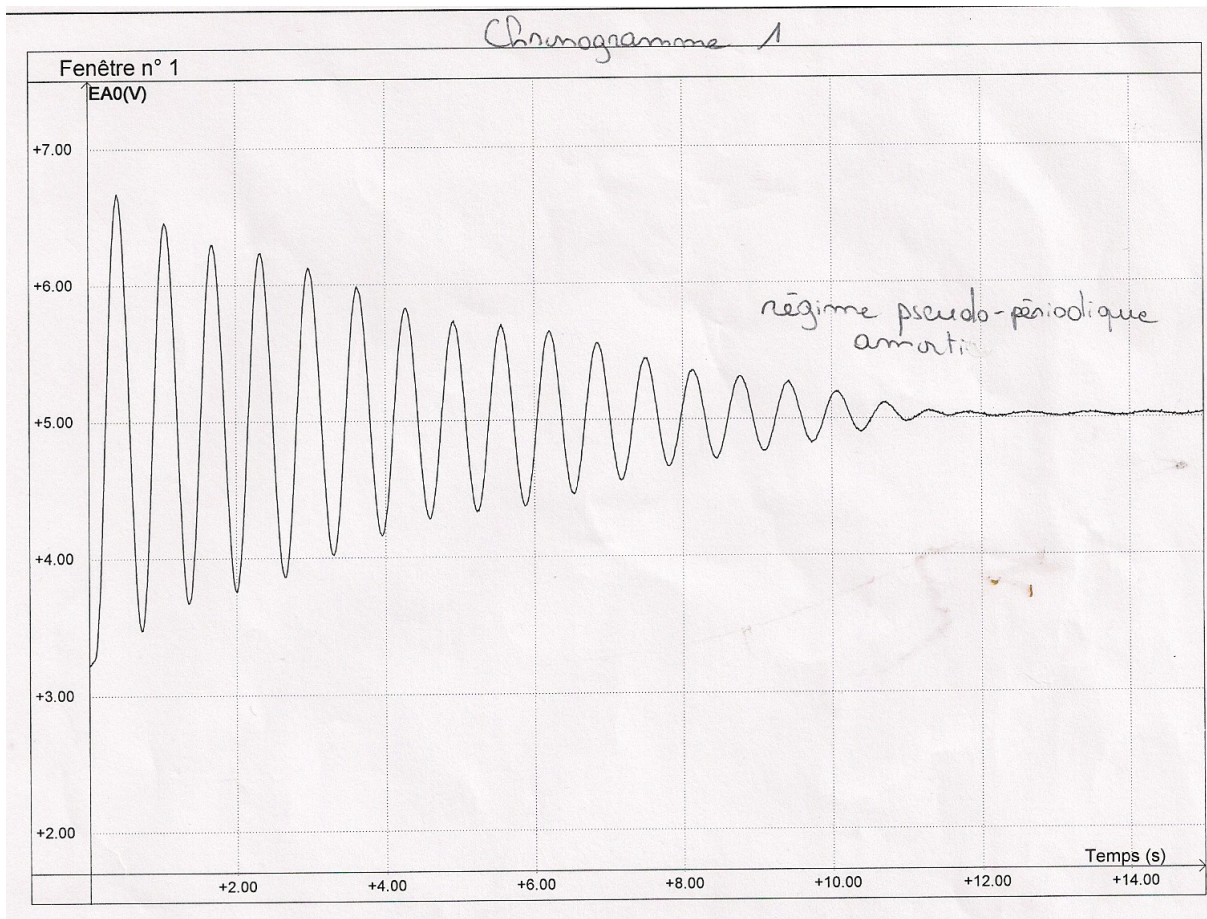


Modélisation de la position d'équilibre du ressort en fonction de la masse



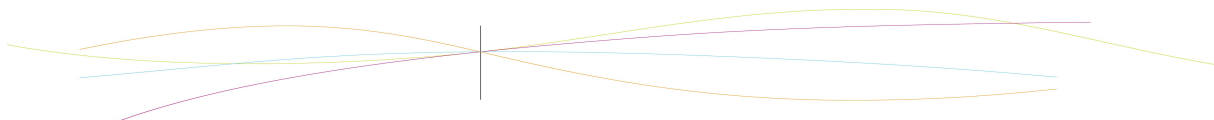
2. Régime pseudo-périodique

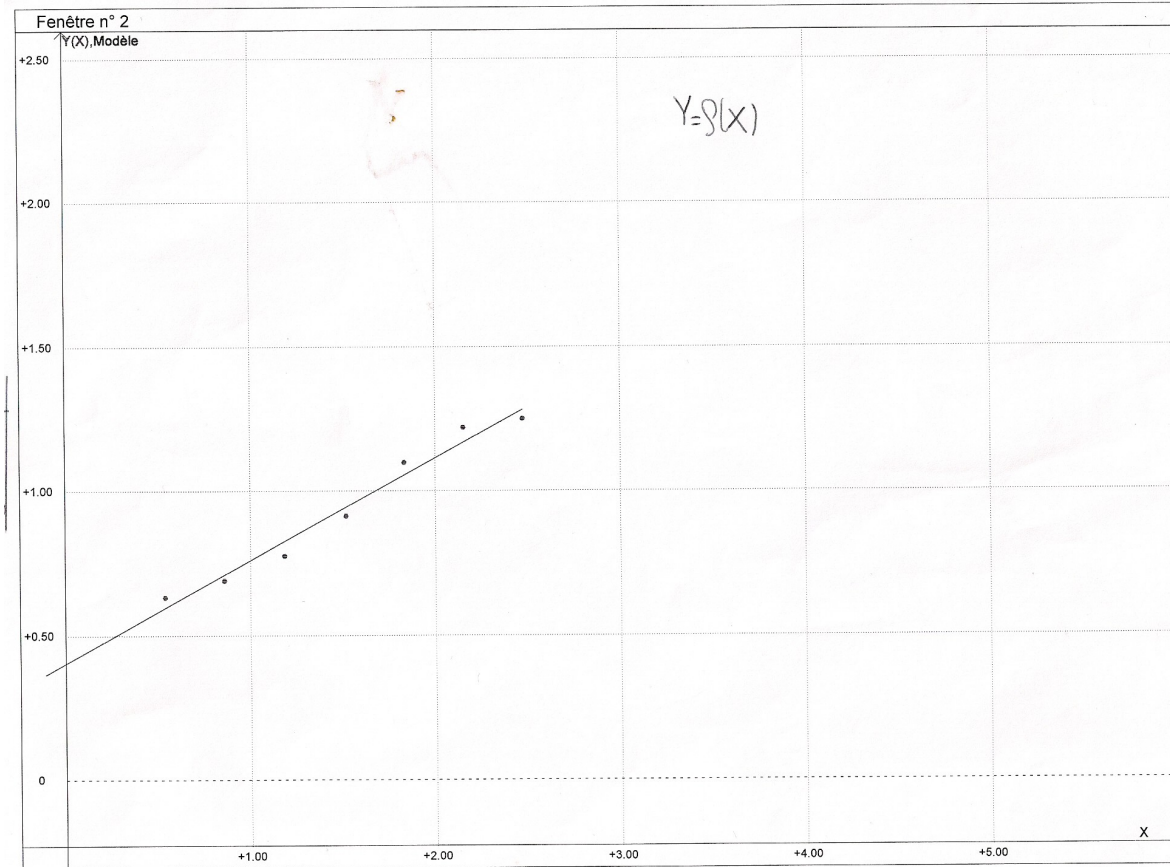
On ne replace pas encore le tube à eau et le moteur reste éteint. On prend ensuite comme masse $m=100g$, puis on tend le ressort. Après l'avoir maintenu, on relâche la masse sans vitesse puis nous avons pu observer le chronogramme décrivant le régime pseudo-périodique ci-dessous à l'aide de synchronie :



Oscillations associées au régime transitoire dans l'air

On effectue ensuite la méthode du décrétement logarithmique telle que décrite dans le sujet du TP, on relève pour cela les couples tN et yN sur l'oscillogramme et on les reporte dans le tableau. On obtient ainsi une droite en traçant $Y(N) = \ln(y1/yN)$ en fonction de $X(N)=(tN-t1)/2$ de coefficient directeur a correspondant au rapport ω_0/Q (avec ω_0 la pulsation propre et Q le facteur de qualité (permet de caractériser le régime transitoire)) :

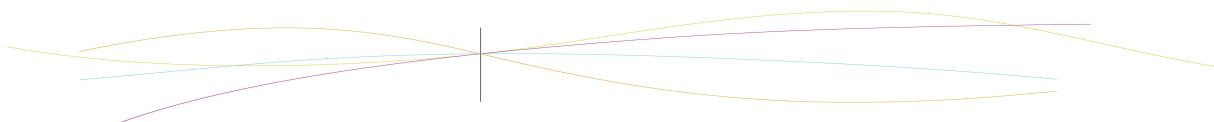


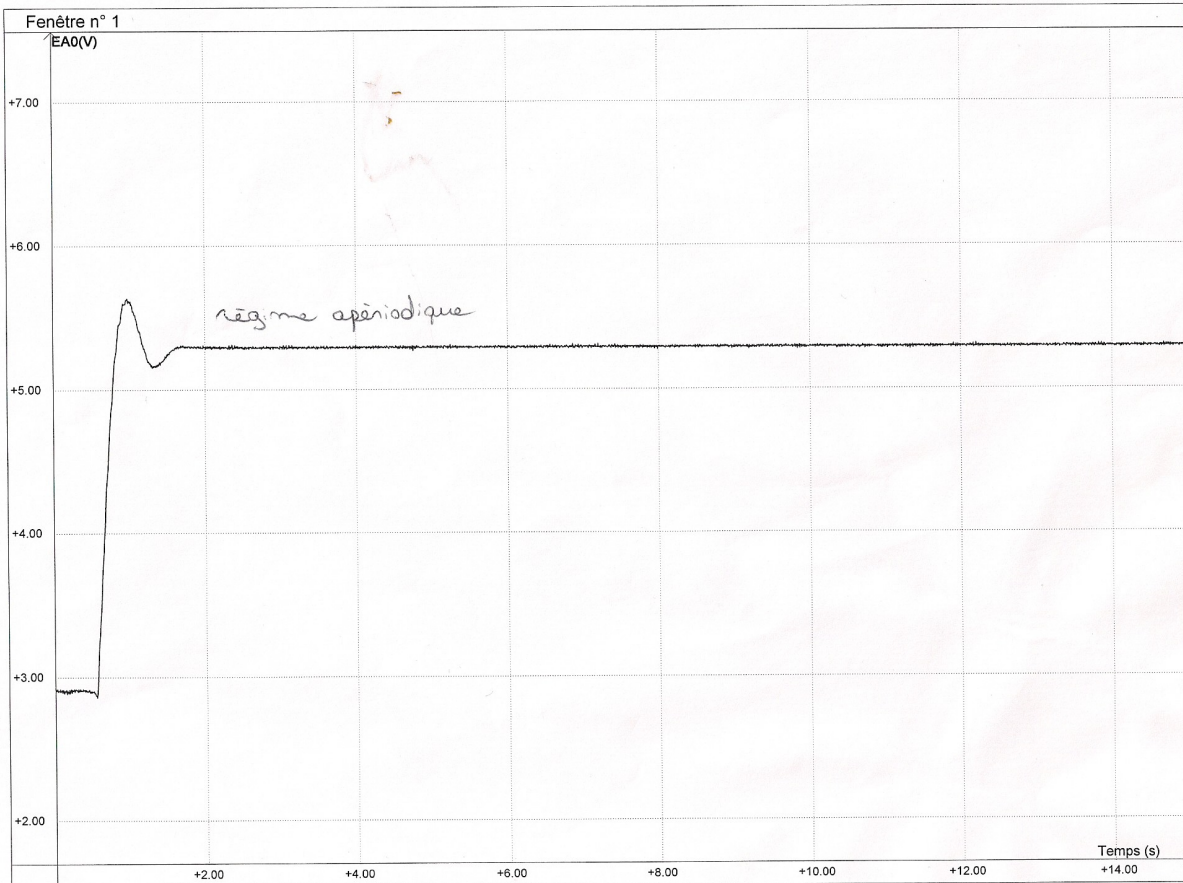


Modélisation de Y(N) en fonction de X(N) grâce à la méthode du décrément logarithmique

On trouve : $a = 0,355$ or $a = \omega_0/Q$ donc $Q = \omega_0/a = 14,3/0,355 = 39,2$. De plus d'après l'identification de la question 5 de la préparation on a : $Q = \frac{\sqrt{mk}}{\mu}$ on en déduit ainsi le coefficient de frottement : $\mu = \frac{\sqrt{(20,4 * 100 * 10^{-3})}}{39,2} = 3,6 * 10^{-2} \text{ kg/s}$

On met maintenant de l'eau dans le tube et nous ré-effectuons la même manipulation :





Oscillations associées au régime transitoire dans l'eau

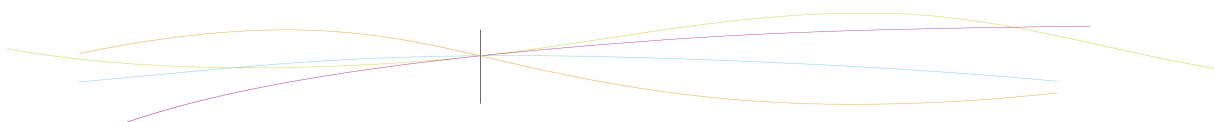
On se rend ainsi compte que l'on ne peut pas appliquer la méthode du décrément logarithmique car il n'y a qu'un « pic » sur la courbe. Du fait de l'eau, il y a trop de frottements pour avoir un régime pseudo-périodique lors des oscillations, contrairement aux oscillations dans l'air qui permettent cette méthode pour déterminer Q et également μ .

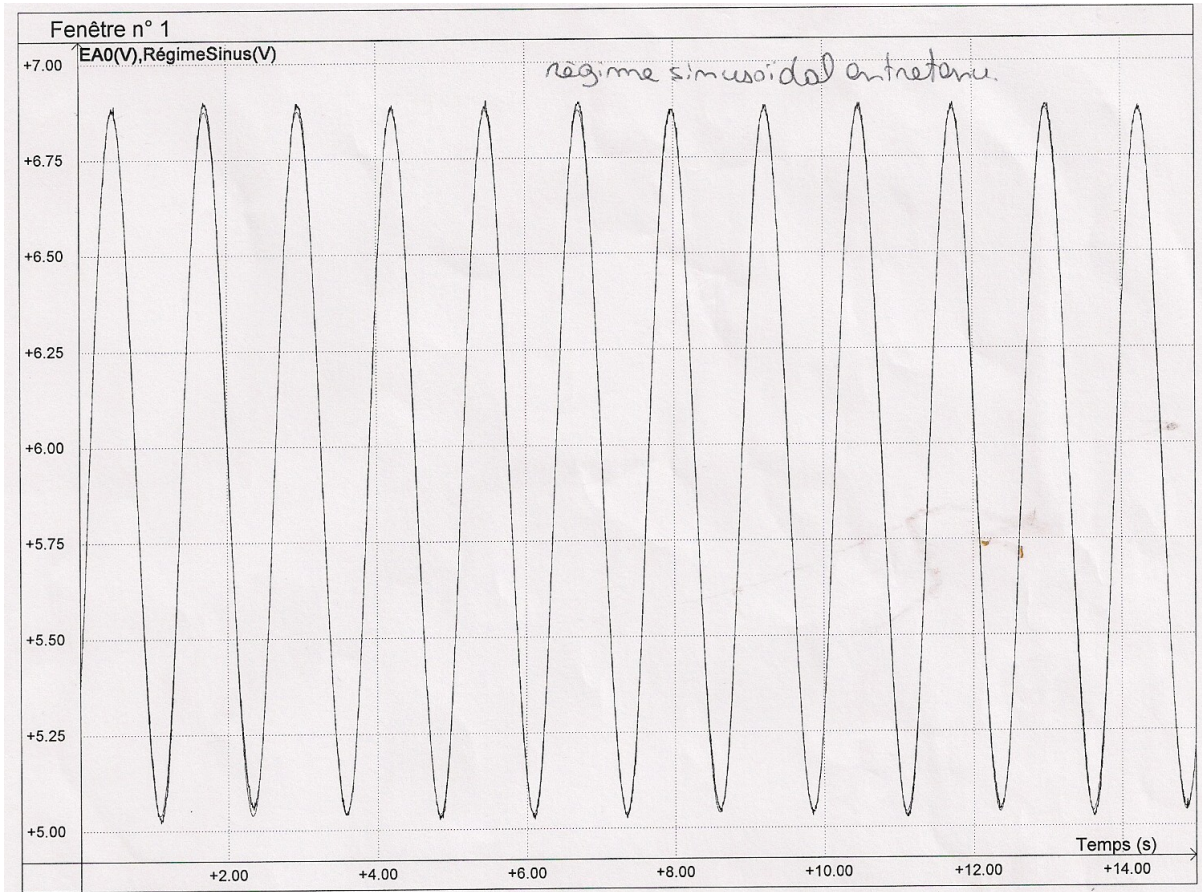
3. Régime sinusoïdal

On étudie maintenant le régime sinusoïdal entretenu en munissant la masse m d'une ficelle reliée à un moteur à faible vitesse angulaire. On prend $1,2 \text{ Hz}$ pour la fréquence de rotation du moteur, les coefficients relevés sont alors :

$V_0 = 5,33V$; $V_m = 0,74V$ (amplitude) ; $F_0 = 1,2 \text{ Hz}$

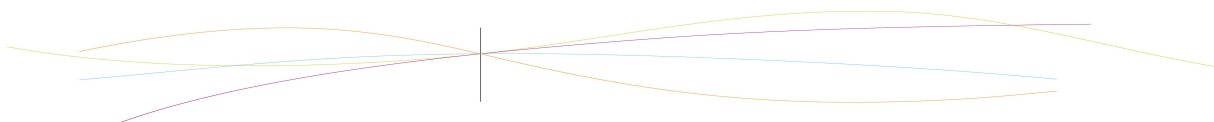
On étudie ensuite la masse m reliée au ressort. On prend différentes fréquences et on peut observer différents chronogrammes, on relève les différentes amplitudes et on les rapporte dans le tableau présent sur le tableur. On obtient donc le chronogramme 3 associé à la fréquence du moteur $f = 0,8 \text{ Hz}$ et d'amplitude $V_m = 0,92V$:

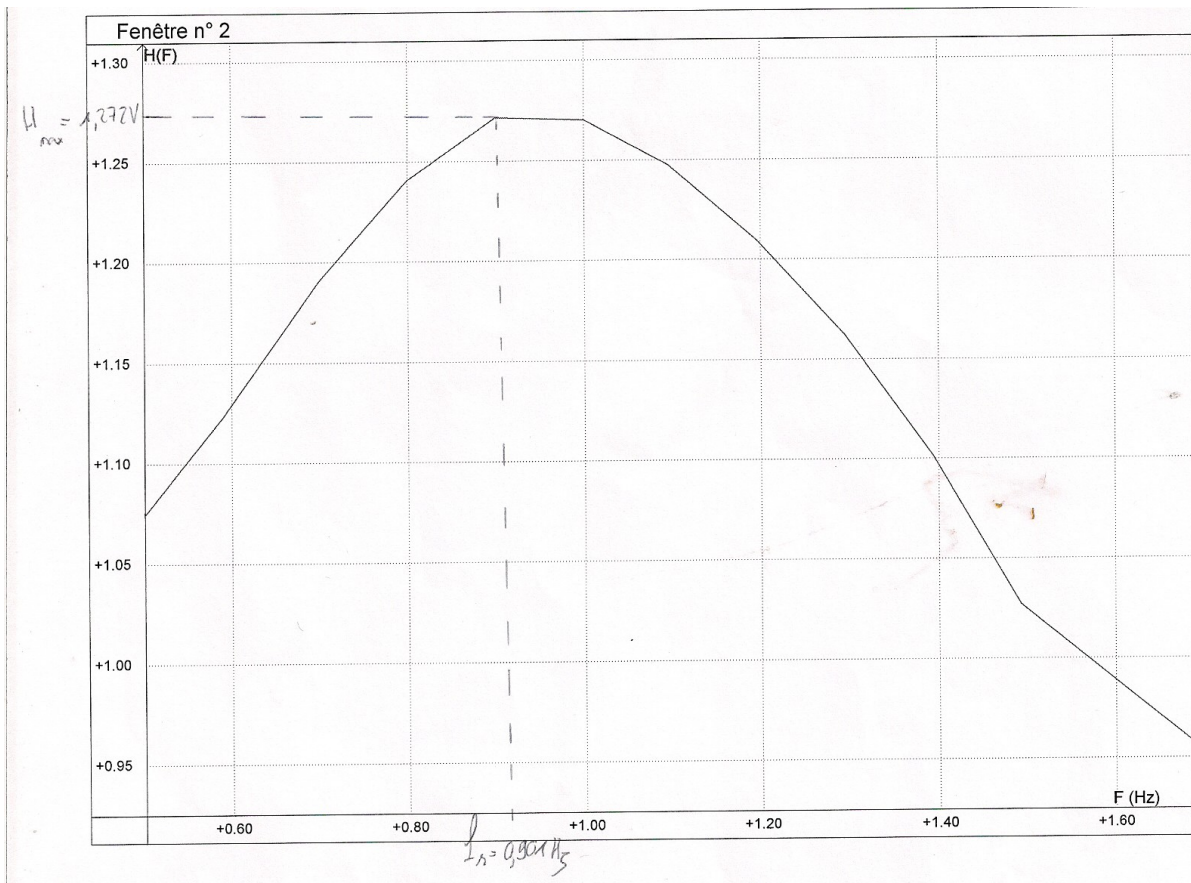




Oscillations associées à la masse reliée par un ressort en présence du moteur

D'après les connaissances théoriques apportées dans le TP, on sait que la relation entre l'excitatrice et la réponse du système se définit à l'aide de la fonction de transfert H et que sa norme correspond au rapport de l'amplitude du mobile par celle de l'excitatrice : $H = Y/X = \text{amplitude}/\text{amplitude rigide}$. Grâce au relevé des différentes fréquences et à l'onglet « Calcul » dans synchronie, on calcule cette norme pour chaque point mesuré et on obtient ainsi cette courbe :





Variation de la norme de la fonction de transfert H en fonction de la fréquence

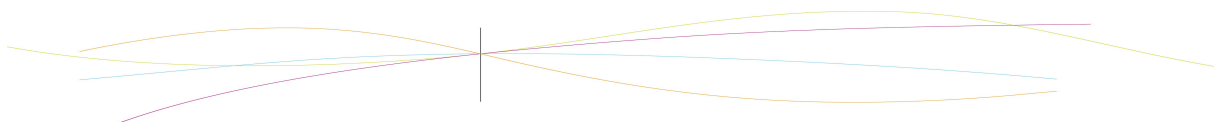
On observe qu'à partir d'une certaine fréquence ($f = 0,90 \text{ Hz}$) la norme de la fonction de transfert diminue. D'après la courbe on trouve $H_{max} = 1,272$ pour une fréquence de résonance associée $f_r = 0,901 \text{ Hz}$.

On cherche ensuite à évaluer le facteur de qualité Q, pour cela nous utilisons l'équation 7 de la préparation :

Equation 7 : $Q = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 - \left(\frac{\omega r}{\omega_0} \right)^2 \right)^{-\left(\frac{1}{2}\right)}$ or on a $\omega r = 2\pi f r = 5,7 \text{ rad/s}$ et d'après 1. on a $\omega_0 = 14,3 \text{ rad/s}$ donc après application numérique on trouve : $Q = 0,77$.

On peut ainsi en déduire le coefficient de frottement : $\mu = \frac{\sqrt{mk}}{Q} = \frac{m\omega_0}{Q} = \frac{14,3}{0,77} = 1,86 \text{ kg/s}$

On cherche maintenant à calculer à partir de l'amplitude à la résonance et à l'aide de l'équation 9 de la préparation une seconde expression de μ pour comparer les deux résultats :



Equation 9 :

$$\mu = \omega_0 m \sqrt{\left(\frac{2}{(H^2_{max} + H_{max} \sqrt{(H^2_{max} - 1)})}\right)} = 1,43 \sqrt{\left(\frac{2}{(1,272^2 + 1,272 \sqrt{(1,272^2 - 1)})}\right)}$$

$$\mu = 1,25 \text{ kg/s}$$

On peut alors déterminer une valeur moyenne x et une incertitude σ : $x = (1,86 + 1,25)/2 = 1,55 \text{ kg/s}$ et
 $\sigma = (1,86 - 1,25)/1,86 = 0,33$ soit une incertitude de 33%.

On détermine maintenant quelle devraient-êre la fréquence de résonance et l'amplification maximale pour le mobile dans l'air grâce au facteur de qualité trouvé en 2. : $Q = 39,2$. D'après la préparation on a :

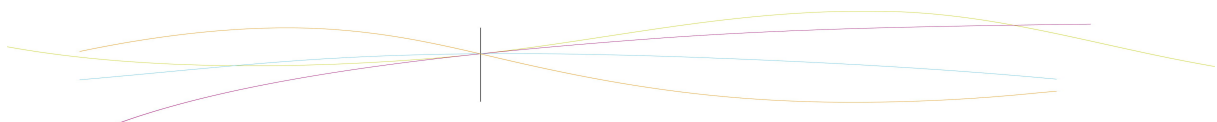
Equation 7 : $\omega r = 2\pi f r = \omega_0 \sqrt{\left(1 - \left(\frac{1}{2Q^2}\right)\right)} \iff f r = 2,28 \text{ Hz}$ et :

Equation 8 : $H_{max} = \frac{Q^2}{(\sqrt{Q^2 - 1/4})} = 39,2$ On aurait donc pas pu déterminer le facteur Q dans l'air avec le dispositif mis à disposition car la fréquence de résonance et l'amplitude sont trop importantes pour être supportées par le dispositif.

Conclusion : Nous avons à disposition deux manières pour calculer le facteur de qualité répondant aux conditions expérimentales différentes : le décrément logarithmique dans l'air et une méthode passant par l'étude de l'amplitude des oscillations dans l'eau. Chacun adaptée à ses propres conditions.

Les valeurs trouvées sont différentes donc on ne sait pas laquelle est la meilleure, c'est pourquoi on choisit la valeur moyenne

$$k = 20,4 \text{ N/m} ; \mu_{air} = 3,6 \cdot 10^{-2} \text{ kg/s} \text{ et } \mu_{eau} = 1,55 \text{ kg/s.}$$



3.3. Méthode numérique Runge-Kutta 4

Considérons le problème suivant :

$$y' = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0$$

La méthode RK4 est donnée par l'équation :

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

où

$$k_1 = f(t_n, y_n)$$

$$k_2 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1\right)$$

$$k_3 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_2\right)$$

$$k_4 = f(t_n + h, y_n + hk_3)$$

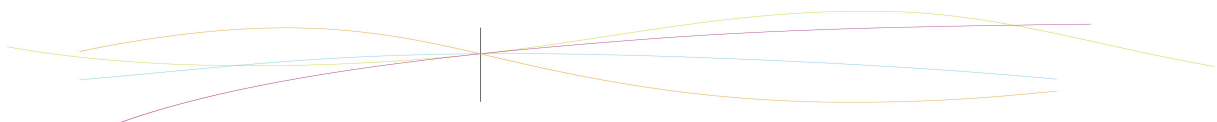
L'idée est que la valeur suivante (y_{n+1}) est approchée par la somme de la valeur actuelle (y_n) et du produit de la taille de l'intervalle (h) par la pente estimée. La pente est obtenue par une moyenne pondérée de pentes :

k_1 est la pente au début de l'intervalle ;

k_2 est la pente au milieu de l'intervalle, en utilisant la pente k_1 pour calculer la valeur de y au point $t_n + h/2$ par le biais de la méthode d'Euler ;

k_3 est de nouveau la pente au milieu de l'intervalle, mais obtenue cette fois en utilisant la pente k_2 pour calculer y ;

k_4 est la pente à la fin de l'intervalle, avec la valeur de y calculée en utilisant k_3 .



Dans la moyenne des quatre pentes, un poids plus grand est donné aux pentes au point milieu.



La méthode RK4 est une méthode d'ordre 4, ce qui signifie que l'erreur commise à chaque étape est de l'ordre de h^5 , alors que l'erreur totale accumulée est de l'ordre de h^4 .

Ces formules sont aussi valables pour des fonctions à valeurs vectorielles.

La méthode RK4 est une méthode d'ordre 4, ce qui signifie que l'erreur commise à chaque étape est de l'ordre de h^5 , alors que l'erreur totale accumulée est de l'ordre de h^4 . Ces formules sont aussi valables pour des fonctions à valeurs vectorielles.

Une façon de garantir l'exactitude dans la solution d'une IVP est de résoudre le problème à deux reprises avec étape tailles h et de comparer les réponses à la maille des points correspondant à la taille de la plus grande étape. Mais cela nécessite une quantité importante de calcul pour la petite taille de l'étape et doit être répété si on détermine que l'accord n'est pas assez bon. La méthode de Runge-Kutta-Fehlberg (notée RKF45) est une façon d'essayer de résoudre ce problème. Il dispose d'une procédure pour déterminer si la bonne taille de l'étape h est utilisée. A chaque étape, deux approximations différentes pour la solution sont faites et comparées. Si les deux réponses sont en accord, le rapprochement est accepté. Si les deux réponses ne correspondent pas à une précision spécifiée, la taille du pas est réduite. Si les réponses correspondent avec plus de chiffres significatifs que nécessaire, la taille du pas est augmentée.

Chaque étape de Runge-Kutta-Fehlberg nécessite l'utilisation des six valeurs suivantes:

$$k_1 = h f(t_j, Y_j)$$

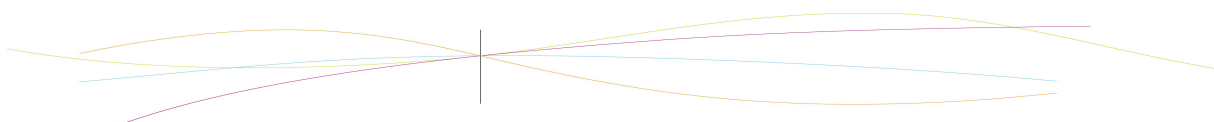
$$k_2 = h f\left(t_j + \frac{1}{4} h, Y_j + \frac{1}{4} k_1\right)$$

$$k_3 = h f\left(t_j + \frac{3}{8} h, Y_j + \frac{3}{32} k_1 + \frac{9}{32} k_2\right)$$

$$k_4 = h f\left(t_j + \frac{12}{13} h, Y_j + \frac{1932}{2197} k_1 - \frac{7200}{2197} k_2 + \frac{7296}{2197} k_3\right)$$

$$k_5 = h f\left(t_j + h, Y_j + \frac{439}{216} k_1 - 8 k_2 + \frac{3680}{513} k_3 - \frac{845}{4104} k_4\right)$$

$$k_6 = h f\left(t_j + \frac{1}{2} h, Y_j - \frac{8}{27} k_1 + 2 k_2 - \frac{3544}{2565} k_3 + \frac{1859}{4104} k_4 - \frac{11}{40} k_5\right)$$

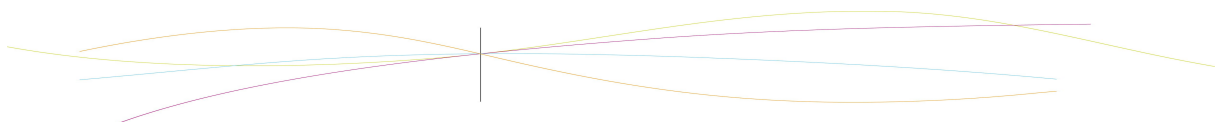


Puis une approximation de la solution de l'IVP est faite en utilisant une méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 :

$$Y_{j+1} = Y_j + \frac{25}{216} k_1 + \frac{1408}{2565} k_2 + \frac{2197}{4104} k_4 - \frac{1}{5} k_5$$

Et une meilleure valeur pour la solution est déterminée en utilisant une méthode de Runge-Kutta d'ordre 5:

$$z_{j+1} = Y_j + \frac{16}{135} k_1 + \frac{6656}{12825} k_2 + \frac{28561}{56430} k_4 - \frac{9}{50} k_5 + \frac{2}{55} k_6$$



3.4. Partie simulation

▼ **Equation différentielle homogène du second ordre du système masse-ressort sans frottement et sans moteur(théorique)**

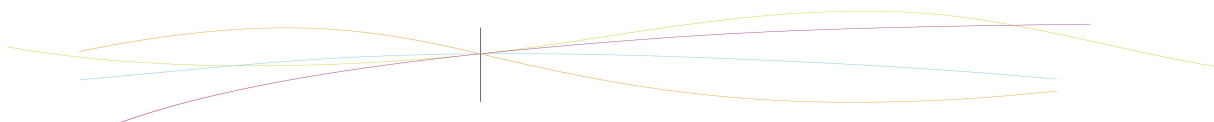
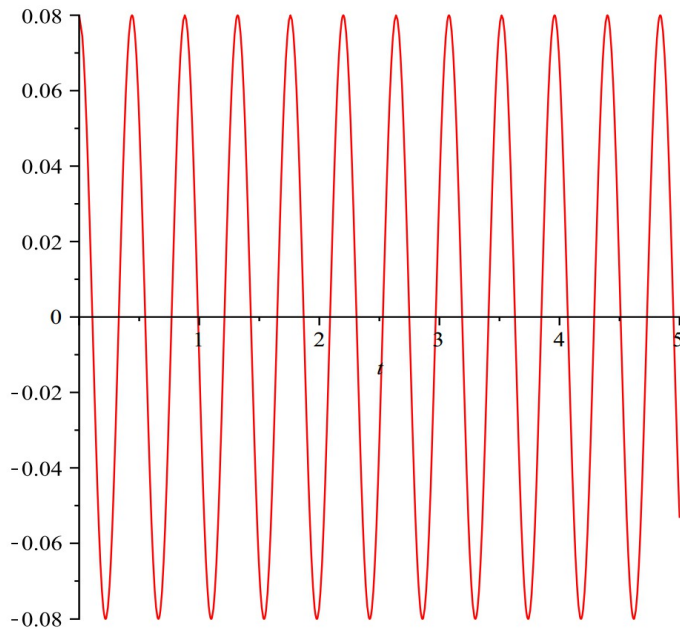
```
> restart
> dsolve({diff(y(t), t, t) + ω[0]^2·y(t) = 0, D(y)(0) = 0, y(0) = y[0]}, y(t));
      y(t) = y0 cos(ω0 t) (1.1.1)
```

▼ **Equation différentielle homogène du second ordre du système masse-ressort sans frottement et sans moteur**

```
> m := 0.1; k := 20.4; s0 := dsolve({m·diff(y(t), t, t) + k·y(t) = 0, D(y)(0) = 0, y(0) = 0.08}, y(t)); g := 9.8; g/k;
      m := 0.1
      k := 20.4
      s0 := y(t) = 2/25 cos(2√51 t)
      g := 9.8
      0.4803921569 (2.1)
```

```
> ω[0] := sqrt(k/m); evalf(%); T := 2·π/ω[0]; evalf(%);
      ω0 := 14.28285686
      14.28285686
      T := 0.1400280084 π
      0.4399109625 (2.2)
```

```
> plot(rhs(s0), t=0..5);
```

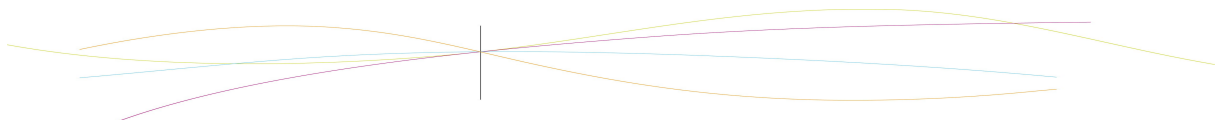
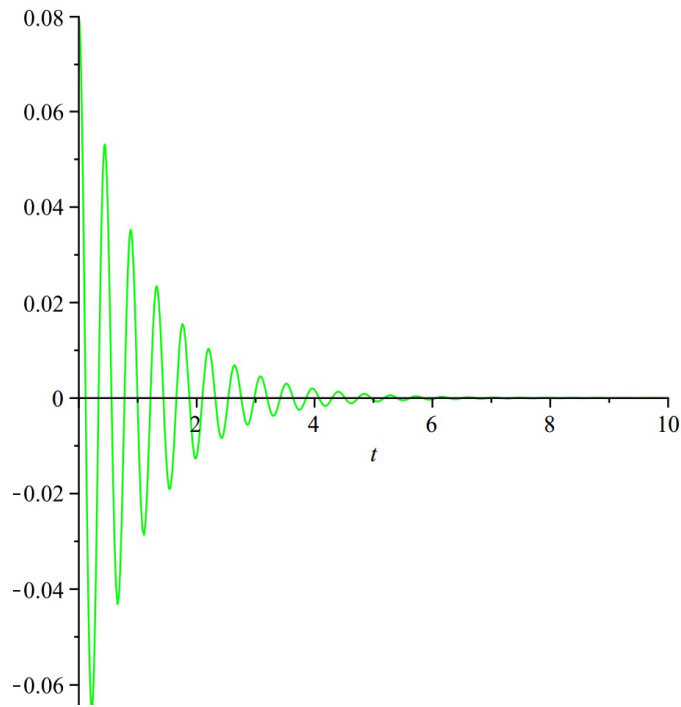


Equation différentielle homogène du second ordre du système masse-ressort avec frottement de l'air et sans moteur

```

> m := 0.1; k := 20.4; α := 0.186; ω[0]2 :=  $\frac{k}{m}$ ;
s1 := dsolve( { diff(y(t), t, t) + ω[0]2·y(t) +  $\frac{\alpha}{m}$ ·diff(y(t), t) = 0, D(y)(0) = 0, y(0) = 0.08 }, y(t) );
s1 := y(t) =  $\frac{186}{50906275} e^{-\frac{93}{100} t} \sin\left(\frac{1}{100} \sqrt{2036251} t\right) \sqrt{2036251}$ 
+  $\frac{2}{25} e^{-\frac{93}{100} t} \cos\left(\frac{1}{100} \sqrt{2036251} t\right)$ 
> plot(rhs(s1), t=0..10, color=green)

```



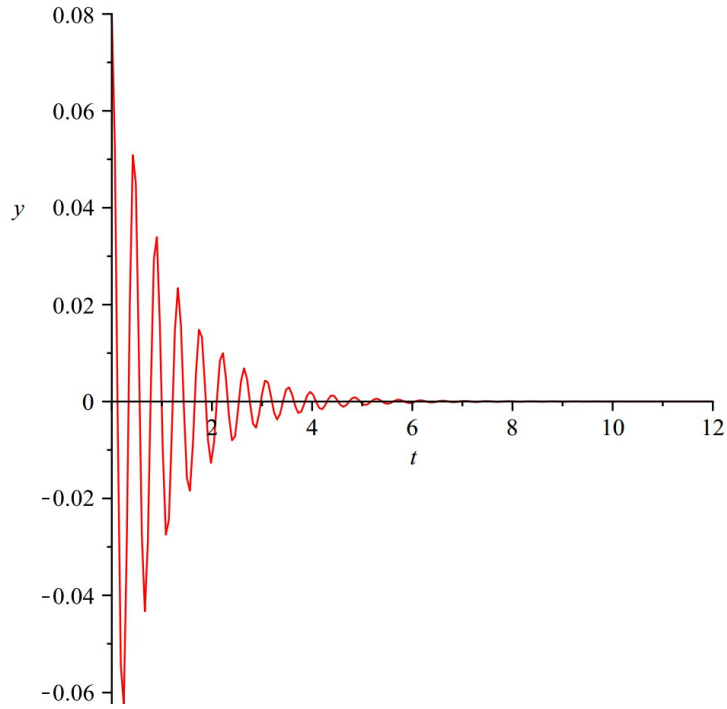
```
> ini := y(0) = 0.08, D(y)(0) = 0;
                               ini := y(0) = 0.08, D(y)(0) = 0
```

(3.2)

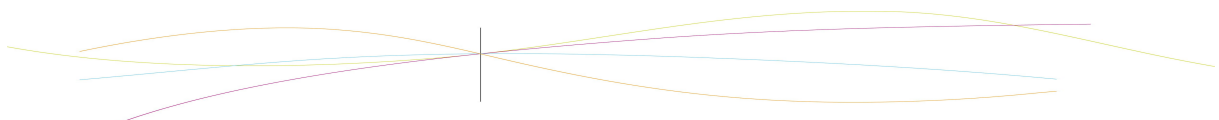
```
> sol := dsolve( {ge, ini}, {y(t)}, type = numeric)
                               sol := proc(x_rkf45) ... end proc
```

(3.3)

```
> with(plots) : odeplot(sol, [t, y(t)], 0..12)
```



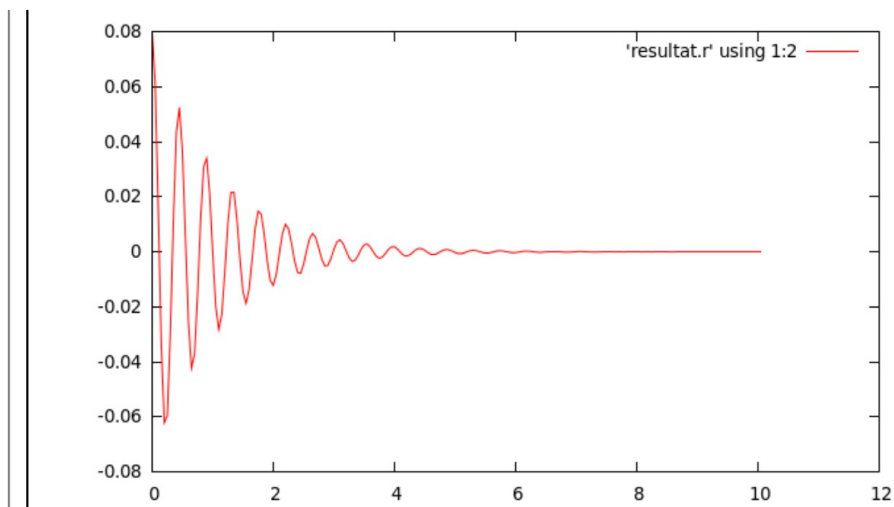
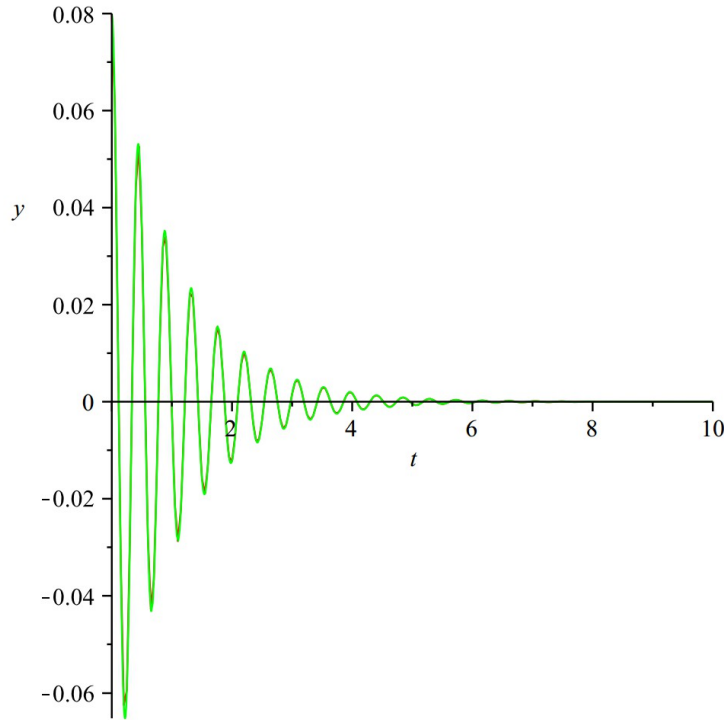
```
> sol(0.1)
[ t=0.1, y(t) = 0.0151497400847601, d/dt y(t) = -1.03383166357551 ]
```

(3.4)


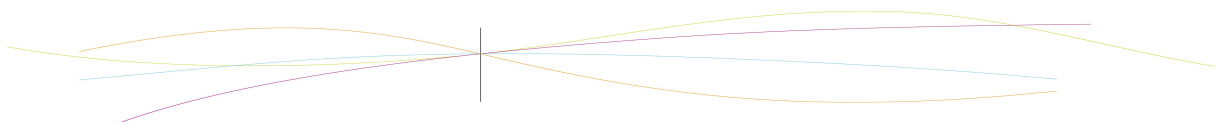
La courbe exacte et la courbe en methode RK45

```
> with(plots) : display( { plot(rhs(s1), t=0..10, color=green), odeplot(sol, [t, y(t)], 0..10) } )
```

La courbe verte est la courbe de solution exacte, la courbe rouge est résolue par la méthode numérique RK45. Elle montre que la méthode RK45 est assez précise car on trouve presque la même courbe.



Nous remarquons que le système ne peut pas entretenir les oscillations à cause de sans moteur.



Equation différentielle homogène du second ordre du système masse-ressort avec frottement de l'eau et avec moteur

```

> with(DEtools);
> m := 0.1; α := 0.186; ω[0] := 14.3; x := t→0.918·cos(5.03 t);
      m := 0.1
      α := 0.186
      ω0 := 14.3
      x := t→0.918 cos(5.03 t)
  
```

$$de := \frac{d^2}{dt^2} y(t) = -\omega[0]^2 \cdot y(t) - \frac{\alpha \left(\frac{d}{dt} y(t) \right)}{m} + \frac{k}{m} \cdot x(t) \tag{4.1}$$

$$de := \frac{d^2}{dt^2} y(t) = -204.49 y(t) - 1.860000000 \left(\frac{d}{dt} y(t) \right) + 187.2720000 \cos(5.03 t) \tag{4.2}$$

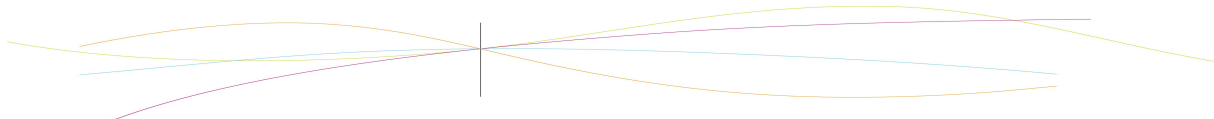
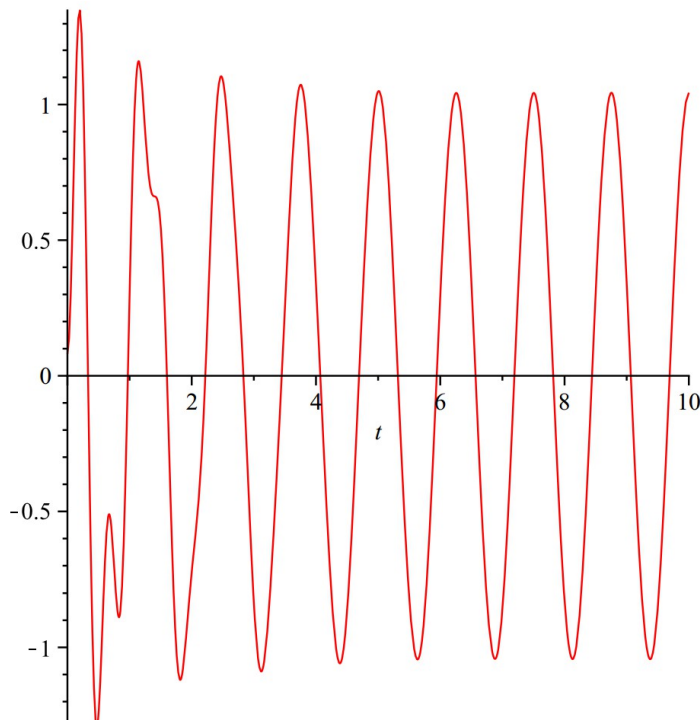
```

> s0 := dsolve( {de, D(y)(0) = 0, y(0) = 0.08}, y(t) )
s0 := y(t) = - \frac{12295967726262}{214247306833957075} e^{-\frac{93}{100} t} \sin\left(\frac{1}{100} \sqrt{2036251} t\right) \sqrt{2036251}
      - \frac{101246405134}{105216550825} e^{-\frac{93}{100} t} \cos\left(\frac{1}{100} \sqrt{2036251} t\right) + \frac{229029984}{4208662033} \sin\left(\frac{503}{100} t\right)
  
```

$$+ \frac{4386549168}{4208662033} \cos\left(\frac{503}{100} t\right)$$

```

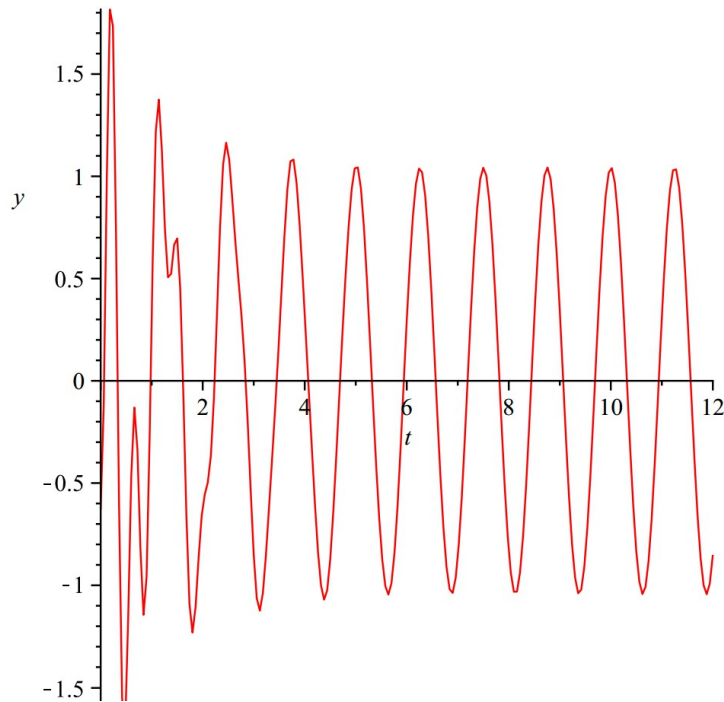
> plot(rhs(s0), t=0..10);
  
```



```

> ini := y(0) = -0.63, D(y)(0) = 0;
      ini := y(0) = -0.63, D(y)(0) = 0
(4.4)
> sol := dsolve( {de, ini}, {y(t)}, type=numeric);
      sol := proc(x_rkf45) ... end proc
(4.5)
> sol(0)
      [t=0., y(t) = -0.6300000000000000, d/dt y(t) = 0.]
(4.6)
> sol(10)
      [t=10., y(t) = 1.04357239779144, d/dt y(t) = 0.0905128713762784]
(4.7)
> with(plots) : odeplot(sol, [t, y(t)], 0..12);

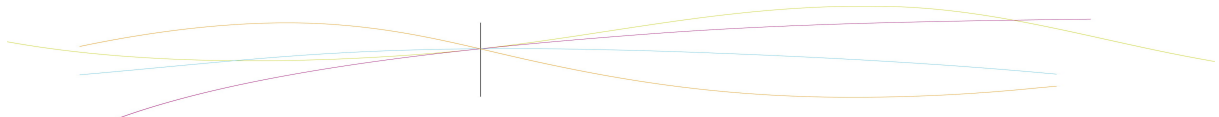
```



```

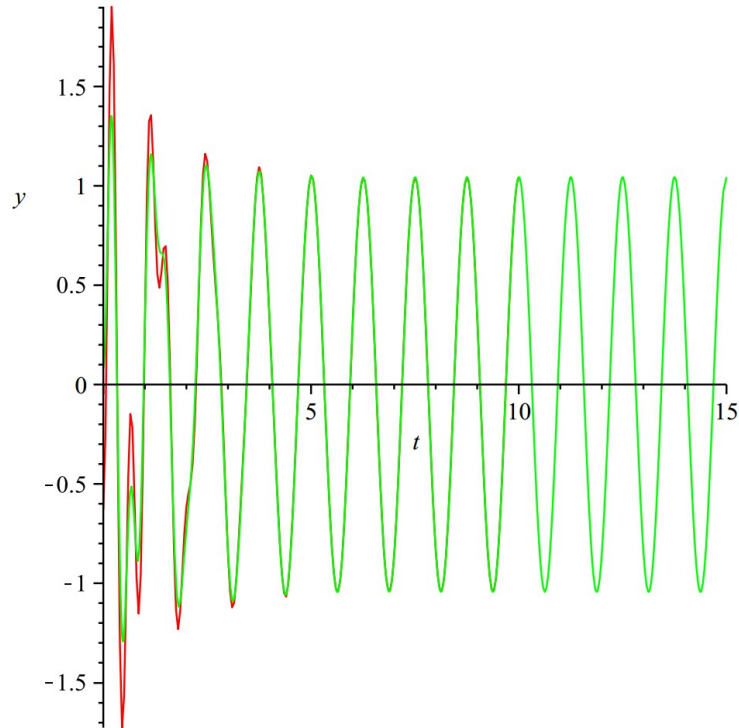
> eval([t, y(t)], sol(0))
      [0., -0.6300000000000000]
(4.8)

```



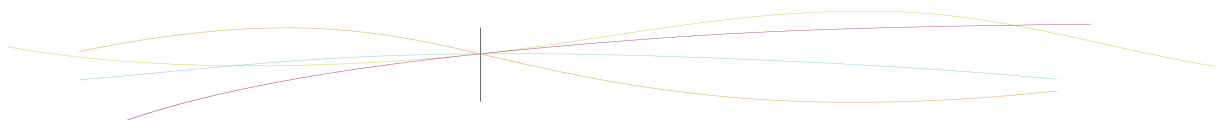
La courbe exact et la courbe en methode RK45

```
> with(plots) : display( { plot(rhs(s0), t=0..15, color=green), odeplot(sol, [t, y(t)], 0..10) }
```

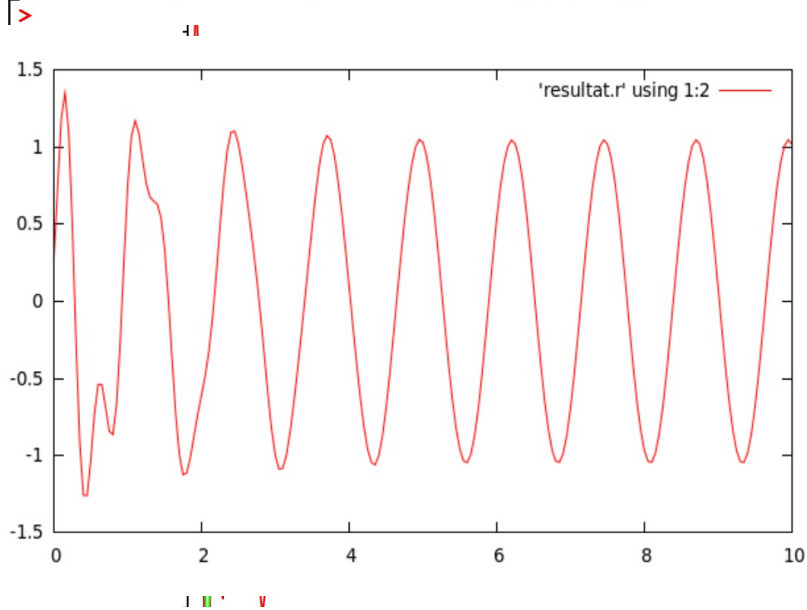


Après un temps, l'oscillation est stabilisée par le moteur

```
ω[0] := sqrt( k / m ); evalf(%); T := 2 * π / ω[0]; evalf(%);
```



La courbe par RK4 (avec Pascal et gnuplot)



Dans les codes, on peut trouver qu'on a choisi

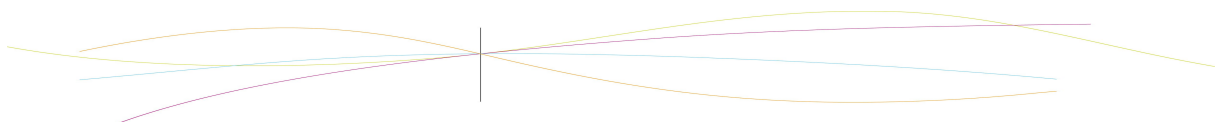
$$\frac{d^2}{dt^2} y(t) = -204.49 y(t) - 1.860000000 \left(\frac{d}{dt} y(t) \right) + 187.2720000 \cos(5.03 t)$$

comme équation différentielle, et utiliser les données dans notre TP :

$$\omega[0] := \sqrt{\frac{k}{m}} = 14.3 ; m := 0.1 ; \alpha := 0.186 ; x := t \rightarrow 0.918 ; \cos(5.03 t)$$

Avec logicielle Maple, nous pouvons résoudre directement les solutions exactes et comparer avec les courbes de RK45.

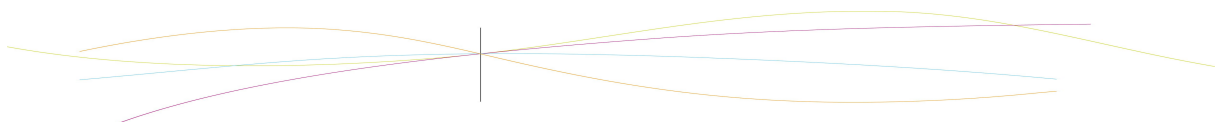
Et avec logiciel pascal et outil Gnuplot, nous pouvons réaliser la méthode RK4



4. CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

Dans ce projet, nous avons pu reprendre nos différents résultats du travail pratique de mécanique du point de STPI 1 portant sur ce même sujet du système masse-ressort. Pour cela, il nous a fallu revoir certaines notions mathématiques et en apprendre d'autres, telles que la méthode de résolution numérique RK4. Grâce à ce projet nous avons donc pu perfectionner nos connaissances du logiciel Maple et du langage Pascal, et ce afin de mettre en parallèle nos observations théoriques de première année avec une modélisation théorique du comportement du système masse-ressort dans différents cas.

Le travail effectué a donc beaucoup porté sur la partie mathématique et de modélisation, en plus de la reprise des observations faites lors du TP de mécanique du point. En cela, le projet nous est apparu plutôt mathématique que physique. En effet, si cette dernière restait présente en fond en permanence, nous nous sommes la majeure partie du temps attachés à résoudre les différentes équations différentielles ou encore à trouver une modélisation satisfaisante des différents cas. Pour cette dernière, l'aide du professeur Bernard Gleyse a été extrêmement bienvenue compte tenu des difficultés éprouvées notamment dans le programme Pascal qui s'est trouvé compliqué à élaborer.



5. BIBLIOGRAPHIE

Première approche du système masse-ressort

[1] http://fr.wikipedia.org/wiki/Syst%C3%A8me_masse-ressort

Présentation succincte du système mécanique : notion de degré de liberté, forces de rappel, d'amortissement et force extérieure

[2] <http://www.chimix.com/an4/term4/pendule.htm>

Quelques définitions : notions d'amplitude, phénomènes de résonance, oscillations libres et forcées

[3] http://fpassebon.pagesperso-orange.fr/oscillateur_mk.html

Etude d'un système masse-ressort seulement horizontal : peu intéressant

Équations de mouvement – Équations différentielles et résolution

[1] http://fr.wikipedia.org/wiki/Amortissement_physique

Description du phénomène d'amortissement appliqué au système masse-ressort : équation différentielle caractéristique et régime transitoire

[2] http://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve_tulloue/Meca/Oscillateurs/ressort_rsf.html

Animation flash : oscillateur mécanique en régime sinusoïdal forcé – équation de mouvement et aide à la résolution

[3] <http://www.al.lu/physics/Downloads/Premi%C3%A8re/Travaux%20pratiques/TP2%20Oscillateurs%20harmoniques.pdf>

Résolution de l'équation différentielle du mouvement

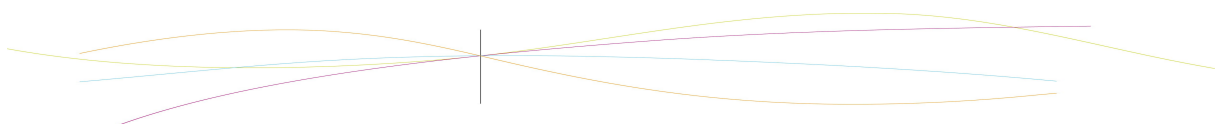
[4] <http://www.scribd.com/doc/33746910/Equations-Et-Systemes-Differentiels>

Livre en ligne concernant l'établissement des équations différentielles et leurs résolutions selon les différents degrés de liberté – *Equations et systèmes différentiels* de P.Florent G&M.Lauton

[5] http://iramis.cea.fr/spec/GIT/FTP/9_Equations_différentielles.pdf

Résolution d'équation différentielles : méthodes numériques (Euler, Runge-Kuta), méthodes matricielles et utilisation de MatLab

Résolution sous forme matricielle : système avec amortissement fluide



Étude énergétique

[1] http://profs.cmaisonneuve.qc.ca/svezina/nyc/note_nyc/NYC_XXI_Chap%201.6.pdf

Cours de mécanique (PDF) : Oscillation verticale du système masse-ressort et étude énergétique

[2] http://www.uel.education.fr/consultation/reference/physique/syst_oscillants/apprendre/gpb.osc.fa.101.a2/content/access.html

Différents oscillateurs et étude énergétique

Modélisation

[1] http://www.isir.upmc.fr/UserFiles/File/clady_homepage/L2/TP5.pdf

Modélisation avec MatLab

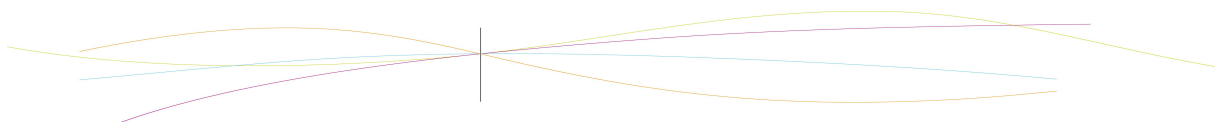
[2] http://www.isir.upmc.fr/UserFiles/File/clady_homepage/L2/TP5.pdf

TP Modélisation et Simulation – Un exemple d'application : mise en relation avec les vibrations (ondes)

Autres sources

[1] TP de P2 – 2010/2011

[2] Documents fournis par le professeur



6. ANNEXES (NON OBLIGATOIRE)

6.1. Listing des programmes utilisés – Code Maple

▼ **Equation différentielle homogène du second ordre du système masse-ressort sans frottement et sans moteur (théorique)**

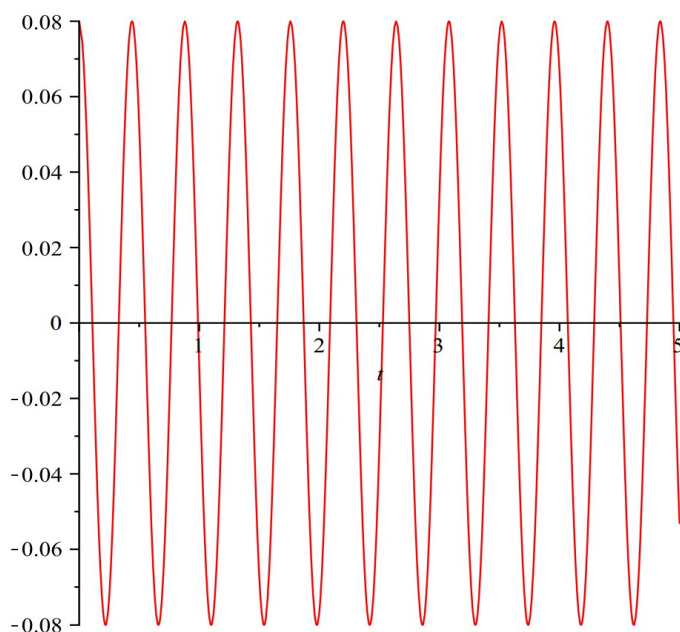
```
> restart
> dsolve({diff(y(t), t, t) + ω[0]2·y(t) = 0, D(y)(0) = 0, y(0) = y[0]}, y(t));
y(t) = y0 cos(ω0 t) (1.1.1)
```

▼ **Equation différentielle homogène du second ordre du système masse-ressort sans frottement et sans moteur**

```
> m := 0.1; k := 20.4; s0 := dsolve({m·diff(y(t), t, t) + k·y(t) = 0, D(y)(0) = 0, y(0)
= 0.08}, y(t)); g := 9.8; g/k;
m := 0.1
k := 20.4
s0 := y(t) = 2/25 cos(2√51 t)
g := 9.8
0.4803921569 (2.1)
```

```
> ω[0] := sqrt(k/m); evalf(%); T := 2·π/ω[0]; evalf(%);
ω0 := 14.28285686
14.28285686
T := 0.1400280084 π
0.4399109625 (2.2)
```

```
> plot(rhs(s0), t = 0 .. 5);
```

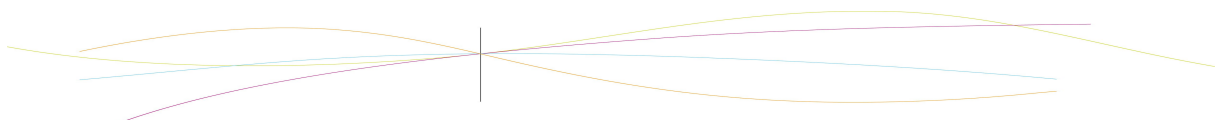
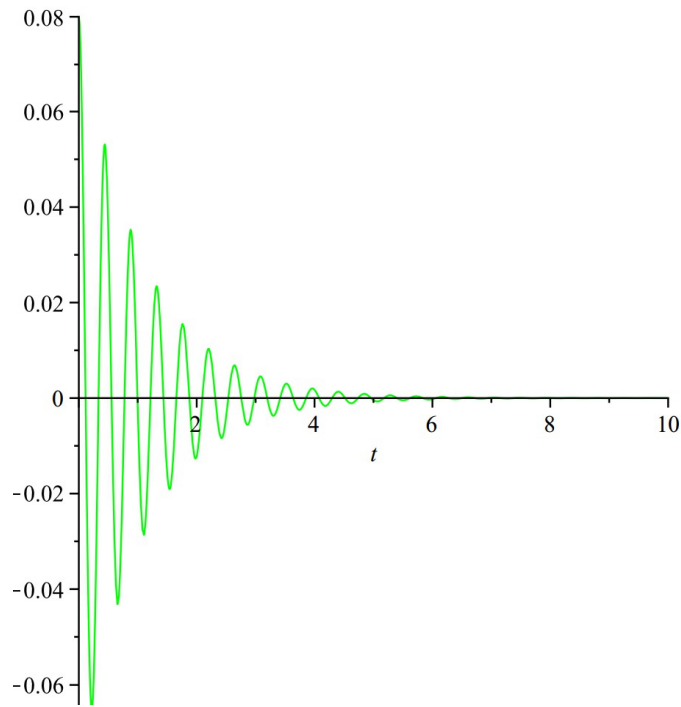


Equation différentielle homogène du second ordre du système masse-ressort avec frottement de l'air et sans moteur

```

> m := 0.1; k := 20.4; α := 0.186; ω[0]2 :=  $\frac{k}{m}$ ;
s1 := dsolve( { diff(y(t), t, t) + ω[0]2·y(t) +  $\frac{\alpha}{m}$ ·diff(y(t), t) = 0, D(y)(0) = 0, y(0) = 0.08 }, y(t) );
s1 := y(t) =  $\frac{186}{50906275} e^{-\frac{93}{100} t} \sin\left(\frac{1}{100} \sqrt{2036251} t\right) \sqrt{2036251}$ 
+  $\frac{2}{25} e^{-\frac{93}{100} t} \cos\left(\frac{1}{100} \sqrt{2036251} t\right)$ 
> plot(rhs(s1), t=0..10, color=green)

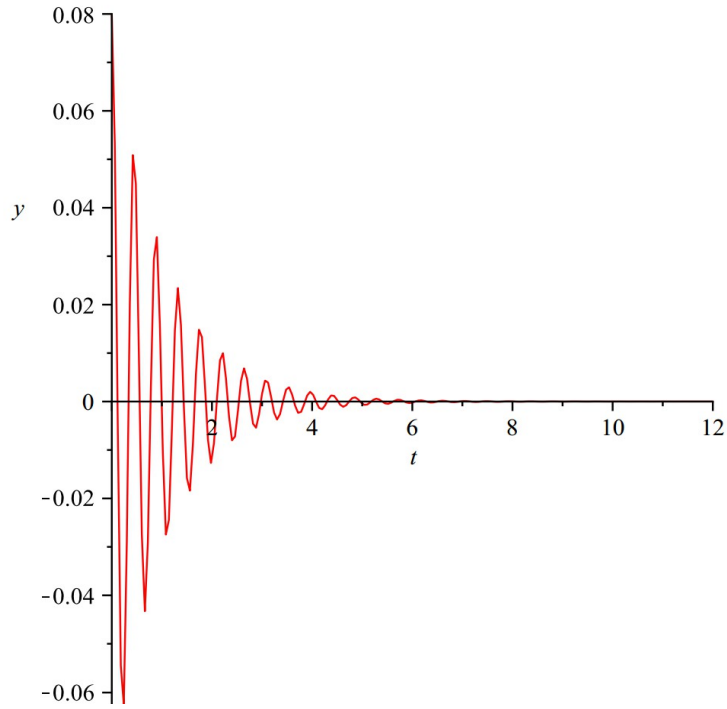
```



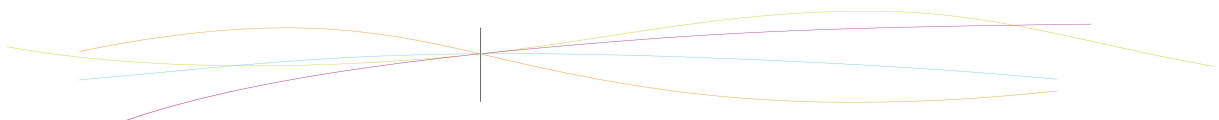
```
> ini := y(0) = 0.08, D(y)(0) = 0;
      ini := y(0) = 0.08, D(y)(0) = 0 (3.2)
```

```
> sol := dsolve( {ge, ini}, {y(t)}, type = numeric)
      sol := proc(x_rkf45) ... end proc (3.3)
```

```
> with(plots) : odeplot(sol, [t, y(t)], 0..12)
```



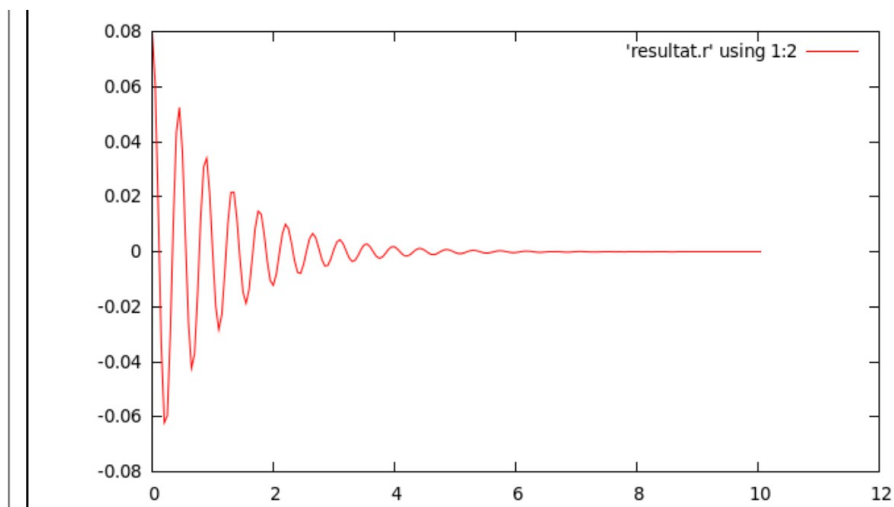
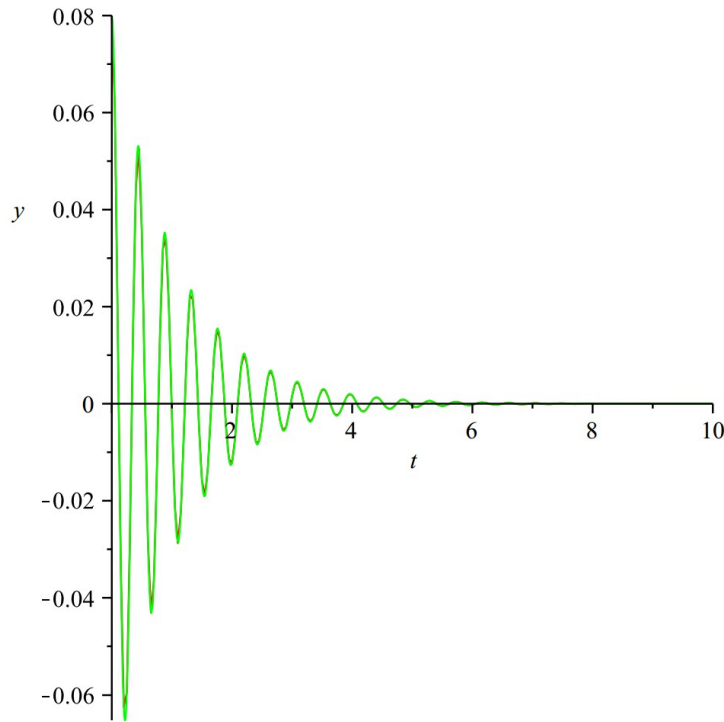
```
> sol(0.1)
      [ t=0.1, y(t) = 0.0151497400847601, d/dt y(t) = -1.03383166357551 ] (3.4)
```



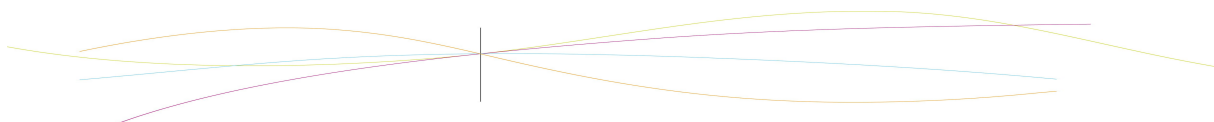
La courbe exacte et la courbe en methode RK45

```
> with(plots) : display( { plot(rhs(s1), t=0..10, color=green), odeplot(sol, [t, y(t)], 0..10) } )
```

La courbe verte est la courbe de solution exacte, la courbe rouge est résolue par la méthode numérique RK45. Elle montre que la méthode RK45 est assez précise car on trouve presque la même courbe.



Nous remarquons que le système ne peut pas entretenir les oscillations à cause de sans moteur.



Equation différentielle homogène du second ordre du système masse-ressort avec frottement de l'eau et avec moteur

```

> with(DEtools);
> m := 0.1; α := 0.186; ω[0] := 14.3; x := t→0.918·cos(5.03 t);
      m := 0.1
      α := 0.186
      ω0 := 14.3
      x := t→0.918 cos(5.03 t)
  
```

$$de := \frac{d^2}{dt^2} y(t) = -\omega[0]^2 \cdot y(t) - \frac{\alpha \left(\frac{d}{dt} y(t) \right)}{m} + \frac{k}{m} \cdot x(t) \tag{4.1}$$

$$de := \frac{d^2}{dt^2} y(t) = -204.49 y(t) - 1.860000000 \left(\frac{d}{dt} y(t) \right) + 187.2720000 \cos(5.03 t) \tag{4.2}$$

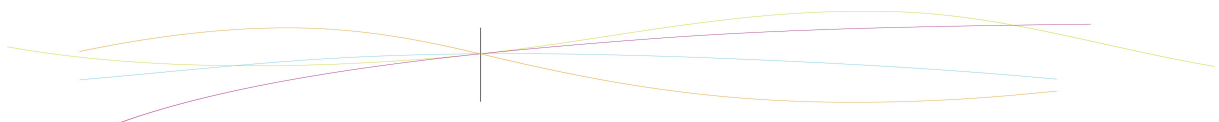
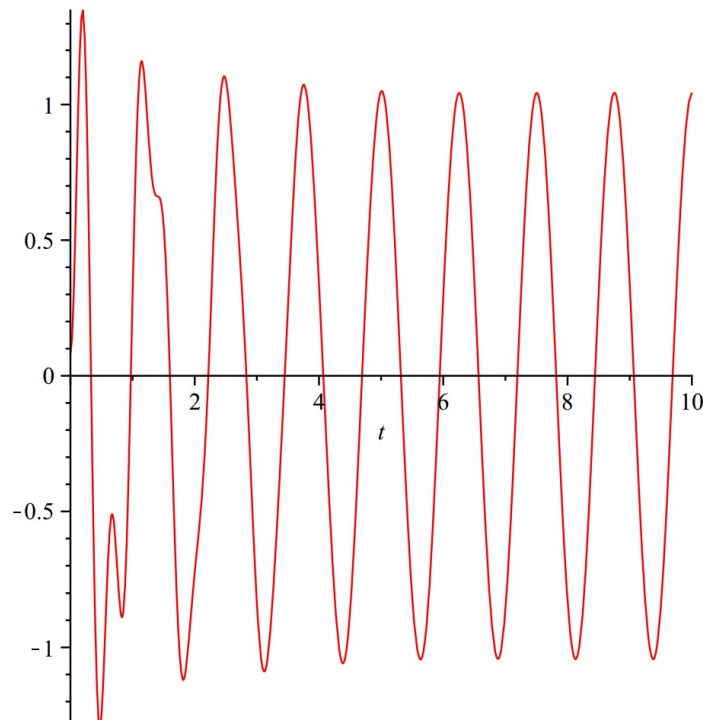
```

> s0 := dsolve( {de, D(y)(0) = 0, y(0) = 0.08 }, y(t) )
s0 := y(t) = - \frac{12295967726262}{214247306833957075} e^{-\frac{93}{100} t} \sin\left(\frac{1}{100} \sqrt{2036251} t\right) \sqrt{2036251}
          - \frac{101246405134}{105216550825} e^{-\frac{93}{100} t} \cos\left(\frac{1}{100} \sqrt{2036251} t\right) + \frac{229029984}{4208662033} \sin\left(\frac{503}{100} t\right)
  
```

$$+ \frac{4386549168}{4208662033} \cos\left(\frac{503}{100} t\right)$$

```

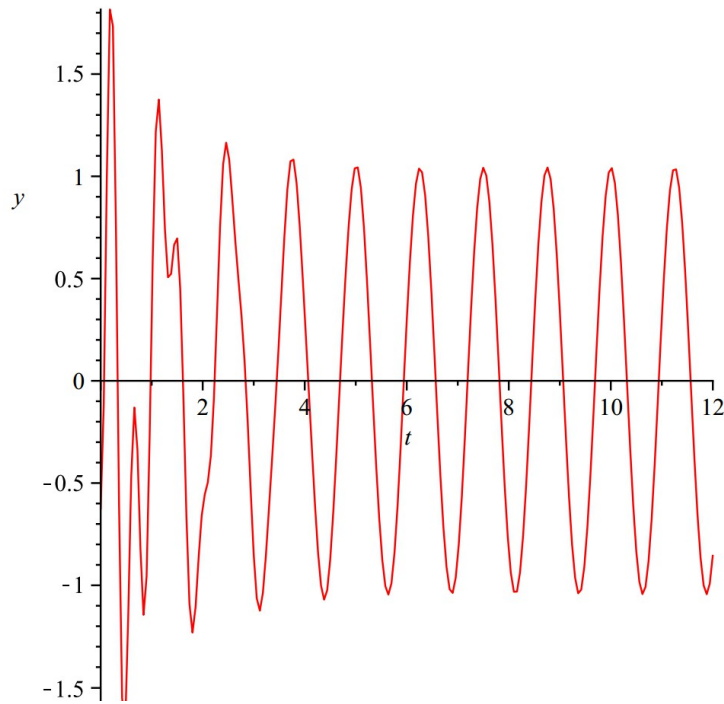
> plot(rhs(s0), t=0..10);
  
```



```

> ini := y(0) = -0.63, D(y)(0) = 0;
      ini := y(0) = -0.63, D(y)(0) = 0
(4.4)
> sol := dsolve( {de, ini}, {y(t)}, type=numeric);
      sol := proc(x_rkf45) ... end proc
(4.5)
> sol(0)
      [t=0., y(t) = -0.6300000000000000, d/dt y(t) = 0.]
(4.6)
> sol(10)
      [t=10., y(t) = 1.04357239779144, d/dt y(t) = 0.0905128713762784]
(4.7)
> with(plots) : odeplot(sol, [t, y(t)], 0..12);

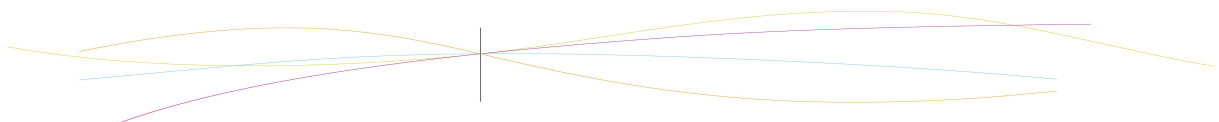
```



```

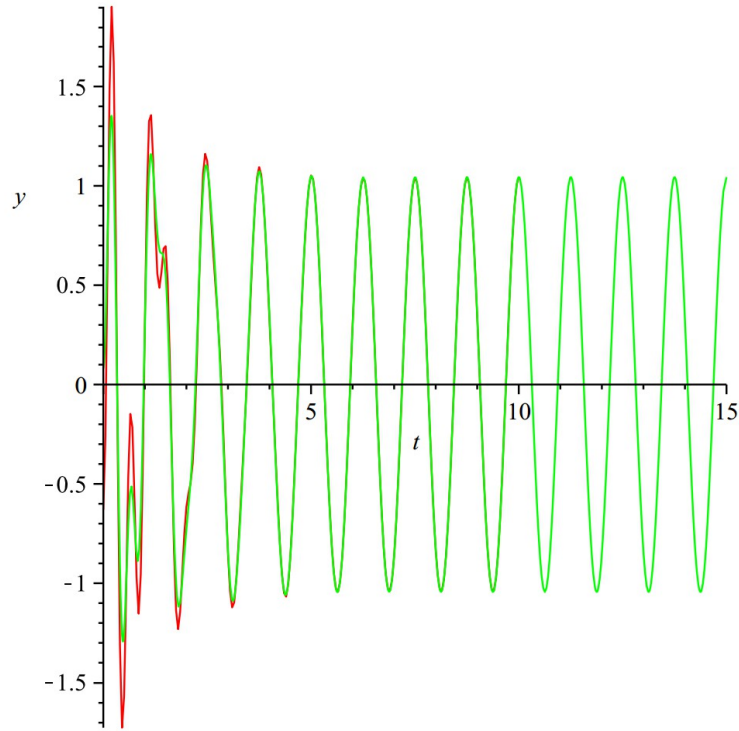
> eval([t, y(t)], sol(0))
      [0., -0.6300000000000000]
(4.8)

```



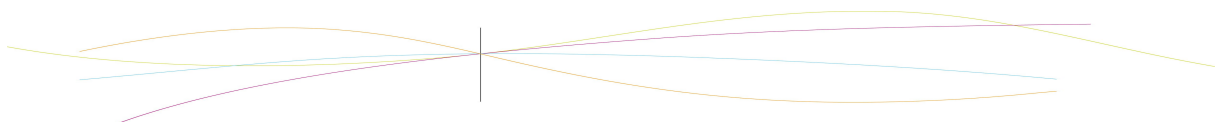
La courbe exact et la courbe en methode RK45

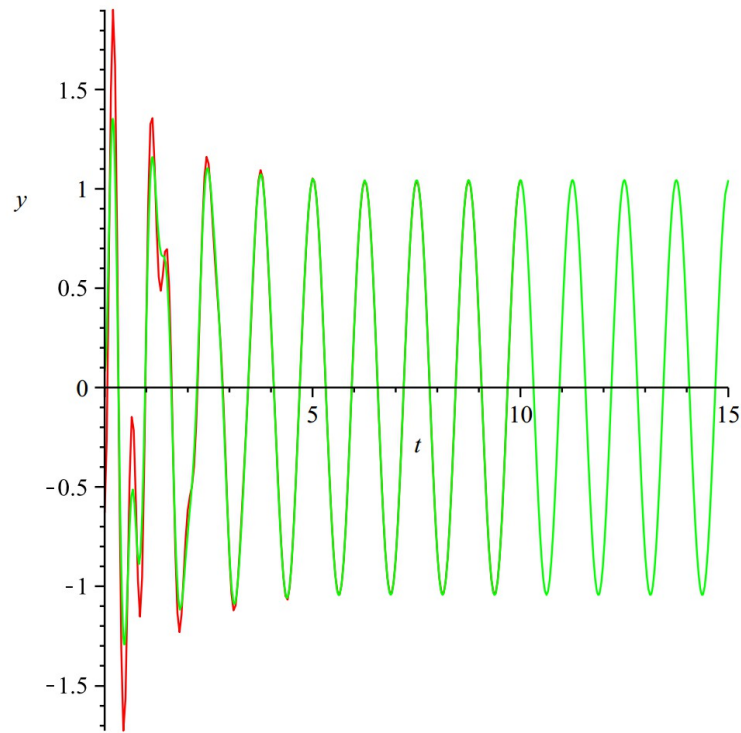
```
> with(plots) : display( { plot(rhs(s0), t=0..15, color=green), odeplot(sol, [t, y(t)], 0..10) }
```



Après un temps, l'oscillation est stabilisée par le moteur

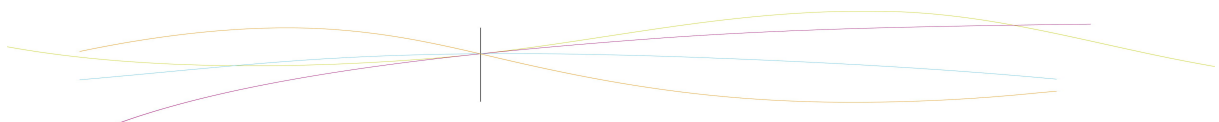
```
ω[0] := sqrt( k / m ); evalf(%); T := 2 * π / ω[0]; evalf(%)
```





Après un temps, l'oscillation est stabilisée par le moteur

$$\left[\omega[0] := \text{sqrt}\left(\frac{k}{m}\right); \text{evalf}(\%); T := \frac{2 \cdot \pi}{\omega[0]}; \text{evalf}(\%); \right.$$



6.2. Listing des programmes utilisés – Code Pascal

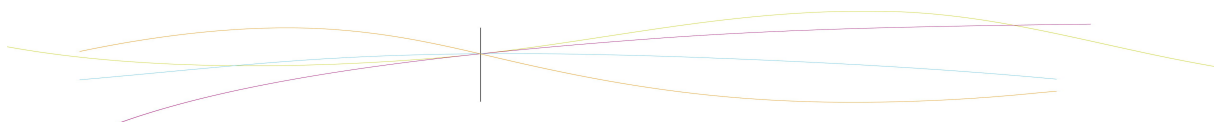
Modélisation RK4 cas non-entretenu

```
(* regime avec frottement sans moteur*)
(*mx''+ax'+kx=0,v(0)=0,x(0)<0.08m  *)
var n:integer;
    h,t,x,v,xn1,vn1:real;
function f(A,B:real):real;
begin
    f:=(204*A+1.86*B);
end;

procedure RK1D(xn,vn:real);
var k1,k2,k3,k4,L1,L2,L3,L4:real;
begin
    K1:=h*vn      ;
    L1:=h*f(xn,vn);
    K2:=h*(vn+L1/2)  ;
    L2:=h*f(xn+k1/2,vn+L1/2);
    K3:=h*(vn+L2/2)  ;L3:=h*f(xn+k2/2,vn+L2/2);
    K4:=h*(vn+L3)    ;L4:=h*f(xn+k3,vn+L3);
    xn1:=xn+(K1+2*K2+2*K3+K4)/6;
    vn1:=vn+(L1+2*L2+2*L3+L4)/6;
end;

begin
    h:=0.05;x:=0.08;v:=0;t:=0;
    writeln(t,' ',x);
    for n:=0 to 200 do
        begin
            t:=n*h;
            RK1D(x,v);
            x:=xn1;v:=vn1;
            writeln(t+h,' ',x,' ');
        end
    end.

end.
```



Modélisation RK4 cas non-entretenu

```
(* regime avec frottement avec moteur*)
(*mx''+ax'+kx=0.918cos(5.03t),v(0)=0,x(0)=0.08 *)
var n:integer;
    h,t,x,v,xn1,vn1,k,m:real;
function f(A,B,temp:real):real;
    begin
        k:=20.4;
        m:=0.1;
        a:=0.036;
        f:=-*A-(a/m)*B+(0.918*k/m)*cos(98*temp);
    end;

procedure RK1D(xn,vn,tn:real);
    var k1,k2,k3,k4,L1,L2,L3,L4:real;
    begin
        K1:=h*vn           ;L1:=h*f(xn,vn,tn);
        K2:=h*(vn+L1/2)   ;L2:=h*f(xn+K1/2,vn+L1/2,tn+h/2);
        K3:=h*(vn+L2/2)   ;L3:=h*f(xn+K2/2,vn+L2/2,tn+h/2);
        K4:=h*(vn+L3)     ;L4:=h*f(xn+K3,vn+L3,tn+h);
        xn1:=xn+(K1+2*K2+2*K3+K4)/6;
        vn1:=vn+(L1+2*L2+2*L3+L4)/6;
    end;

begin
    h:=0.1;x:=0.08;v:=0;
    for n:=0 to 10 do
        begin
            t:=n*h;
            RK1D(x,v,t);
            x:=xn1;v:=vn1;
            writeln(t,' ',x)
        end
    end.

end.
```

