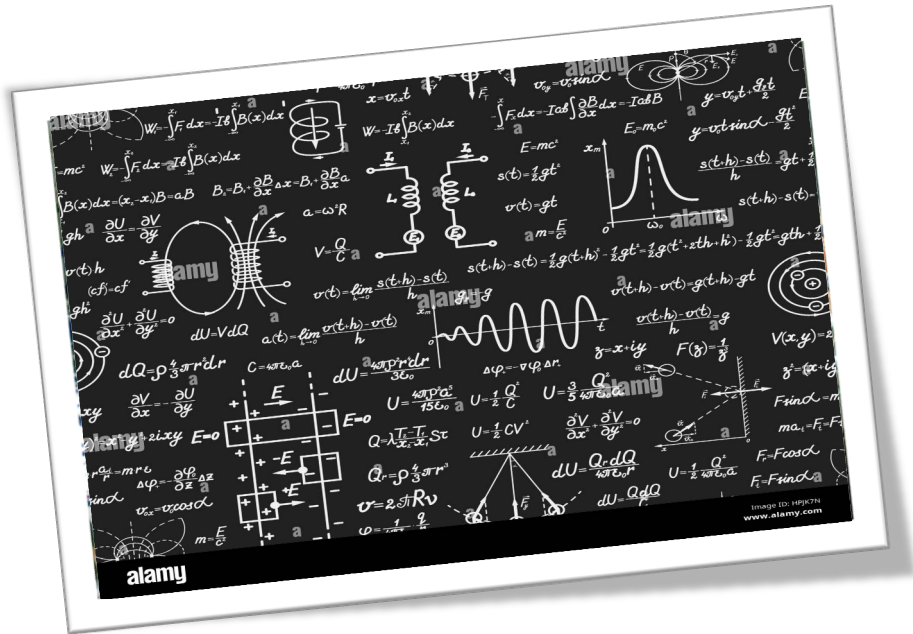


## Mieux comprendre les différents domaines de la physique grâce aux analogies



Etudiants :

Paul Barbieux  
Axel Desouche  
Jules Galhardo

Thomas Bonneville  
Mélanie Duret

Enseignant-responsable du projet :  
Tanguy DAVIN

*Cette page est laissée intentionnellement vierge.*

Date de remise du rapport : **11/06/2024**

Référence du projet : **STPI/P6/2024 – 47**

Intitulé du projet : ***Mieux comprendre les différents domaines de la physique grâce aux analogies***

Type de projet :

Objectifs du projet (10 lignes maxi) : ***L'objectif de ce projet est de trouver des analogies entre différents domaines de la physique, de déterminer dans quelles sont leurs limites et leur pertinence.***

Mots-clefs du projet (4 maxi) : ***analogie, physique, théorie, modélisation***

## TABLE DES MATIERES

1 Introduction.....	5
2 Méthodologie / Organisation du travail.....	6
3 Travail réalisé et résultats.....	7
3.1 Système 1 : <i>Étude de la charge d'un condensateur</i> .....	7
3.1.1 Description des systèmes et de leurs paramètres.....	7
3.1.2 Modélisation.....	7
3.1.3 Conclusion.....	8
3.2 Système 2 : <i>Étude d'un système de chauffage</i> .....	9
3.2.1 Chauffage d'une pièce.....	9
3.2.2 Chauffage d'une maison à plusieurs pièces.....	11
3.2.3 <i>Conclusion</i> .....	12
3.3 Système 3 : <i>Étude du remplissage d'un barrage</i> .....	13
3.3.1 Remplissage d'un barrage.....	13
3.3.2 <i>Écoulement dans une canalisation</i> .....	15
3.3.3 <i>Conclusion</i> .....	17
3.3.4 Mise en commun et analogies.....	18
4 Conclusion.....	19
5 Bibliographie.....	20
6 Annexes (non obligatoire – exemples ci-dessous).....	21
6.1 Documentation technique.....	21
6.1.1 Système électrique.....	21
6.1.2 Système thermique.....	21
6.1.3 Système mécanique.....	23
6.2 Démonstration de Bernoulli.....	24
7 Tableaux des paramètres des 3 modèles.....	25

## 1 INTRODUCTION

Le but de ce projet est d'explorer les liens qui peuvent exister entre différents domaines de la physique. Autrement dit, nous cherchons à faire des analogies entre ces domaines. Pour cela nous avons étudié 3 systèmes différents : l'un lié au déplacement d'un fluide, un autre représentant circuit électrique Résistance-Condensateur et un dernier système lié aux transferts thermiques.

Parmi tous les domaines de la physique que nous avons pu explorer depuis notre entrée à l'INSA Rouen Normandie et avant, certains nous ont semblé plus difficile à comprendre ou plus long à assimiler que d'autres: chacun a des facilités de compréhension dans des domaines différents. Un excellent moyen de comprendre un concept qui nous est inconnu ou complexe à appréhender est de tenter de l'expliquer par un autre concept proche : c'est le principe de la vulgarisation et des analogies. Le projet que nous traitons dans ce rapport consiste à établir et étudier les analogies qui pourraient exister entre différents domaines de la physique.

L'intérêt principal de ce projet est qu'il consiste à construire des ponts entre différents domaines afin de les rendre mutuellement plus accessibles. Expliquer l'électricité par la mécanique ou inversement permet de lever la barrière mentale qui peut exister vis-à-vis d'un des deux domaines grâce à la compréhension que l'on a déjà de l'autre domaine. Une conséquence directe de cet avantage est que chaque rédacteur de ce rapport a pu venir avec ses facilités et difficultés de compréhension.

Notre groupe de 5 étudiants s'est réuni une fois par semaine durant un semestre dans le but de répondre à cette problématique. Suivant les pistes données par notre professeur encadrant, M. Tanguy Davin, nous avons établi différents systèmes dans différents domaines. Nos recherches se sont concentrées sur deux aspects liés de la physique : le concept de capacité et le concept de résistance. Afin de ne pas alourdir ce rapport et bien que de nombreux domaines de la physique utilisent ces concepts, nous nous sommes concentrés sur 3 domaines : l'électricité, la mécanique et la thermodynamique.

## 2 MÉTHODOLOGIE / ORGANISATION DU TRAVAIL

Le jeu de la répartition des projets scientifiques de cette année nous a placés dans ce groupe. La multiplicité des domaines qu'il était possible d'étudier nous a motivé à participer à ce projet quand bien même pour certain ce n'était pas notre premier choix.

La première phase du projet a été de créer des systèmes simples pour chaque domaine. Chaque système a été étudié pour trouver une expression de sa charge, sa décharge, de sa capacité et de sa résistance. Finalement, nous avons mis en commun nos recherches et nos calculs afin de trouver des liens entre ces systèmes. Ces liens n'étant pas parfaits, il nous a fallu également étudier les limites de ces analogies.

La répartition des tâches s'est faite selon les affinités de chacun :

- Jules et Mélanie : système mécanique
- Thomas : système électrique
- Paul et Axel : système thermique

Tout au long du projet nous avons mis nos résultats et nos pistes de réflexion sur un document partagé afin de faciliter l'échange d'information, tous les rédacteurs n'ayant pas les mêmes disponibilités pour se voir en dehors des heures de projets. Si nous avons principalement travaillé sur notre système ou sa version complexifiée, nous avons aussi régulièrement rendu compte de l'avancement de nos recherches entre nous et débattu des directions à prendre pour améliorer nos analogies ou en trouver d'autres.

### 3 TRAVAIL RÉALISÉ ET RÉSULTATS

#### 3.1 Système 1 : Étude de la charge d'un condensateur

##### 3.1.1 Description des systèmes et de leurs paramètres

Dans cette partie nous allons étudier le comportement d'un circuit Résistance-Condensateur (RC). Il s'agit du circuit le plus simple qu'il est possible de constituer à partir de ces deux éléments. Ce circuit a un comportement intéressant car le condensateur a un caractère capacitif, c'est-à-dire qu'il est capable de maintenir une différence de potentiel à ses bornes. Il est possible d'étudier l'évolution dans le temps de cette différence de potentiel.

Le circuit se compose d'un générateur, d'une résistance et d'un condensateur montés en série.

Nous ferons les hypothèses suivantes :

- aucune déperdition d'énergie par effet Joule
- condensateur, résistance et générateur parfait (la valeur indiquée est considérée comme exacte)

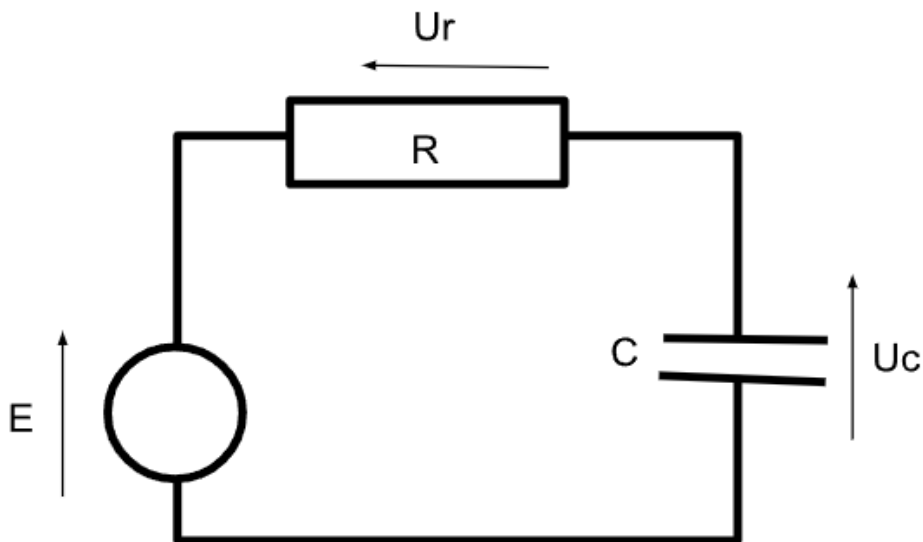


Figure 1: Schéma du circuit électrique (RC) étudié

##### 3.1.2 Modélisation

D'après la loi des mailles on a :

$$1 \quad E = U_r + U_c(t)$$

Avec la loi d'Ohm on a :  $U_r = R \times i$ , où  $i$  représente un flux de charges se déplaçant dans le fil

D'après les propriétés des condensateurs :  $q = U_c \times C$  alors  $\frac{dq}{dt} = \frac{dU_c}{dt} \times C = i(t)$

L'équation de la loi des mailles devient alors :

$$2 \quad E = RC \frac{dU_c}{dt}(t) + U_c(t)$$

Ce qui correspond à une équation différentielle du premier degré.

On transforme eq. 2 cette équation et on la résout

$$\frac{dU_c}{dt} + U_c(t) \times RC = \frac{E}{RC}$$

La solution est  $U_c(t) = E \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$

On trace la courbe de cette fonction

Avec une tension du générateur  $E = 2.5V$ , une résistance de  $50\Omega$  et un condensateur de  $0.1\mu F$

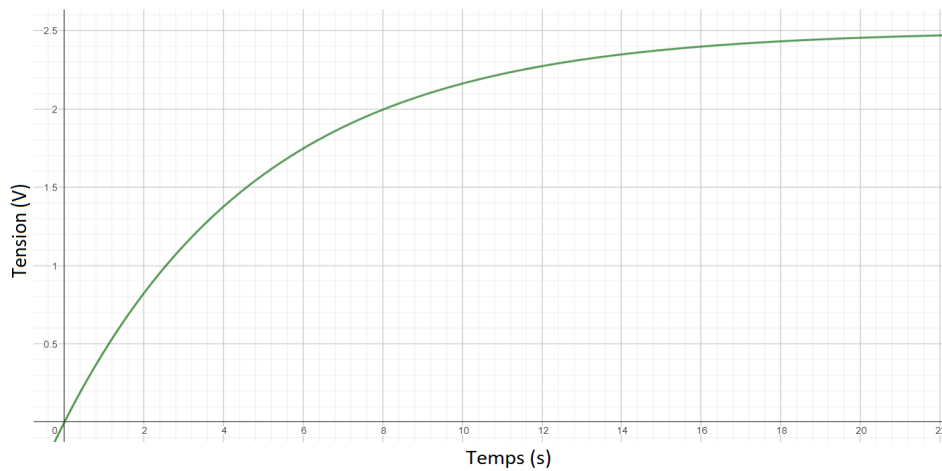


Figure 2: Courbe modélisant la tension en fonction du temps

### 3.1.3 Conclusion

Dans cette partie on a montré que la charge d'un condensateur suit une fonction exponentielle inversée. L'utilisation des principes élémentaires de l'électricité tels que la loi des mailles et la loi d'ohm font de ce modèle une modélisation simple faisant appel à seulement quelques notions : la capacité, le potentiel et la résistance.

Cette simplicité place ce système comme point de référence pour les analogies que nous cherchons à développer dans ce rapport. En effet, nous assimilerons les systèmes suivants à des circuits électrique RC afin de retrouver les notions de capacité, de résistance et de potentiel propre à chaque domaine de la physique que nous avons étudié. Nous montrerons qu'il est également possible de faire des analogies entre les hypothèses de ce modèle et les hypothèses des modèles suivants.



### 3.2 Système 2 : Étude d'un système de chauffage

#### 3.2.1 Chauffage d'une pièce

##### 3.2.1.1 Description du système et de ses paramètres

Dans cette partie, nous allons chercher à modéliser comment évolue la température d'une maison lorsqu'on la chauffe de l'intérieur. Pour modéliser notre problème, prenons une maison dont la température initiale est la même que la température extérieure. De plus, pour simplifier l'étude, nous considérons que la maison a une base carrée (de côté  $a=10\text{ m}$  et de hauteur  $h=2.5\text{ m}$ ), que le chauffage est constant et qu'elle ne possède ni murs intérieurs ni meubles, ni ouvertures.

Il existe ainsi un flux thermique de production provenant du chauffage:  $\phi_p$ . Il se répartit ensuite de 2 manières : soit il est stocké, soit échangé avec l'extérieur. On appelle respectivement  $\phi_{stc}$  et  $\phi_e$  ces flux.

##### 3.2.1.2 Modélisation

Un bilan thermique donne la relation suivante :

$$3 \quad \phi_p = \phi_{stc} + \phi_e$$

De cette dernière nous pouvons établir une équation différentielle par rapport à la température à l'intérieur de la maison en remplaçant les flux par leurs expressions.

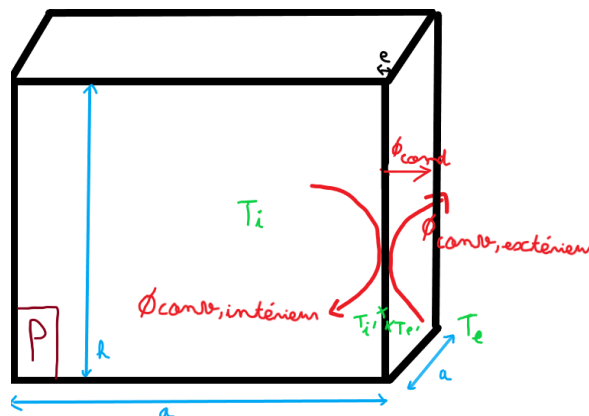


Figure 3: représentation schématique de la maison étudiée

En prenant en compte les échanges thermiques conductifs et convectifs, il vient :

$$4 \quad \phi_{conv,exterieur} = h_{ext} S_e (T_e' - T_e)$$

$$5 \quad \phi_{conv,interieur} = h_{int} S_e (T_i - T_i')$$

$$6 \quad \phi_{cond} = \int -k \vec{grad}(T) \cdot \vec{n} dS$$

avec  $\vec{n}$  le vecteur normal à la surface du mur, orienté vers l'extérieur.

Notre mur est constitué de 3 épaisseurs de matériaux différents, respectivement de béton, de laine de verre (ldv) et de plâtre. Pour déterminer le flux de conduction, il nous faut déterminer l'allure du profil thermique au sein de chaque épaisseur pour obtenir le gradient température. Afin de faciliter l'étude et la modélisation du système, nous avons approximé le profil de température par un profil affine, tout en calculant la valeur du nombre adimensionnel de Biot pour discuter de la validité de cette simplification.

$$B_i = \frac{he}{k} \quad B_{i, \text{béton}} = 0,52 \quad B_{i, \text{laine de verre}} = 31,25 \quad B_{i, \text{plâtre}} = 2,34$$

Nous comparons alors ces valeurs à 1. Pour une valeur nettement inférieure à ce nombre, on peut approximer le profil thermique par un profil affine. Nous constatons ainsi que pour le béton cette approximation est relativement adaptée, insuffisante pour le plâtre, et totalement invalide dans le cas de la laine de verre. Nous conserverons tout de même cette hypothèse car l'objectif de l'étude de notre modèle ne consiste pas à déterminer la meilleure isolation, mais à le comparer à des modèles d'autres domaines physiques.

$$7 \quad \vec{grad}(T) = \frac{T_2 - T_1}{e} \vec{n}$$

Comme le flux est le même dans chaque section du mur on a (voir figure 10 en annexe 6.1.2) :

$$8 \quad \phi_{cond} = \frac{k_b S_e}{e_b} (T_{i'} - T_2) = \frac{k_p S_e}{e_b} (T_2 - T_3) = \frac{k_{ldv} S_e}{e_{ldv}} (T_3 - T_{e'})$$

$$\text{d'où } \phi_{cond} = \frac{(T_{i'} - T_{e'}) S_e}{\left( \frac{e_b}{k_b} + \frac{e_{ldv}}{k_{ldv}} + \frac{e_p}{k_p} \right)}$$

En considérant que le flux est identique sur les murs et le toit, on a

$$9 \quad \phi_{conv, \text{extérieur}} = \phi_{conv, \text{intérieur}} = \phi_{cond} = \phi_e$$

$$\text{Ainsi } \phi_e = \frac{S_e (T_i - T_e)}{\frac{1}{h_{ext}} + \frac{1}{h_{int}} + \frac{e_b}{k_b} + \frac{e_{ldv}}{k_{ldv}} + \frac{e_p}{k_b}} = \frac{(T_i - T_e)}{R_{th}} \quad \text{avec } R_{th} = \frac{1}{S_e} \left( \frac{1}{h_{ext}} + \frac{1}{h_{int}} + \frac{e_b}{k_b} + \frac{e_{ldv}}{k_{ldv}} + \frac{e_p}{k_b} \right)$$

ou encore :  $\phi_e R_{th} = (T_i - T_e)$ , pour faire un lien avec la loi d'Ohm qui donne une relation de proportionnalité entre une grandeur potentielle (ici la température) et le flux.

$\phi_{stc}$  : L'air de la maison stocke une partie de l'énergie libérée sous forme de chaleur (par le chauffage) et on a :

$$10 \quad \phi_{stc} = VC_{air} \frac{dT}{dt}$$

$\phi_p$  : Comme il est constant on a simplement  $p = P$ , avec P en W.

Ainsi, de la relation  $\phi_p = \phi_{stc} + \phi_e$ , il vient l'équation différentielle suivante :

$$11 \quad \frac{dT}{dt} + \frac{T_i(t)}{VCR_{eq}} = \frac{R_{eq} P + T_e}{VCR_{eq}} \Leftrightarrow \frac{dT}{dt} + \frac{T_i(t)}{\tau} = \frac{R_{eq} P + T_e}{\tau} \quad \text{où } \tau = VCR_{th}$$

dont la solution est :  $T(t) = R_{eq} P (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) + T_e$

Traçons le graphique représentant notre fonction solution (voir figure 9 en annexe 6.1.2).

Pour tendre vers une température plafond de 20°C, la puissance de chauffage requise est de 850W, pour une maison de surface carrée de 100m<sup>2</sup> et une température extérieure de 5°C. Cela peut paraître faible, mais notre modèle ne possède pas d'ouverture ou d'accès ce qui diminue la déperdition thermique avec l'extérieur. De plus, dans les maisons modernes le chauffage ne fonctionne pas en continu mais par cycles de chauffe. Les périodes de chauffage sont ainsi très courtes mais ils sont aussi bien plus puissants que notre système de chauffage (entre 7 et 10 kW). Ce système peut de plus être représenté par un schéma électrique équivalent (voir figure 12 en annexe 6.1.2), ce qui simplifie grandement l'étude et l'établissement des équation.

### 3.2.2 Chauffage d'une maison à plusieurs pièces

Dans un second temps, nous avons complexifié le modèle en coupant la même maison en 2 pièces.

En vue de dessus cela donne :

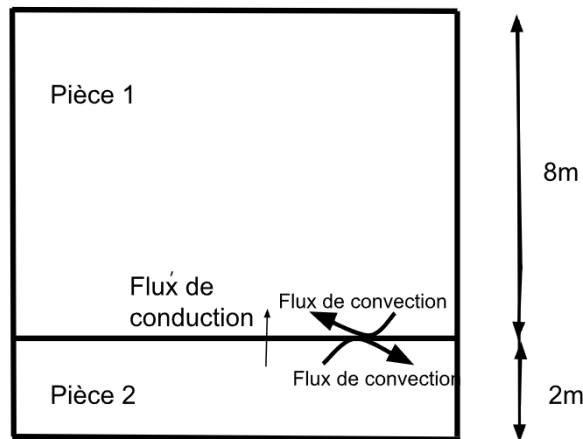


Figure 4: Schéma 2nde modélisation (vue de dessus)

Notons que dans cette configuration, la pièce 2 étant plus petite, on considère que l'air chauffé dans la pièce 2 va donner une partie de son énergie sous forme thermique à la pièce 1, malgré le fait que la puissance du chauffage de la petite pièce est plus faible. Cet échange se fait par convection à travers la porte et par conduction à travers le mur (on ne modélise pas de porte entre ces 2 pièces).

#### 3.2.2.1 Modélisation

De même que dans la simulation d'avant, en faisant un bilan thermique similaire, nous obtenons ces équations:

$$12 \quad P_1 = \frac{T_1(t) - T_e}{R_1} - \frac{T_2(t) - T_1(t)}{R_{1,2}} + V_1 C \frac{dT_1}{dt}$$

$$13 \quad P_2 = \frac{T_2(t) - T_e}{R_2} - \frac{T_2(t) - T_1(t)}{R_{1,2}} + V_2 C \frac{dT_2}{dt}$$

Comme il n'est pas possible de les mettre sous la forme d'une équation différentielle à 1 inconnue, nous optons pour une résolution numérique (voir figure 11 en annexe 6.1.2). Puis, comme pour le système précédent, nous fixons les puissances des chauffages de manière à obtenir une température intérieure de 20°C dans les 2 pièces.

Nous avons fait varier plusieurs paramètres afin de valider la cohérence de ce modèle. La synthèse de ce travail se trouve dans le tableau suivant :

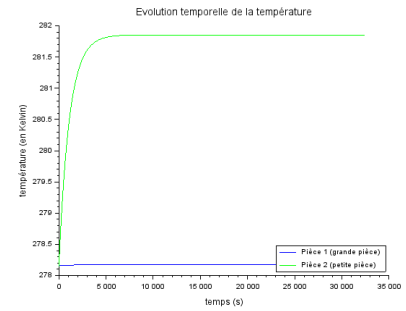
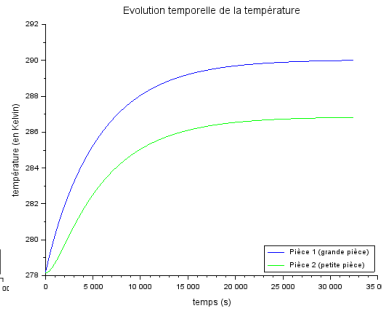
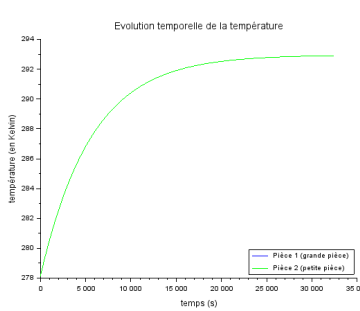
Paramètre  
modifié

$$R_{1,2} = 0$$

$$P_2 = 0$$

$$S1 = 10\ 000\ m^2$$

Courbe  
obtenue



Commentaire Il n'y a plus qu'une seule courbe, ce qui est attendu car c'est comme s'il n'y avait plus qu'une seule pièce.

La pièce 2 atteint 14°C tandis que la pièce 1 atteint 17°C. Ce résultat est logique car la pièce 2 n'est plus chauffée par le chauffage mais seulement par la pièce 1. La pièce 1 est aussi plus froide.

La température de la pièce 1 reste proche de 5°C, (et légèrement supérieure car elle a un chauffage tout de même) tandis que celle de la pièce 2 atteint seulement 9°C. En effet, c'est comme si le mur non isolé était en contact avec l'extérieur.

### 3.2.3 Conclusion

Les figures obtenues par ce deuxième modèle restent prises une à une très similaires à celles obtenues précédemment. Nous noterons cependant que pour obtenir la même température plafond de 20°C dans les 2 pièces, le chauffage nécessaire sera moins puissant. Cette différence peut-être due au fait que nous n'avons pas considéré le pont thermique entre le mur intérieur et extérieur qui augmente la déperdition thermique de la maison.

L'évolution relative des 2 courbes est très variable : en faisant varier les valeurs du chauffage des 2 pièces, la température peut augmenter plus vite au sein de la petite pièce ou de la grande pièce. Les courbes peuvent aussi s'entrecroiser et ce n'est ainsi pas la même pièce qui reste la plus chaude tout au long de la simulation, ce que nous trouvons surprenant. Nous avons également essayé de faire varier les proportions de chauffage dans chaque pièce pour obtenir une évolution de la température la plus uniforme possible dans toute la maison. On constate alors que le rapport de chauffage entre les 2 pièces est proche du rapport entre la surface de contact avec le milieu extérieur des 2 pièces. Ce qui est cohérent car l'isolation est identique en tout point de cette surface.

Ce modèle pourrait être amélioré pour s'adapter aux maisons de plus de 2 pièces. On pourrait également intégrer des ouvertures pour obtenir des valeurs de résistances thermiques plus réalistes. On serait alors capable de modéliser l'évolution de la température de chaque pièce d'une maison quelconque.

Dans cette partie nous avons également pu constater qu'il était possible d'assimiler le système thermique à un système thermique RC. Cette assimilation constitue la première analogie que souhaitons présenter dans ce rapport.

### 3.3 Système 3 : Étude du remplissage d'un barrage

#### 3.3.1 Remplissage d'un barrage

Dans cette partie, nous voulons assimiler le remplissage d'un barrage avec la charge d'un condensateur.

##### 3.3.1.1 Description du système et de ses paramètres

Pour ce faire, nous utiliserons certaines notions de mécanique des fluides tel que le théorème de Bernoulli, théorème qui signifie que pour un écoulement de fluide parfait et incompressible, la somme des énergies se conserve au cours du déplacement. Les phénomènes diffusifs sont négligés tels que les effets visqueux, les pertes de charge, ou encore les transferts thermiques.

##### 3.3.1.2 Modélisation

On a tout d'abord besoin de l'équation de Bernoulli

$$14 \quad \frac{v^2}{2} + gz + \frac{p}{\rho} = \text{constante}$$

Elle se démontre par la conservation de l'énergie mécanique d'une particule de masse  $m$  et de volume  $V$ .

(Pour la démonstration voir en annexe 6.2)

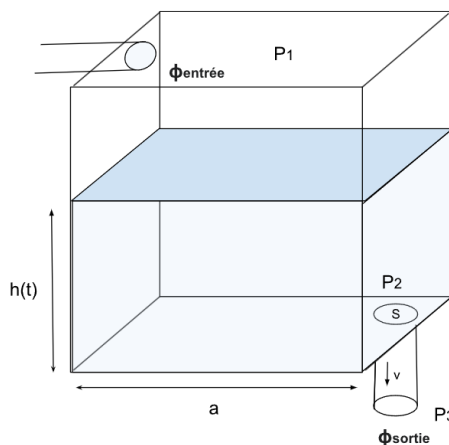


Figure 5: représentation schématique d'un barrage

Ce théorème est très utile dans le cas de notre barrage, puisque nous allons modéliser le remplissage d'un barrage qui "fuit". De ce fait en modélisant deux points de l'espace (1) et (2) avec (1) en haut du barrage et (2) en dessous du barrage, au niveau de la section de sortie on obtient :

$$15 \quad \frac{v_1^2}{2} + gh_1 + \frac{P_1}{\rho} = \frac{v_2^2}{2} + gh_2 + \frac{P_2}{\rho}$$

Pour obtenir le débit en sortie il nous suffit de faire quelques simplifications :

$$16 \quad \Rightarrow \rho g (h_1 - h_2) + P_1 = P_2$$

En sachant que l'on pose l'hypothèse  $P_1 = P_3$  on peut réécrire

17 
$$\frac{v_3^2}{2} + gh_3 + \frac{P_3}{\rho} = \frac{v_2^2}{2} + gh_2 + \frac{P_2}{\rho} \text{ ainsi } v_3^2 = \frac{2}{\rho} (P_2 - P_3) = \frac{2}{\rho} (P_2 - P_1)$$

Donc finalement

18 
$$v_3 = \sqrt{2g\Delta h} \Rightarrow \Phi_{\text{sortie}} = S \times \sqrt{2g\Delta h}$$

Nous allons d'abord supposer que notre barrage est un cube de côté a, afin de déterminer le volume du barrage en fonction du temps dont l'évolution au cours du temps serait comparable à la charge d'un condensateur sous certaines conditions.

Le volume s'exprime à tout instant t,

19 
$$V(t) = a^2 \times h(t) \text{ avec } \phi_{\text{total}} = \phi_{\text{entrée}} - \phi_{\text{sortie}} \Leftrightarrow \phi_{\text{total}} = \frac{dV(t)}{dt} = a^2 \frac{dh(t)}{dt}$$

Donc 
$$\Rightarrow dh(t) = \left( \frac{\phi_{\text{entrée}}}{a^2} - \frac{S}{a^2} \sqrt{2gh(t)} \right)$$

Nous obtenons une équation différentielle du premier ordre à coefficient constant mais non linéaire.

Pour la résoudre, nous optons pour une résolution numérique par la méthode d'Euler dont l'erreur peut être minimisée en choisissant un pas très faible tel que :

20 
$$h_0 = 0 \text{ et } h_{n+1} = h_n + \Delta h = h_n + \left( \frac{\phi_{\text{entrée}}}{a^2} - \frac{S}{a^2} \sqrt{2gh(t)} \right) \Delta t$$

A l'aide d'un tableur, en entrant la formule précédente avec un pas de temps de 0.1 s sur 3600, on obtient la courbe bleue, analogue à la charge de condensateur comme attendu.

En comparant notre courbe (bleue) à une courbe de référence de charge de condensateur du type (rouge)

21 
$$y = V_{\text{max}} \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \text{ avec } \tau = 640 \text{ s et } V_{\text{max}} = 2000 \text{ m}^3$$

On remarque que les deux courbes se superposent quasiment parfaitement. Le pas de temps est donc suffisamment petit par rapport au temps d'étude d'une heure pour obtenir une bonne approximation.

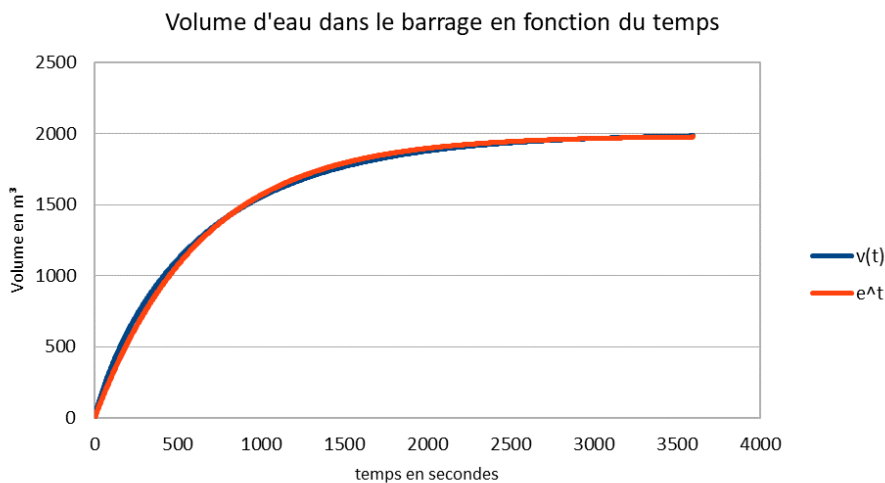


Figure 6: Annexe, Volume d'eau dans le barrage en fonction du temps

Pour vérifier l'analogie entre un circuit électrique RC et notre barrage hydraulique nous allons déterminer la résistance ainsi que la capacité de notre barrage à partir de la formule précédente et tracer la courbe à partir de la résistance et de la capacité trouvées précédemment et constater la concordance des deux courbes.

Pour cela, on simplifie le remplissage de notre barrage par en schéma électrique (voir figure 13 en annexe 6.1.3).

Pour rappel, dans un circuit électrique  $\tau = RC$

Ainsi, on peut chercher une formule équivalente de cette forme avec  $R_h$  la résistance hydraulique caractéristique du barrage et  $C_h$  la capacité hydraulique du barrage.

Par analyse dimensionnelle on trouve un équivalent :

$$22 \quad C_h = \frac{V_{max}}{\Delta P} = \frac{V_{max}}{\rho g \Delta h}$$

De la même façon, on trouve :

$$23 \quad \Delta P = R_h \times \phi \Leftrightarrow R_h = \frac{\Delta P}{\phi} = \frac{\rho g \Delta h}{S \sqrt{2 g \Delta h}} = \frac{\rho}{S} \sqrt{\frac{g}{2}} \times \sqrt{\Delta h}$$

Après avoir tracé la courbe correspondante (**jaune**) on constate qu'elle ne correspond pas tout à fait à celle attendue. Ceci s'explique principalement du fait que la résistance n'est pas linéaire, le barrage n'est donc pas une analogie parfaite du circuit RC. De plus, les hypothèses liées au théorème de Bernoulli restent peu réalistes.

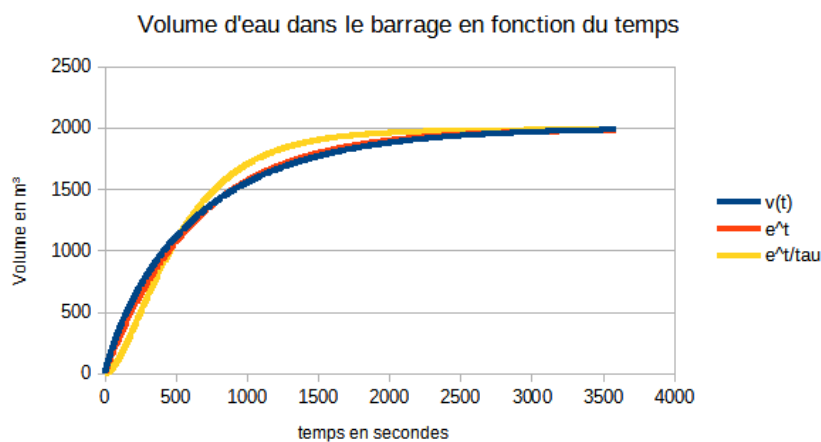


Figure 7: Superpositions des trois courbes représentant le volume d'eau en fonction du temps

### 3.3.2 Écoulement dans une canalisation

A présent, nous cherchons l'analogie à une résistance électrique, on étudie donc une canalisation.

#### 3.3.2.1 Description du système et de ses paramètres

Pour ce faire nous prenons un cylindre de longueur L traversé par un flux et avec P1 la pression d'entrée et P2 la pression de sortie.

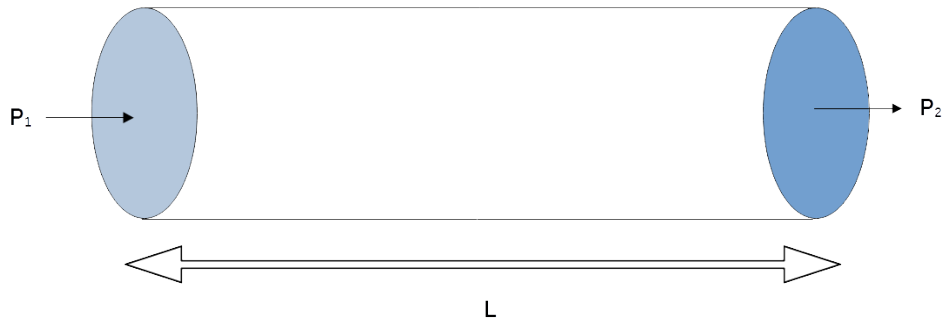


Figure 8: Représentation schématique d'une canalisation

### 3.3.2.2 Modélisation

Pour modéliser notre perte de pression due aux frottements du fluide le long de la canalisation, nous pouvons utiliser la loi de Darcy-Weisbach. Cette équation est valable pour un écoulement indilatable et incompressible.

$$24 \quad \Delta P = \Lambda \frac{L}{D_h} \times \frac{\rho v^2}{2}$$

Avec  $\Lambda$  coefficient de frottement fluide et  $D_h$  le diamètre hydraulique qui dans notre cas est le diamètre interne de la canalisation.

On remarque que la différence de pression peut s'écrire de la façon suivante :

$$25 \quad \Delta P = \Lambda \frac{L}{D_h} \times \frac{\rho v^2 S}{2S}$$

Or, on retrouve le flux  $\phi = vS$ , on obtient donc

$$26 \quad \Delta P = \Lambda \frac{L}{D_h} \times \frac{\rho v}{2S} \times \phi$$

En faisant l'analogie avec un circuit électrique on a une différence de pression qui s'exprime en fonction du flux et d'une résistance hydraulique :

$$27 \quad R_h \times \Phi = \Delta P \quad \text{avec} \quad R_h = \Lambda \frac{L}{D_h} \times \frac{\rho v}{2S}$$

En simplifiant on obtient :

$$28 \quad R_h = \Lambda \frac{L \rho v}{4 \pi R^3} \quad \text{avec} \quad \Lambda = \frac{64}{Re} \quad \text{et} \quad Re = \frac{D_h v}{\nu}$$

( $\nu$  étant la viscosité du fluide et  $Re$  le nombre de Reynolds, nombre adimensionnel permettant de déterminer le type d'écoulement et  $\Lambda$  dont son expression en fonction de  $Re$  n'est valable que dans le cas d'un écoulement laminaire.)

On obtient

$$29 \quad R_h = \frac{8 \nu L \rho}{\pi R^4}$$



Dans le cas d'un circuit électrique, la loi d'Ohm lie de la même manière différence de tension, intensité du courant et résistance.

$$30 \quad R_h \times \phi = \Delta P \rightarrow R \times I = \Delta V$$

En traçant la courbe de  $\Delta P = R_h \times \phi$ , avec  $v = 0,001 \text{ Pa.s}$ ,  $L = 3 \text{ m}$ ,  $\rho = 1000 \text{ kg.m}^{-3}$ ,  $R = 20 \text{ cm}$  on trouve  $R_h = 4775 \text{ USI}$  (voir figure 15 en Annexe 6.1.3)

On a comme prévu une relation de proportionnalité  $R_h$ , car notre coefficient est indépendant du flux.

Notre modèle de canalisation convient donc bien à une analogie avec une résistance électrique, dans le cas d'un écoulement laminaire.

### 3.3.3 Conclusion

Dans cette troisième partie, nous avons étudié deux systèmes hydrauliques, le barrage et la canalisation, dans l'espoir de trouver des systèmes électriques capables de modéliser ces deux systèmes.

Pour le barrage, nous nous sommes rendus compte que l'analogie avec un condensateur n'est pas exacte. La non-linéarité du système hydraulique ne nous permettait pas de résoudre l'équation différentielle et d'obtenir l'exponentielle caractéristique du condensateur. On a néanmoins pu s'approcher du résultat en utilisant différentes techniques comme la méthode d'Euler. On a ensuite essayé d'obtenir, dans l'hypothèse où on peut faire l'analogie barrage-condensateur, la résistance et la capacité hydraulique du barrage. Néanmoins, la résistance obtenue n'est pas indépendante du temps, ce qui nous empêche d'obtenir le résultat souhaité. Il reste cependant, intéressant de constater que l'analogie peut être utile dans une certaine mesure pour donner un ordre de grandeur notamment mais non appropriée pour des résultats plus précis.

Nous avons ensuite décidé d'étudier une canalisation, dans le but de trouver une analogie avec une simple résistance électrique. Encore une fois, nous avons dû émettre un certain nombre d'hypothèses mais cette fois, nous avons trouvé la relation de linéarité souhaitée entre le flux volumique (équivalent hydraulique de l'intensité) et la différence de pression (équivalent hydraulique de la tension).

En conclusion, l'analogie entre l'étude d'un fluide et celle d'un circuit électrique en régime transitoire ou permanent peut se faire moyennant un certain nombre d'hypothèses dont la précision des résultats repose sur ces hypothèses ; il est donc primordial pour obtenir un résultat cohérent de choisir les hypothèses les plus réalistes possibles. Dans le cas du barrage, les hypothèses nécessaires pour la simplification des calculs nous ont conduit à des résultats assez éloignés. Pour la canalisation, il était nécessaire de considérer un écoulement laminaire, donc d'avoir un nombre de Reynolds inférieur à 2000 pour obtenir une droite, avec un écoulement turbulent les résultats auraient été inexacts dans une certaine mesure.

### 3.3.4 Mise en commun et analogies

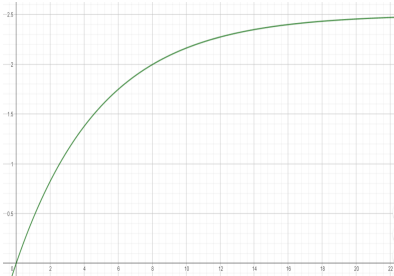
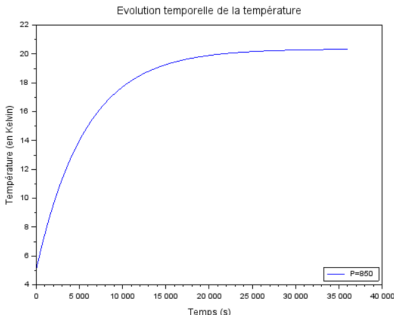
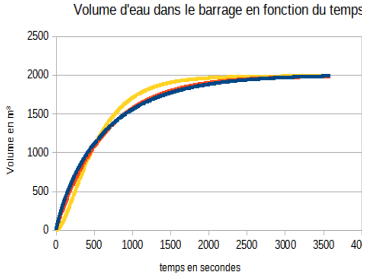
Au cours de ce projet, nous avons mis en place plusieurs modèles afin d'établir des analogies entre différents domaines de la physique. Nous nous sommes concentrés sur trois systèmes distincts : un circuit électrique Résistance-Condensateur (RC), les transferts thermiques, et le déplacement d'un fluide. L'objectif était de démontrer comment des concepts d'un domaine peuvent éclairer la compréhension d'un autre domaine, facilitant ainsi l'apprentissage et l'approfondissement des notions physiques.

Nous avons exploré les concepts de capacité, de résistance, et de flux à travers ces systèmes. Pour le chauffage d'une maison, nous avons modélisé l'évolution de la température intérieure dans chaque pièce en fonction du temps et établi des comparaisons avec le circuit RC. La modélisation a révélé des similitudes dans les équations différentielles régissant ces systèmes. Cependant si les équations différentielles sont toujours d'ordre 1, il y a autant d'inconnues que de pièces dans le modèle, ce qui complexifie la résolution et ainsi l'allure des courbes obtenues et nous éloigne ainsi du modèle électrique simple. Malgré tout, les similitudes entre l'évolution de la température dans n'importe quelle pièce chauffée et la charge d'un condensateur sont flagrantes.

En analysant le remplissage d'un barrage, nous avons aussi retrouvé une certaine analogie avec la charge d'un condensateur. Bien qu'elle ne soit pas parfaite en raison de la non-linéarité du système hydraulique, elle a néanmoins permis d'approcher le comportement du système électrique. L'usage de la méthode d'Euler a démontré la possibilité de modéliser approximativement ce comportement, malgré les hypothèses simplificatrices nécessaires.

En étudiant l'écoulement dans une canalisation, nous avons pu établir une analogie plus directe avec une résistance électrique. La loi de Darcy-Weisbach a montré une relation de proportionnalité linéaire entre la différence de pression et le flux, semblable à la loi d'Ohm en électricité. Cette analogie s'est avérée valable sous l'hypothèse d'un écoulement laminaire, ce qui souligne l'importance des conditions spécifiques pour la validité des analogies.

Tableau comparatif des 3 parties

	Électricité	Thermique	Mécanique
Variable de Flux	$i$	$\phi$	$\phi = vS$
Différence de potentiel	$U_r = \Delta V = R \times i$	$\Delta T = \phi_e R_{th}$	$\Delta P$
Résistance	$R$	$R_{eq} = \frac{\left(\frac{1}{h_{ext}} + \frac{1}{h_{int}} + \sum_i \frac{e_i}{k_i}\right)}{S_e}$	$R_h = \frac{8 \nu L \rho}{\pi R^4}$
Graphique			

## 4 CONCLUSION

Enfin, en examinant les analogies entre ces trois systèmes, nous avons constaté des relations similaires dans la forme des équations reliant flux, résistance et différence de potentiel. Chaque système a révélé des équations différentielles dont les solutions étaient des fonctions exponentielles, illustrant une convergence des comportements dynamiques à travers différents domaines physiques.

En conclusion, ce projet a montré que les analogies multiphysiques, bien que parfois imparfaites, constituent un outil puissant pour rendre les concepts complexes plus accessibles. La construction de ponts entre différentes disciplines physiques aide non seulement à comprendre de nouveaux concepts, mais aussi à renforcer et approfondir les connaissances existantes. Les résultats obtenus soulignent l'importance de choisir des hypothèses réalistes pour obtenir des analogies pertinentes et démontrent que la modélisation et la simulation numérique peuvent jouer un rôle clé dans l'exploration de ces analogies.

## 5 BIBLIOGRAPHIE

- [1] Henri CORTÈS et Joseph BLOT, “Transferts thermiques- Application à l'habitat”, *Ellipses*, 1999.
- [2] Tous les cours de STPI 1 et 2 portant sur l'électricité, la thermodynamique, la mécanique des fluides et les transferts thermiques

## 6 ANNEXES (NON OBLIGATOIRE – EXEMPLES CI-DESSOUS)

### 6.1 Documentation technique

#### 6.1.1 Système électrique

(vide)

#### 6.1.2 Système thermique

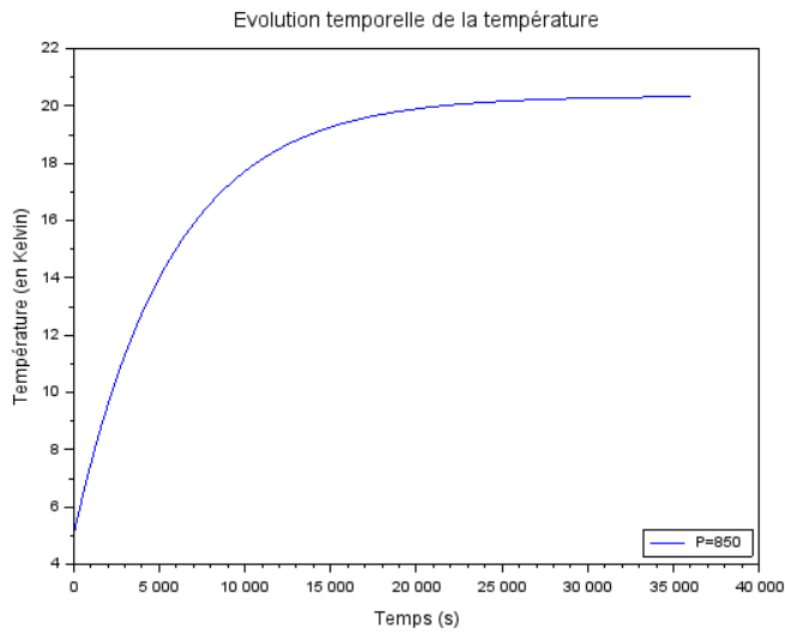


Figure 9: Evolution temporelle de la température

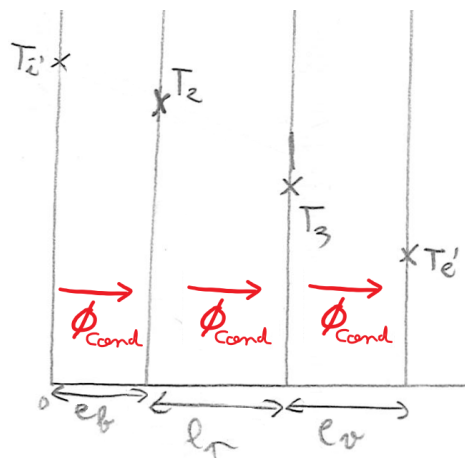


Figure 10: Schéma des couches d'isolation du mur

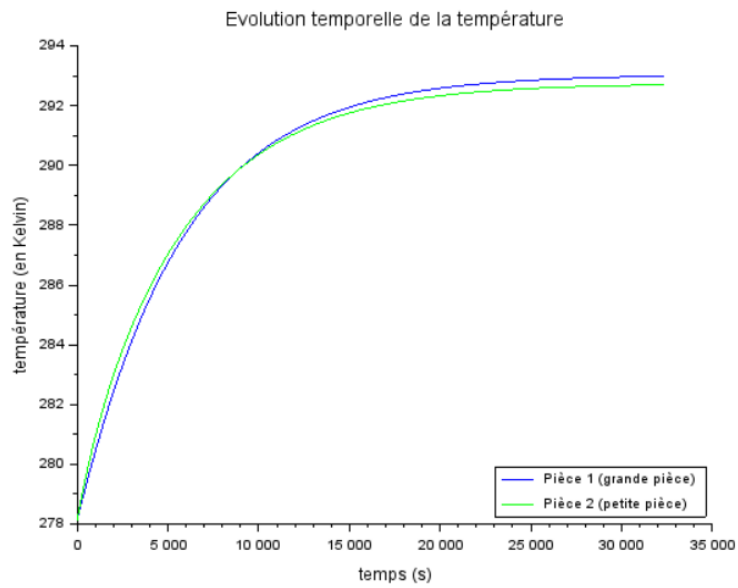


Figure 11: Evolution temporelle des températures des deux pièces

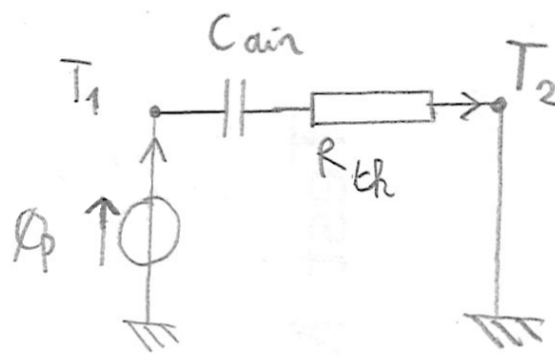


Figure 12: Schéma électrique équivalent

### 6.1.3 Système mécanique

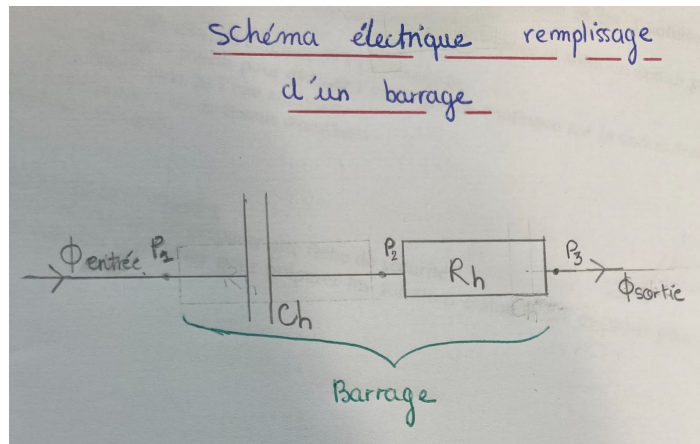


Figure 13: Schéma électrique équivalent d'un barrage

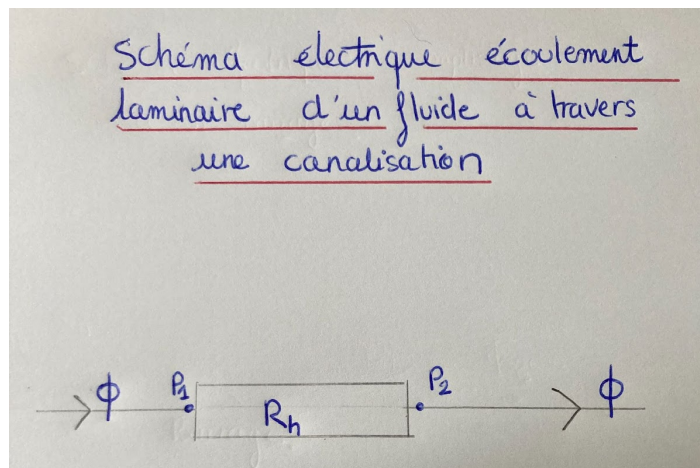


Figure 14: Schéma électrique écoulement laminaire d'un fluide à travers une canalisation

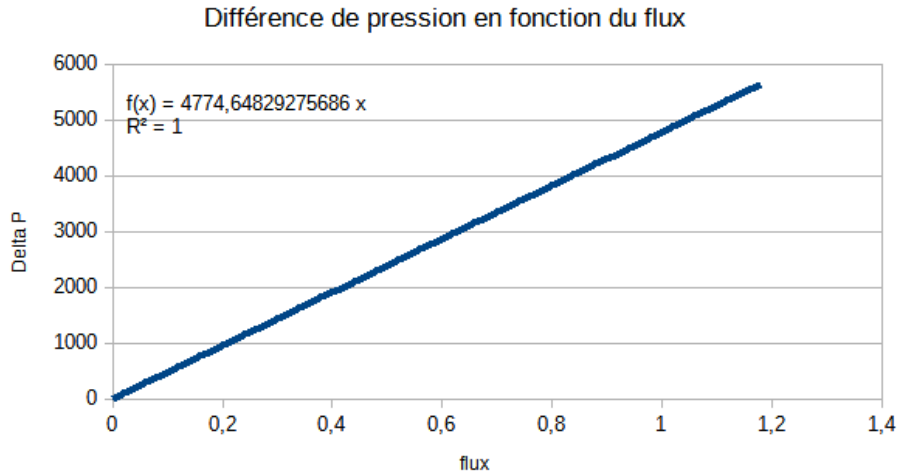


Figure 15: Différence de pression en fonction du flux

## 6.2 Démonstration de Bernoulli

- Densité de l'énergie cinétique

$$31 \quad e_c = \frac{1}{2} \times \frac{m}{V} \times v^2 = \frac{1}{2} \rho v^2$$

- Densité d'énergie potentielle de pesanteur

$$32 \quad e_c = \frac{m}{V} g z = \rho g z$$

- Densité d'énergie potentielle liées aux forces de pression du fluide eq 4

$$33 \quad e_p = p$$

On obtient donc par conservation de l'énergie mécanique aux cours du temps :

$$34 \quad e_c + e_g + e_p = \text{constante} \quad \text{eq 5} = \text{eq 1} \quad \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g z + p = \text{constance}$$

En d'autres termes, on retrouve bien le théorème de Bernoulli.



## 7 TABLEAUX DES PARAMÈTRES DES 3 MODÈLES

Tableau des paramètres de la charge d'un condensateur

Nom du paramètre	Acronyme	Formule	Valeur numérique
Générateur	$E$		2,5V
Résistance	$R$		50Ω
Condensateur	$C$	$q = U_{condensateur} \times C$	0,1 μF

Tableau du système de chauffage

Nom du paramètre	Acronyme	Formule	Valeur numérique
Convection extérieure	$h_{ext}$		10 W . m <sup>-2</sup> . K <sup>-1</sup>
Convection intérieure	$h_{int}$		10 W . m <sup>-2</sup> . K <sup>-1</sup>
Surface d'échange totale	$S_e$	$S_{murs} + S_{toit}$	200 m <sup>2</sup>
Volume de la pièce	$V$	$Aire_{base} * hauteur$	250 m <sup>3</sup>
Coefficient de conduction du béton	$k_b$		1.28 W . m <sup>-1</sup> . K <sup>-1</sup>
Épaisseur du béton	$e_b$		0.3 m
Coefficient de conduction du plâtre	$k_p$		0.25 W . m <sup>-1</sup> . K <sup>-1</sup>
Épaisseur du plâtre	$e_p$		0.013 m
Coefficient de conduction de la laine de verre	$k_{ldv}$		0.032 W . m <sup>-1</sup> . K <sup>-1</sup>
Épaisseur de la laine de verre	$e_{ldv}$		0.1 m
Température extérieure	$T_e$		5 °C = 278 K
Capacité thermique volumique de l'air	$C$		1256 JK <sup>-1</sup> m <sup>-3</sup>
Résistance équivalente (partie 3.2.1.2)	$R_{eq}$	$\frac{\left( \frac{1}{h_{ext}} + \frac{1}{h_{int}} + \frac{e_b}{k_b} + \frac{e_{ldv}}{k_{ldv}} + \frac{e_p}{k_p} \right)}{S_e}$	0.018 KW <sup>-1</sup>
Temps caractéristique	$\tau$	$VCR_{th}$	5670 s
Puissance du chauffage (partie 3.2.1.2)	$P$		850 W
Puissance du chauffage de la pièce 1	$P_1$		610 W
Puissance du chauffage de la pièce 2	$P_2$		210 W

Résistance équivalente de la pièce 1	$R_1$	$\frac{\left(\frac{1}{h_{ext}} + \frac{1}{h_{int}} + \frac{e_b}{k_b} + \frac{e_{ldv}}{k_{ldv}} + \frac{e_p}{k_b}\right)}{S_1}$	$0.025 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$
Résistance équivalente de la pièce 2	$R_2$	$\frac{\left(\frac{1}{h_{ext}} + \frac{1}{h_{int}} + \frac{e_b}{k_b} + \frac{e_{ldv}}{k_{ldv}} + \frac{e_p}{k_b}\right)}{S_2}$	$0.066 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$
Résistance équivalente de la cloison	$R_{1,2}$	$\frac{\left(\frac{2}{h_{int}} + \frac{e_{p,cloison}}{k_p}\right)}{S_{cloison}}$	$0.024 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$

Tableau des paramètres des systèmes hydrauliques

Nom du paramètre	Acronyme	Formule	Valeur numérique
Volume maximal du barrage	$V_{max}$		$2000 \text{ m}^3$
Temps caractéristique	$\tau$		$640 \text{ s}$
Masse volumique de l'eau	$\rho$		$998 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$
Accélération de la pesanteur terrestre	$g$		$9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$
Rayon de la canalisation	$R$		$20 \text{ cm}$
Diamètre intérieur	$D_h$	$2R$	$40 \text{ cm}$
Longueur de la canalisation	$L$		$3 \text{ m}$
Nombre de Reynolds	$Re$	$Re = \frac{D_h v}{\nu}$	
Viscosité de l'eau	$\nu$		$0,001 \text{ Pa} \cdot \text{s}$
Résistance hydraulique	$R_h$		$4775 \text{ USI}$
Coefficient de frottement fluide	$\Lambda$	$\frac{64}{Re}$	