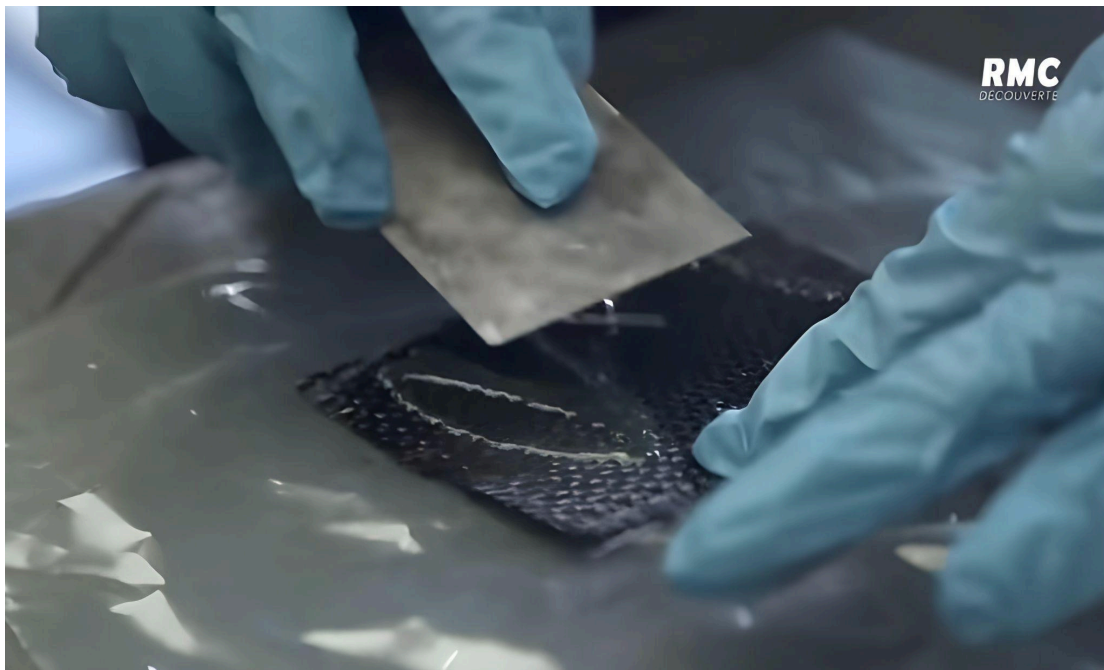


## MÉTHODES D'OPTIMISATION DE CONCEPTION BASÉE SUR LA FIABILITÉ



*Résine appliquée sur une partie du fuselage en fibre de carbone d'un avion de ligne afin de le rendre plus résistant tout en préservant sa légèreté*

**Etudiants :****Lina EL OMARI BOUYA****Jihad SAMAHA****Maxime DELAIR****Gabriel FAISNEL****Enseignant-responsable du projet :****Nouha LYAGOUBI**



Date de remise du rapport : *15/06/2024*

Référence du projet : *STPI/P6/2024 – 036*

Intitulé du projet : *Méthodes d'optimisation de conception basée sur la fiabilité*

Type de projet : *Biblio / État d'art*

Objectifs du projet :

*L'objectif de ce projet est d'étudier et de comparer les 3 approches de la RBDO. Pour cela, nous détaillerons les différents outils utilisés afin de mieux comprendre les enjeux de chaque approche pour pouvoir déterminer dans quelles situations utiliser chaque approche du RBDO.*

Mots-clefs du projet :

*Les mots clés de notre projet sont:*

- *Fiabilité*
- *Optimisation*
- *Incertitude*

## TABLE DES MATIÈRES

<b>1. INTRODUCTION</b>	<b>6</b>
<b>2. MÉTHODOLOGIE / ORGANISATION DU TRAVAIL</b>	<b>6</b>
<b>3. TRAVAIL RÉALISÉ ET RÉSULTATS</b>	<b>7</b>
3.1 OPTIMISATION DÉTERMINISTE	7
3.1 LES OUTILS UTILISÉS	7
3.1.1 LES MÉTHODES DE SIMULATION	8
3.1.2 LES MÉTHODES D'APPROXIMATION	9
A) Méthode du premier ordre (FORM)	9
B) Méthode du second ordre (SORM)	9
C) Comparaison des deux méthodes	10
3.2 LES DIFFÉRENTES APPROCHES	11
3.2.1 DÉFINITION	11
3.2.2 L'APPROCHE À DEUX NIVEAUX	12
A) Approche de l'indice de fiabilité RIA	12
B) Approche de mesure du rendement PMA	12
3.2.3 L'APPROCHE MONO-NIVEAU	13
A) Les conditions d'optimalité de Karush-Kuhn-Tucker	13
B) La méthode SLA	13
C) AMA (Approximative Moments Approach)	14
3.2.4 L'APPROCHE DÉCOUPLÉE	14
A) SFA – Wuet Wang (1998)	14
B) SORA-Du et Chen (2004)	15
C) SAP-Cheng et al. (2006)	15
D) PSF - Qu et Haftka (2004)	15
E) SIP - Charnes et al. (1962)	16
3.3 COMPARAISON DES DIFFÉRENTES APPROCHES	16
3.4 DOMAINES D'APPLICATION DES DIFFÉRENTES APPROCHES	18
3.4.1 EXEMPLE : OPTIMISATION D'UN POTEAU	18
<b>4. CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES</b>	<b>20</b>
<b>5. BIBLIOGRAPHIE</b>	<b>21</b>
<b>6. ANNEXE</b>	<b>23</b>
Annexe 1: Résultats de l'optimisation d'un poteau	23



## 1. INTRODUCTION

Depuis toujours, le monde de l'industrie cherche constamment à innover afin de fabriquer des produits toujours plus performants, fiables et économiques. Dans cette optique, l'optimisation de conception basée sur la fiabilité (RBDO) apparaît comme un outil essentiel pour un futur ingénieur. En effet, cette approche de la conception d'un produit vise à optimiser celui-ci en tenant compte de ses aspects de fiabilité et de performance dès sa phase de conception, ce qui est de plus en plus crucial pour les entreprises. Cela permet d'anticiper les éventuels problèmes et de les aborder dans leur ensemble, en prenant en compte tous les paramètres associés. Pour y arriver, on utilise différents outils tels que des méthodes de simulation et d'approximation, qui sont intégrées dans différentes approches méthodologiques. On distingue trois approches méthodologiques: l'approche mono-niveau, l'approche à deux niveaux et l'approche découplée. Cependant, comme nous le verrons dans ce rapport, les différents outils utilisés pour ces approches, ainsi que les techniques d'optimisation qui en découlent, ont un prix et non des moindres. C'est pourquoi, tout l'enjeu de la RBDO repose sur la recherche du meilleur compromis entre le coût et la sécurité, en tenant compte des incertitudes intrinsèques aux systèmes. Nous verrons dans ce rapport que trouver cet équilibre est une tâche compliquée en raison de la nature aléatoire des caractéristiques de chaque situation. Dans ce contexte, nous observerons que de nombreuses méthodes sont apparues afin de pallier les difficultés liées à la complexité et/ou à la longueur des calculs engendrés par cette recherche. Cela a créé de la confusion concernant l'approche la plus adaptée pour chaque situation. Dans ce rapport, nous détaillerons dans un premier temps chaque outil puis chaque approche avant de les comparer et d'expliquer dans quel domaine chaque approche est utilisée.

## 2. MÉTHODOLOGIE / ORGANISATION DU TRAVAIL

Pour notre projet scientifique encadré concernant les méthodes d'optimisation de conception basée sur la fiabilité, nous avons passé nos premières séances (du 09/02/2024 au 15/03/2024) à nous documenter sur le sujet car nous étions novices en la matière. Afin de gagner du temps dans nos recherches, nous avons mis en place un drive dans lequel nous répertorions dans un fichier Excel les documents consultés pour éviter que deux personnes lisent le même article. Nous avons également mis en place un fichier texte dans lequel chacun résumait les articles qu'il lisait. À la suite de ces recherches, nous avons décidé de mettre toutes nos informations en commun dans une première version du rapport afin de regrouper tous les textes portant sur un même sujet mais également de voir dans quelles parties nous avons besoin de recherches supplémentaires. Cela s'est passé durant la semaine entre le 15/03 et le 22/03. Ensuite, pendant les deux séances qui ont suivi, nous avons commencé à rédiger notre rapport étant donné que nos recherches nous semblaient complètes. Pour cela, chaque personne était chargée de reformuler une partie de la première version du rapport, la rédaction nous a pris une semaine et nous avons fini la première version le 12/04/2024. Nous avons ensuite pris le temps de le relire avant de l'envoyer afin d'avoir un premier retour sur notre travail et pouvoir cibler les lacunes de notre rapport. De plus, il nous restait également la partie "Domaines d'applications des différentes approches" à traiter car même si nous avons des exemples précis d'applications du RBDO, nous voulions traiter cette partie d'un point de vue plus global. Les séances suivantes, nous avons suivi les remarques de notre enseignante-responsable afin de corriger notre rapport. Chacun était chargé d'apporter les modifications nécessaires aux parties qu'il avait rédigées. Nous avons également en parallèle effectué des recherches concernant la partie manquante. Nous avons fini de rédiger le rapport le 31/05/2024. Ensuite, les séances suivantes nous ont permis de préparer notre poster ainsi que la présentation orale.

### 3. TRAVAIL RÉALISÉ ET RÉSULTATS

#### 3.1 OPTIMISATION DÉTERMINISTE

La recherche des paramètres impliqués dans la conception permet d'optimiser la conception en réduisant au minimum une fonction objective (comme les coûts initiaux, l'énergie potentielle, la rigidité, etc.) et en vérifiant les contraintes de performances mécaniques, physiques et géométriques.

$$\begin{aligned} & \text{Trouver } \mathbf{d} \text{ qui minimise } C_I(\mathbf{d}) \\ \text{sous : } & \begin{cases} G_i(\mathbf{d}, \mathbf{p}) \geq 0 & i = 1, \dots, m \\ h_j(\mathbf{d}) \geq 0 & j = m + 1, \dots, n_h \end{cases} \end{aligned}$$

“ $\mathbf{d}$ ” est le vecteur des variables d'optimisation, également connues sous le nom de variables de décision. Il peut inclure des dimensions géométriques, des caractéristiques mécaniques et des paramètres qui régulent les propriétés de la structure. “ $\mathbf{p}$ ” représente les paramètres déterministes (propriétés mécaniques des matériaux, les chargements, ...), “ $G$ ” représente les fonctions de performances, également appelées règles de dimensionnement (limitation des contraintes mécaniques,...), “ $h_j$ ” représente les fonctions de faisabilité géométrique et physique (comme les bornes inférieures et supérieures des variables d'optimisation “ $\mathbf{d}$ ”), et “ $C_i$ ” représente la fonction objective ou la fonction coût, qui peut représenter le volume, le poids ou les coûts initiaux de la structure. Cette fonction est définie en fonction des variables d'optimisation  $\mathbf{d}$ .

Contrairement à la RBDO, dans l'optimisation déterministe, on suppose que l'incertitude (le paramètre de fiabilité) est assurée par l'introduction des facteurs de sécurité, et que ces facteurs sont appropriés quelle que soit la configuration optimale choisie. Pour la plupart des systèmes, on peut montrer que le niveau de sécurité n'est pas indépendant des paramètres de conception optimisés sélectionnés.

#### 3.1 LES OUTILS UTILISÉS

La conception optimale basée sur la fiabilité, ou RBDO (Reliability-Based Design Optimization), est une approche d'ingénierie visant à optimiser les performances des systèmes tout en préservant leur fiabilité. Le défi majeur de la RBDO est de formuler et de résoudre un problème d'optimisation où les objectifs et les contraintes dépendent des variations aléatoires des modèles, ce qui nécessite des techniques d'évaluation à la fois robustes et efficaces. Afin de modéliser les variations aléatoires des systèmes, on intègre des concepts probabilistes et statistiques dans nos méthodes afin de prévoir les incertitudes inhérentes aux matériaux et aux processus de fabrication, par exemple. C'est dans ce contexte que des méthodes de simulation et d'approximation ont été développées. Elles sont essentielles afin de calculer la probabilité de défaillance, un élément clé pour évaluer les contraintes de fiabilité. Grâce à ces méthodes, les ingénieurs peuvent déterminer avec plus ou moins de précision les incertitudes pour garantir que les solutions de conception optimisées soient à la fois fiables et viables dans des conditions réelles d'utilisation.

### 3.1.1 LES MÉTHODES DE SIMULATION

Dans la thèse de doctorat de Hang Yu parue en 2011 [1], on nous informe que dans le domaine de la conception de produits ou de systèmes, les méthodes d'optimisation déterministes ne prennent pas en compte les incertitudes inhérentes à ces derniers ce qui peut conduire à des solutions non fiables. C'est pourquoi, parfois, on préfère utiliser des méthodes dites stochastiques qui tiennent compte de ces incertitudes à l'aide d'une boucle supplémentaire d'analyse des incertitudes (Uncertainty Analysis, U.A.).

Dans la plupart des applications pratiques, l'U.A. est réalisée par une simulation de type Monte Carlo (Monte Carlo Simulation, MCS) combinée avec l'analyse structurale. En effet, l'analyse structurale permet d'évaluer la performance et la fiabilité d'une structure ou d'un système en identifiant les contraintes, les charges et les conditions aux limites. La simulation de type Monte Carlo est ensuite utilisée pour évaluer la fiabilité de la conception en effectuant des milliers de simulations stochastiques pour prendre en compte les incertitudes et les variations aléatoires dans les paramètres du modèle. Cette méthode a été inventée par John von Neumann et Stanislaw Ulam pendant la Seconde Guerre mondiale, afin d'améliorer la prise de décisions dans des conditions incertaines [2]. Elle tire son nom de la ville de Monte Carlo à Monaco, célèbre pour son casino et ses jeux de hasard, car elle utilise des nombres aléatoires pour simuler les événements incertains.

Voici ci-dessous la procédure à suivre lors de l'utilisation de la méthode de Monte Carlo :

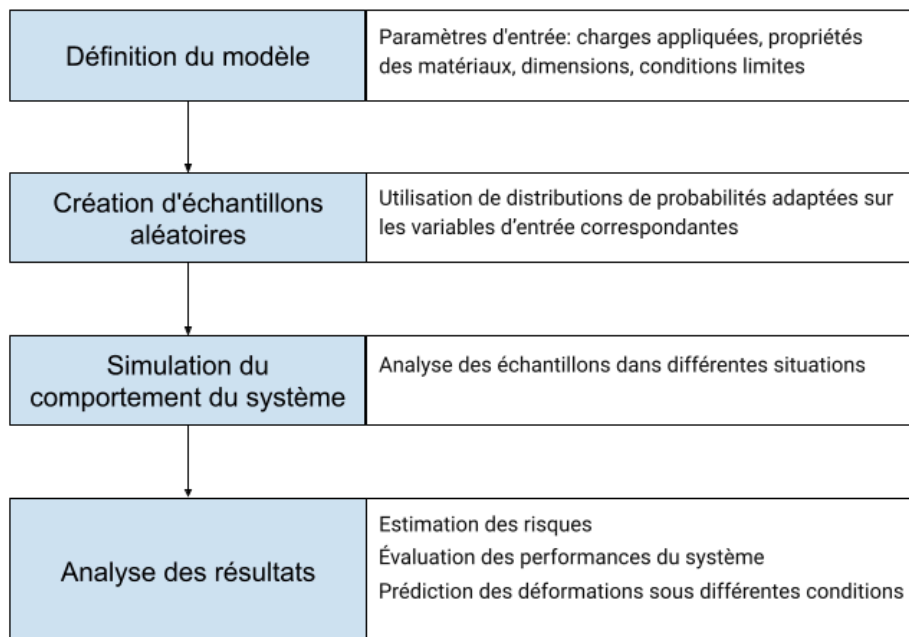


figure 1: procédure d'utilisation de la méthode de type Monte Carlo

À noter que les paramètres d'entrée varient en raison de la variabilité naturelle des matériaux, des conditions environnementales et des incertitudes de mesure, c'est pourquoi la simulation de Monte Carlo génère des échantillons aléatoires ensuite.

L'avantage de cette méthode est clairement sa fiabilité car elle prend en compte un très large éventail de situations que peut subir la structure, ce qui permet ensuite de pouvoir anticiper de nombreux problèmes. De plus, elle permet également de traiter des systèmes complexes et des structures dans lesquels les paramètres d'entrée ne sont pas linéaires ou mal définis. Cependant, cet outil nécessite de



nombreux calculs ce qui est très chronophage et entraîne des coûts importants. Néanmoins, cela n'empêche pas son utilisation dans de nombreuses études, en particulier lorsque les méthodes d'approximation ne sont pas adaptées.

### 3.1.2 LES MÉTHODES D'APPROXIMATION

#### A) Méthode du premier ordre (FORM)

FORM (First Order Reliability Method) est une méthode d'approximation analytique qui permet de trouver l'indice de fiabilité. Ce dernier est interprété comme la distance minimale entre l'origine et la surface de l'état limite (après avoir transformé l'espace physique en espace normalisé). Le point de défaillance le plus probable (point de conception) est recherché à l'aide de méthodes de programmation mathématique. La fonction de performance est approximée par une fonction linéaire dans l'espace gaussien au point le plus probable, ce qui peut poser des problèmes de précision lorsque la fonction de performance est fortement non linéaire.

La probabilité de défaillance se calcule ainsi:  $P_f = \Phi(-\beta)$

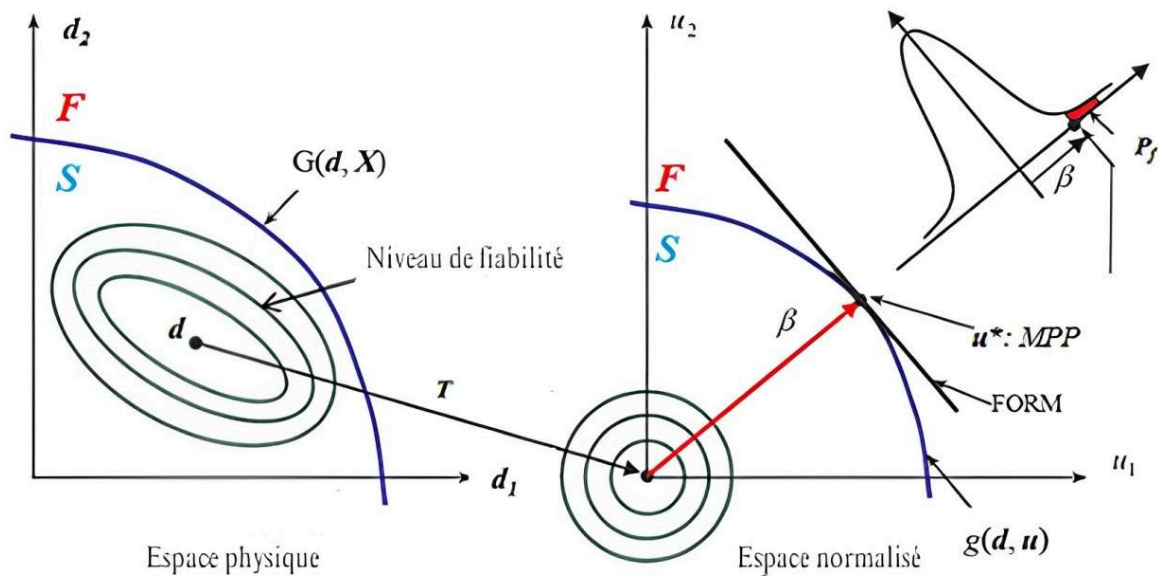


figure 2: transformation probabiliste de l'espace physique en espace gaussien en appliquant la méthode FORM [3]

#### B) Méthode du second ordre (SORM)

La méthode SORM (Second Order Reliability Method) a été établie pour améliorer la précision de la méthode FORM ou pour vérifier les résultats obtenus en appliquant cette dernière. Elle est obtenue en approximant la surface de l'état limite dans l'espace gaussien au point le plus probable par une surface du second ordre (à la place du point tangent).

La probabilité de défaillance se calcule à partir :  $Pf = \Phi(-\beta) \prod_{i=1}^{n-1} (1 - \beta k_i)^{-1/2}$

avec: n: nombre de variables aléatoires.

$k_i$ : courbures principales de la fonction G au point MPFP.

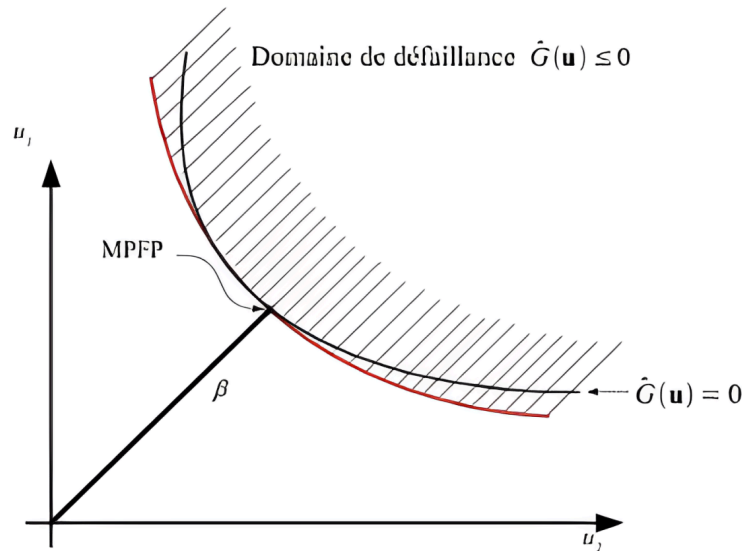


figure 3: représentation de l'approximation SORM [6]

En appliquant la méthode SORM, les matrices du second ordre de la fonction de performances doivent être calculées (les Hessiennes). Cela peut être souvent compliqué et peut consommer plus de temps en utilisant des logiciels mathématiques spécifiques. Il existe des méthodes qui peuvent résoudre le problème des Hessiennes. Ce sont des algorithmes d'ajustements ponctuels dans lesquels l'axe principal majeur de la surface d'état limite et la courbure correspondante sont obtenues au cours de l'obtention du point de conception sans calculer la matrice hessienne. Un "SORM alternatif" d'ajustement ponctuel a été développé dans lequel la fonction de performance est directement ajustée ponctuellement en utilisant une forme générale du polynôme du second ordre des variables aléatoires normales standard. Si la surface de second ordre dans l'espace "u" a été obtenue, la probabilité de défaillance est donnée comme le contenu de la probabilité à l'extérieur de la surface de second ordre. Bien que le calcul exact de la probabilité de défaillance soit assez compliqué, de nombreuses études ont contribué à développer des approximations, dont la précision dépend généralement des paramètres de la surface d'état limite (le rayon de courbure R au point de conception et le nombre de variables aléatoires n).

### C) Comparaison des deux méthodes

Contrairement à la SORM, la FORM n'est précise que dans le cas d'un rayon de courbure très important et d'un nombre de variables aléatoires minime. La SORM est donc effectivement plus précise ce qui peut impliquer le fait qu'elle puisse être utilisée pour vérifier les résultats de la FORM, si ceux-ci nécessitent une précision importante. À noter que la méthode SORM est une méthode dont les coûts de calculs sont importants sur le niveau temporel et financier. Concernant le domaine d'application de FORM, étant donné que la précision dans les applications techniques est généralement

de l'ordre de 5 %, l'équation suivante est utilisée dans le présent document pour examiner le domaine d'application de FORM en le comparant avec celui de la SORM:

$$\Phi(-\beta_S) - \Phi(-\beta_F) \leq 0.05 \Phi(-\beta_S)$$

avec:

$\beta_F$ : l'indice de fiabilité du premier ordre.

$\beta_S$ : l'indice de fiabilité de second ordre.

Si on compare les méthodes d'approximation avec les méthodes de simulation, les méthodes d'approximation sont moins coûteuses et moins compliquées à effectuer.

## 3.2 LES DIFFÉRENTES APPROCHES

### 3.2.1 DÉFINITION

La formulation de base du RBDO consiste à minimiser la fonction objective, sous des contraintes probabilistes. La fonction objective peut être soit un coût initial (par exemple le poids structurel), soit un coût associé au cycle de vie du sujet étudié (c'est-à-dire incluant la défaillance attendue et coûts d'exploitation). Dans les méthodes d'optimisation de conception basée sur la fiabilité, il y a deux types de variables qui sont prises en compte : la variable de conception  $\mathbf{d}$  et la variable aléatoire  $\mathbf{X}$ . La RBDO est ainsi communément écrite de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{d}} : & C(\mathbf{d}) & (1) \\ \text{s.t.} : & \begin{cases} \Pr[G_i(\mathbf{d}, \mathbf{X}) \leq 0] \leq P_{fi}^T & i = 1, \dots, m \\ h_j(\mathbf{d}) \leq 0 & j = m + 1, \dots, M \end{cases} \end{aligned}$$

“Pr[.]” étant l'opérateur probabilité, “ $G_i$ ” la fonction performance, “ $P_{fi}^T$ ” le niveau de fiabilité cible et enfin “ $h_j$ ” la contrainte déterministe. Pour les variables “ $i$ ” et “ $j$ ”, “ $m$ ” représente le nombre de fonctions de performances et “ $M$ ” le nombre total de contraintes.

Il existe trois types d'approches dans le cadre de la RBDO: l'approche à 2 niveaux, l'approche mono-niveau et l'approche découpée. Ces trois méthodes sont développées et expliquées dans les points suivants.

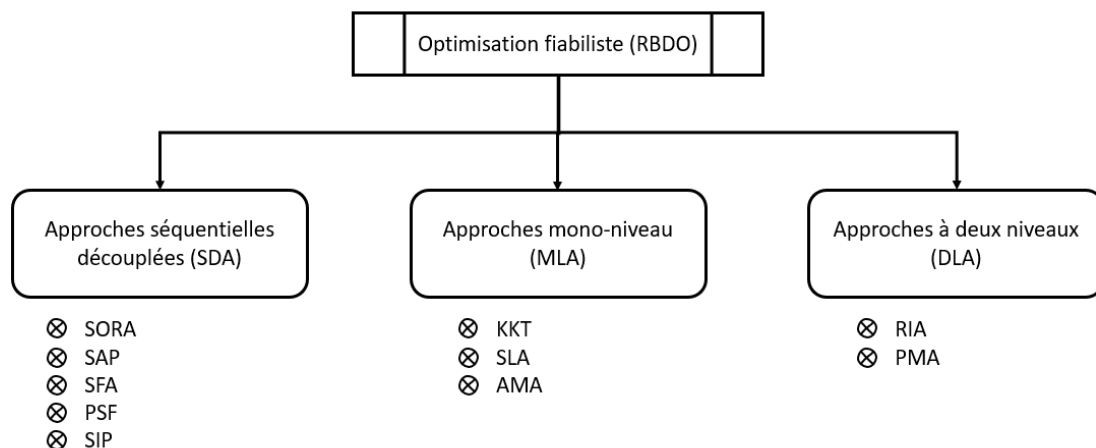


figure 4: découpe simplifiée des champs du RBDO

### 3.2.2 L'APPROCHE À DEUX NIVEAUX

L'approche à 2 niveaux considère les contraintes probabilistes à l'intérieur de la boucle d'optimisation. Cette approche conduit à des problèmes d'optimisation imbriqués. Dans cette approche la boucle interne évalue la fiabilité et la boucle externe s'occupe de l'optimisation de coûts (Enevoldsen et Sørensen 1994). Cela conduit à tester de manière répétée le modèle mécanique. L'efficacité générale de la RBDO est dépendante de la répartition entre le nombre total d'itération et les efforts de calcul dans chacune d'elles. Dans la pratique, on peut adapter la méthode choisie (RIA ou PMA) afin de s'adapter au problème et ainsi obtenir une solution robuste et efficace.

#### A) Approche de l'indice de fiabilité RIA

On détail ici l'approche qui se nomme RIA (Reliability Index Approach). Celle-ci utilise la méthode du premier ordre FORM pour réaliser l'analyse de fiabilité (expliquée précédemment dans la partie 3.1.2.A). (Enevoldsen et Sørensen 1994 ; Nikolaidis et Burdisso 1988). Dans cette approche on remplace les contraintes probabilistes par la contrainte de fiabilité d'indexation.

La méthode RIA vise donc à trouver la distance la plus courte entre l'origine et la courbe de performance, cela revient donc à trouver le MPFP (Most Probable Failure Point). La RIA est une méthode pouvant donner certaines singularités dans un grand nombre d'applications de la RBDO. Celles-ci limitent donc l'utilisation de la méthode pour certains problèmes. De plus, il a été prouvé que cette méthode, sur le volet conventionnel, possède une instabilité numérique lors de la recherche du MPFP. Cependant, la formulation a l'avantage d'être simple à implémenter dans des logiciels à usages généraux. [5]

#### B) Approche de mesure du rendement PMA

Dans l'approche de mesure de la performance (PMA), les contraintes probabilistes sont remplacées par des mesures de performances correspondant au niveau de fiabilité souhaité. C'est-à-dire que l'on utilise le principe selon lequel, il est plus efficace de minimiser une fonction complexe sous des conditions de contraintes simples, que de minimiser une fonction simple sous des contraintes complexes. La PMA peut donc se traduire comme une analyse de fiabilité inverse :

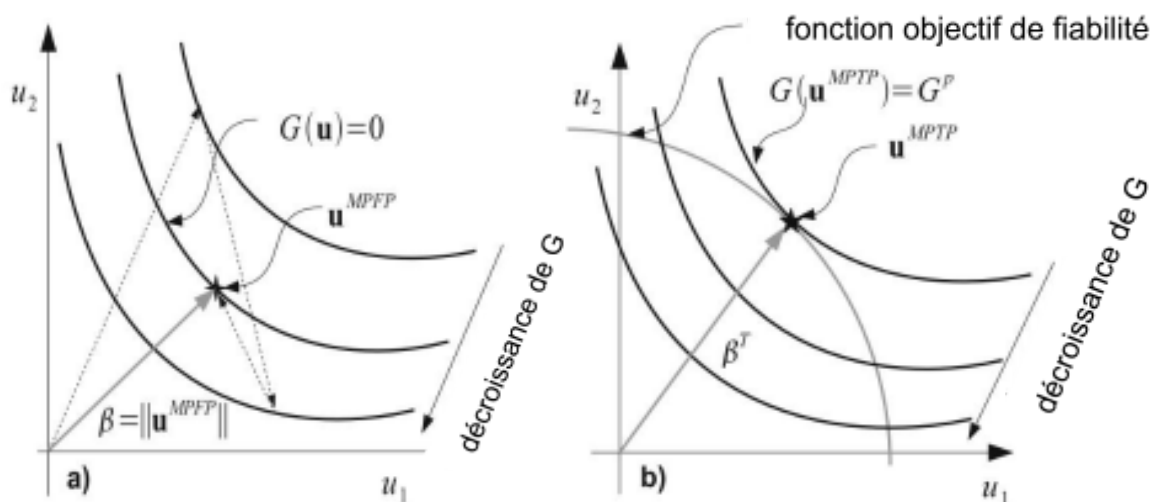


figure 5: schéma montrant les deux approches différentes de la méthode à deux niveaux [5]

Comme le montre la figure ci-dessus, la PMA se différencie de la RIA via une méthode de recherche très différente. Alors que la RIA cherche à trouver une condition d'état limite négative ou nulle, la PMA explore l'hypersphère de rayon égal à l'indice de fiabilité souhaité.

Cette méthode n'utilise pas un algorithme général pouvant résoudre tous les problèmes mais elle se base sur différents algorithmes comme par exemple : la valeur moyenne avancée (AMV), la valeur moyenne conjuguée (CMV) ou encore, l'algorithme hybride de valeur moyenne (HVM). Il n'y a pas de nécessité à utiliser des procédures de recherches de lignes car cette approche explore la contrainte d'égalité sphérique et donc, détermine la direction de recherche.

Il est important de noter que la PMA est un moyen très robuste utile à la RBDO. De plus, elle est beaucoup plus efficace face à l'évaluation de la contrainte probabiliste inactive. Le taux de convergence à la RBDO est ainsi beaucoup plus élevé.

### 3.2.3 L'APPROCHE MONO-NIVEAU

La RBDO basée sur PMA ou RIA implique des procédures en double boucle, ce qui entraîne une charge de calcul considérable. Cette charge est due à l'augmentation du nombre d'itérations et d'analyses mécaniques nécessaires pour l'optimisation et la modélisation probabiliste. Pour pallier cette complexité, Madsen et Friis Hansen (1992) ont introduit une méthode de la RBDO à un seul niveau. Dans cette approche, l'analyse de fiabilité est remplacée par les conditions d'optimalité de Karush-Kuhn-Tucker. Elle prend également en compte le coût total anticipé, y compris les coûts d'échec prévus.

#### A) Les conditions d'optimalité de Karush-Kuhn-Tucker

Mise en œuvre par Madsen et al [6], cette approche vise à minimiser la fonction du coût total. Cette dernière regroupe à la fois les coûts initiaux et les cas dus aux défaillances. Pour y parvenir, les conditions de Karush-Kuhn-Tucker remplacent les limitations fiabilistes usuelles. Le principe consiste à vérifier les deux conditions d'optimalité. Le problème est alors formulé en un seul niveau, et de ce fait l'algorithme d'optimisation cherche à déterminer les variables de conception, ainsi que les MPFP (Most Probable Failure Point) de chaque état limite. Le MPFP correspond au point d'un système où est

le plus probable qu'une défaillance se produise. Malheureusement, cette approche présente quelques inconvénients, comme les nombreux calculs complexes. De plus, la recherche simultanée des variables de conception et des MPFP rend le nombre de paramètres à optimiser important. Par exemple, si on se situe dans un problème RBDO faisant appel à  $p$  variables d'optimisation,  $q$  variables aléatoires et  $m$  fonctions d'état limite, cela entraîne  $p+mq$  paramètres à rechercher par résolution KKT. La RBDO avec les conditions de KKT offre un cadre rigoureux pour développer des conceptions qui minimisent le risque tout en restant économiquement compétitives.

#### B) La méthode SLA

La méthode SLA suggérée par Chen et al [6] propose de transformer les limitations fiabilistes en limitations déterministes. Cette approche permet donc de se limiter à une unique boucle, sans augmentation du nombre de variables à optimiser.

L'objectif ici est de remplacer le point caractéristique par le MPTP (Minimum Performance Target Point). Ce point représente le niveau minimal de performance requis pour un système. Le point caractéristique (ou le MPTP approché) est calculé en utilisant la moyenne et l'écart-type des variables aléatoires et en ajustant ces valeurs par un facteur basé sur la sensibilité de la limite d'état. Dans le cadre de la SLA, ce point est déterminé par une relation directe, basée sur les sensibilités de l'état limite par rapport aux variables aléatoires. Initialement conçue pour les variables distribuées normalement, cette approche peut cependant être adaptée à diverses distributions. En d'autres termes,

la méthode SLA simplifie la RBDO en une seule boucle, offrant une approche efficace pour trouver des solutions optimales tout en intégrant la fiabilité dès le début du processus de conception, favorisant ainsi une conception plus efficace et économique.

### C) AMA (Approximative Moments Approach)

L'approche AMA, fondée sur l'estimation des moments statistiques pour chaque fonction d'état limite, transforme les contraintes probabilistes en contraintes déterministes. Elle se base sur la méthode d'approximation FORM, qui dépend du développement en série de Taylor autour des valeurs moyennes pour estimer les moments statistiques. En faisant appel à des approximations, cette méthode nous permet d'obtenir des résultats corrects, tout en contournant le calcul de moments exacts, qui peut s'avérer très coûteux. Néanmoins, malgré sa popularité grandissante, l'approche AMA peut connaître des limitations dans le traitement de problèmes RBDO un petit peu plus complexes. En effet, cette méthode se base sur une approximation linéaire à proximité des valeurs moyennes, ce qui peut engendrer des erreurs assez significatives pour des fonctions d'état limite nettement non linéaires.

En outre, l'AMA admet que les variables aléatoires suivent une distribution normale, ce qui peut être limitatif dans la pratique. En effet, dans de nombreux cas, les distributions des variables sont mieux représentées par des modèles plus complexes tels que Weibull ou Gumbel, ce qui peut restreindre la pertinence de l'utilisation de l'approche AMA dans certains contextes.

## 3.2.4 L'APPROCHE DÉCOUPLÉE

L'approche découplée consiste à dissocier l'analyse de la fiabilité et la procédure d'optimisation. Dans cette optique, le problème d'optimisation sous contrainte de fiabilité (RBDO) est converti en une séquence d'optimisations déterministes. Ces dernières incorporent des contraintes déterministes qui sont directement issues de l'analyse de fiabilité. Ces contraintes servent à identifier l'espace fiable où la recherche de la conception optimale doit se faire. Au fil de ces méthodes, la conception subit des améliorations itératives jusqu'à atteindre une convergence. Le défi principal s'articule autour de la définition d'un problème RBDO équivalent qui garantit un niveau de précision adéquat.

### A) SFA – Wuet Wang (1998)

[5] La méthode SFA (Safety Factor Approach) est une technique utilisée dans l'optimisation fiabiliste (RBDO) qui simplifie la gestion des incertitudes en convertissant les contraintes de fiabilité en contraintes déterministes. Des coefficients de sécurité sont utilisés au sein de cette méthode, et sont modifiés à chaque itération pour s'assurer que la probabilité de défaillance reste en dessous d'un seuil choisi (seuil cible) [6].

Le but de cette méthode est donc que le facteur de sécurité soit indépendant de l'expérience d'ingénierie. L'analyse de sensibilité peut être considérée importante car elle peut permettre de fournir l'influence des paramètres sur le problème étudié.

La SFA transforme le problème RBDO en un problème d'optimisation déterministe, en transformant les états limites de telle sorte qu'ils respectent les exigences de fiabilité spécifiées. Cela peut être traduit que cette méthode permet de trouver le point de conception et de l'utiliser pour adapter pour choisir (ou respectivement ajuster) les coefficients de sécurité afin que ce point devienne une contrainte déterministe, cela implique que la contrainte de fiabilité est transformée en contrainte déterministe.

Cette approche possède des avantages nombreux :

- Elle permet une intégration directe du processus de la fiabilité dans celui de la conception.
- Elle rend le calcul plus accessible et facile
- Il s'agit d'une méthode peu coûteuse, rapide à effectuer et efficace.

## **B) SORA-Du et Chen (2004)**

La SORA peut être considérée comme l'une des approches découplées les plus efficaces qui consiste d'une évaluation séquentielle, proposée par Du et Chen (2004) [6].

La SORA vise à transformer le problème de la RBDO en des cycles d'optimisation déterministes et de fiabilité .

En d'autres termes, les contraintes de fiabilité dans les méthodes de RBDO traditionnelles sont remplacées par des fonctions déterministes liées au point de conception qui est déterminée par la FORM inverse. Le point de conception est vérifié et mis à jour à chaque convergence de l'optimisation déterministe en utilisant le problème de fiabilité inverse. De cette façon, la conception est améliorée par rapport au cycle et cette procédure est répétée jusqu'à convergence pour la fiabilité et le coût. Il est à noter que SORA et les SFA sont identiques sur le plan informatique mais leur implémentation peut être différente (Yang et Gu 2004). Sur le plan financier, la SORA peut coûter moins cher que la SFA grâce à l'approche implémentée dans la recherche du MPTP (sachant que la SFA n'emploie pas juste le MTPT mais elle recherche les valeurs de décalage entre les états limites). Dans la plupart des études comparatives, la SFA est considérée identique à la SORA sachant que leurs résultats sont assez similaires.

## **C) SAP-Cheng et al. (2006)**

La méthode SAP (Sequential Approximate Programming) correspond à un concept de programmation approximative séquentielle qui a été proposée par Cheng et al.(2006) [6], dans laquelle le problème de RBDO est reformulé comme un problème de sous programmation.

La SAP repose sur une série d'approximations de Taylor pour traiter les limitations fiabilistes dans le cadre de l'optimisation fiabiliste (RBDO). Au sein de cette approche le problème RBDO est décomposé en une succession de sous-problèmes d'optimisation déterministe résolus séquentiellement, basés sur un indice de fiabilité approché.

“Cette approximation est effectuée au voisinage du point de conception courant, basé sur un indice de fiabilité approché, obtenu par une relation récurrente qui découle des conditions d'optimalité de l'approche FORM. “ (Younes Aoues) [6]

Chaque itération de la méthode SAP affine l'indice de fiabilité approché en étudiant les sensibilités de la fonction d'état limite par rapport aux variables aléatoires. Cela va permettre d'étudier les variations minimales sur la fiabilité. L'approximation de l'indice de fiabilité et la solution des variables de conception vont être améliorées à chaque itération.

La SAP est particulièrement utile lorsqu'on a affaire à des problèmes où les fonctions de fiabilité sont complexes ou coûteuses à évaluer. Il faut également savoir que l'indice de fiabilité n'est pas calculé directement dans cette méthode. Cette méthode peut être avantageuse en offrant un équilibre entre l'efficacité computationnelle et la précision de la solution finale. Il s'agit alors d'un choix évident pour les applications pratiques où le temps et les ressources de calculs sont limités.

## **D) PSF - Qu et Haftka (2004)**

Qu et Haftka (2004) ont proposé un concept de sécurité facteur, appelé facteur de suffisance probabiliste (PSF), dans le but de lier l'exigence de fiabilité à l'optimisation déterministe [17].

La méthode PSF (Probabilistic Sufficiency Factor) en RBDO (Robust Design Optimization) est une approche qui transforme les contraintes de fiabilité en contraintes déterministes équivalentes,

permettant ainsi de simplifier la conception dans le domaine de l'ingénierie.

Le PSF mesure l'ajustement nécessaire afin d'atteindre une fiabilité visée, par exemple, un PSF de 0.9 signifie qu'une augmentation de capacité de 11% est requise pour atteindre la fiabilité désirée. Cette méthode est utile pour gérer les incertitudes liées aux matériaux et aux conditions environnementales.

Elle permet d'optimiser la conception dans l'objectif de minimiser la probabilité de défaillance tout en tenant compte des contraintes de performance et de sécurité. Les simulations de Monte Carlo sont souvent utilisées pour calculer le PSF, car elles permettent d'obtenir des estimations précises malgré les variations des propriétés des matériaux et des charges appliquées.

En effet, la méthode PSF offre un moyen quantitatif pour évaluer combien de ressources sont nécessaires pour satisfaire les exigences de sécurité, transformant ainsi les objectifs de fiabilité en spécifications de conception plus tangibles et contrôlables. [17]

### **E) SIP - Charnes et al. (1962)**

Les travaux de Charnes, Cooper et Kortanek (1962) [18] ont permis de mettre au point une méthode dans laquelle les contraintes de probabilité de défaillance sont remplacées par une estimation paramétrée du premier ordre, en plus de la prise en compte de la fiabilité du système.

La méthode SIP (Semi-Infinite Programming) est un cadre d'optimisation dans lequel on manipule un nombre fini de variables sous un nombre infini de contraintes. Cette configuration permet de gérer des scénarios complexes qui impliquent une grande variété de conditions potentielles qui doivent toutes être satisfaites à la fois.

Dans le contexte de la méthode SIP, les contraintes sont généralement représentées par des fonctions continues le long d'un ensemble infini, souvent paramétré par le temps ou d'autres variables continues. Le problème classique de SIP cherche à minimiser ou maximiser une fonction objectif tout en respectant toutes ces contraintes infinies, ce qui en fait une méthode puissante pour trouver des solutions optimales face à de nombreuses incertitudes.

Les applications de la SIP sont vastes et comprennent, par exemple, la conception optimale dans des contextes où les conditions varient continuellement ou sont mal définies à l'avance, comme l'optimisation de formes en aérodynamique ou en structure où les charges peuvent varier en fonction de multiples facteurs extérieurs et environnementaux.

Le développement des méthodes numériques pour résoudre les problèmes de SIP a également été un domaine de recherche actif ces dernières années, impliquant souvent des techniques de discrétisation pour rendre le problème infini plus gérable par des méthodes de calcul fini.

## **3.3 COMPARAISON DES DIFFÉRENTES APPROCHES**

Nous avons donc vu précédemment différentes méthodes d'optimisation de conception basée sur la fiabilité (RBDO) avec leurs critères respectifs tels que l'efficacité, la convergence, la précision, la robustesse et les généralités. Nous allons désormais les comparer à l'aide de différents exemples de référence, permettant ainsi une comparaison objective des performances des méthodes les plus utilisées en RBDO. Pour cela, nous nous baserons sur des études réalisées dans [6] ainsi que sur l'ensemble des articles que nous avons consultés.

Les comparaisons sont basées sur les critères suivantes:

- l'efficacité qui dépend du temps d'exécution et/ou du nombre total d'évaluations de la fonction d'état pour résoudre le problème .
- La convergence prenant en compte le nombre total d'itérations effectuées pour résoudre le problème.



- La précision qui est le critère permettant de valider le domaine d'application des approches testées, c'est la précision pour atteindre le critère optimal et assurer le niveau de la fiabilité exigé.
- La robustesse qui est le critère mesurant la stabilité de convergence pour un point de départ quelconque et ce quelle que soit la non linéarité de la fonction d'état limite.
- Les généralités représentant l'existence de plusieurs contraintes naturelles/générales (ex: var aléatoires, distributions de probabilité non normales,..).

Remarque: des coefficient de variations,  $C_v$ , variables d'optimisations peuvent être nécessaires à la comparaison de l'efficacité de certaines méthodes RBDO. Quand le coefficient de variation est nul, il s'agit d'une optimisation déterministe: les variables d'optimisation sont purement déterministes, toutes les méthodes d'optimisation vont converger vers le même optimum qui vérifie la fiabilité requise.

On peut considérer que les approches à deux niveaux sont faciles à mettre en œuvre donc elles peuvent être directement intégrées dans des logiciels généraux. Cependant, ce type d'approche nécessite un grand nombre de ressources calculatoires même s'il s'agit d'un problème de RBDO simple. Le PMA est considérée plus robuste et plus efficace si on le compare à la RIA selon des différentes études, bien qu'il soit limité aux structures comportant un petit nombre de variables de conception et aléatoires. Cela est dû à l'analyse de fiabilité inverse qui est plus efficace que l'analyse de fiabilité classique.

Les approches à un seul niveau présentent autant d'avantages que de désavantages. La KKT par exemple, possède une stabilité faible et peut être plus coûteuse que les approches à deux niveaux. La KKT peut souffrir numériquement de l'augmentation du nombre de contraintes d'égalité. De même, des complications au niveau mathématique peuvent exister : les approximations nécessaires pour traiter les dérivées secondes de l'état limite peuvent entraîner des erreurs, les problèmes de convergence peuvent survenir en raison d'approximations numériques ou de distributions de probabilités pas normales. Cette méthode ne peut pas être adaptée aux problèmes de RBDO dans lesquels il existe plusieurs états limites. En revanche la SLA est plus robuste et efficace car au sein de cette méthode, il n'y a pas qu'une analyse fiabiliste : une simple approximation numérique permet de trouver les limites fiabilistes, ce qui implique que dans certains cas il y a un manque de précision pour trouver le point de conception. Cependant on peut avoir des solutions non-précises.

Les approches découplées sont les approches les plus utilisées en RBDO. Elles sont également étudiées et considérées comme très intéressantes pour leur efficacité et leur capacité à traiter des problèmes complexes (un problème de RBDO peut être considéré complexe quand les nombres de variables aléatoires, variables d'optimisation et d'états limites sont importantes). La SAP est une méthode très efficace, qui peut résoudre des problèmes complexes et plusieurs états limites. Mais elle montre des faiblesses en termes de robustesse à cause de la linéarisation de l'indice de fiabilité : le point initial doit être très proche de l'optimum à chercher pour que cette méthode converge. Alors la SORA/SFA est plus robuste, précise et efficace .

La programmation semi-infinie (SIP) et le facteur de suffisance probabiliste (PSF) adressent des besoins différents en optimisation. SIP gère un nombre infini de contraintes pour optimiser des variables finies. PSF, en revanche, évalue combien ajuster un système pour atteindre une fiabilité ciblée, cruciale en conception de systèmes. Ainsi, SIP résout des problèmes structurels d'optimisation, tandis que PSF aide à ajuster la conception pour la fiabilité. Ces deux méthodes servent des objectifs différents mais sont toutes deux essentielles pour prendre des décisions éclairées dans des environnements complexes et incertains.

Pour conclure, l'approche mono niveau est la moins utilisée sachant que, chaque méthode de cette approche représente un grand nombre de désavantages surtout au niveau des ressources, calcul et précision. L'approche à deux niveaux est une approche dont les différentes méthodes peuvent être efficaces et robustes sachant que leurs avantages ont une valeur supérieure aux désavantages, s'il s'agit

d'un problème RBDO avec un nombre limité de variables aléatoires, la méthode RIA est considérée comme idéale pour résoudre ce problème. Enfin, l'approche découplée est celle la plus utilisée pour résoudre les problèmes RBDO, certaines méthodes de cette approche possèdent certes des désavantages, mais elles peuvent être considérées négligeables lorsqu'on compare à la qualité des résultats obtenus. S'il s'agit d'une méthode robuste, à un coût équitable et idéale pour un problème RBDO complexe, la SORA peut être une solution efficace.

### 3.4 DOMAINES D'APPLICATION DES DIFFÉRENTES APPROCHES

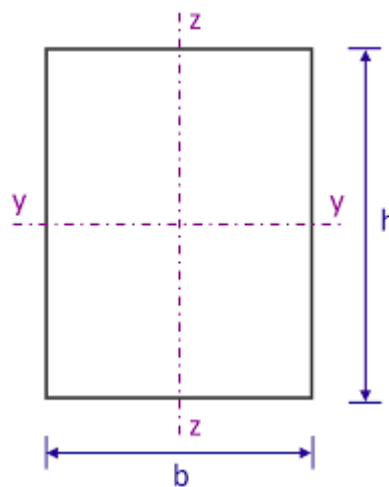


figure 6: figure représentant une poutre de section rectangulaire[20]

#### 3.4.1 EXEMPLE : OPTIMISATION D'UN POTEAU

[6] Il s'agit d'un problème RBDO avec une fonction d'état limite, et c'est un problème classique qui peut être utilisé pour comparer le nombre d'itérations des méthodes de la RBDO et leur incertitude. On va étudier un poteau de section rectangulaire de dimension  $b$  et  $h$ , soumis à un chargement  $F$  et deux moments  $M1$  et  $M2$ , qui sont des moments de flexions bi-axiale, alors on a un état limite:

$$G(X) = 1 - \frac{4M1}{4b^2f_y} - \frac{4M2}{4b^2f_y} - \frac{F^2}{(bhf_y)^2}$$

avec:  $f_y$ : la limite élastique du matériel.

Les variables aléatoires dans ce problème RBDO sont:  $b$ ,  $h$ ,  $f_y$ ,  $M1$ ,  $M2$ ,  $F$ .

Le niveau de fiabilité cible du poteau est fixé à  $\beta = 3$ .

On a  $\mu_b$  et  $\mu_h$  les moyennes de la largeur et de l'auteur qui sont les variables d'optimisation. En ajoutant une limitation physique pour déterminer la section, et des coefficients de variations,  $C_v$ , pour les dimensions  $b$  et  $h$  (quand le coefficient de variation est nul, il s'agit d'une optimisation déterministe: les variables d'optimisation sont purement déterministe), Quand le coefficient est égale à 0, toutes les méthodes d'optimisation vont converger vers le même optimum qui vérifie la fiabilité requise.

$$\begin{aligned} \min_{\mu_b, \mu_h} & : A = \mu_b \mu_h \\ \text{s.t.} & : \begin{cases} \Pr[G(\mathbf{X}) \leq 0] \leq \Phi(-\beta^c) \\ 0,5 \leq \mu_b / \mu_h \leq 2 \end{cases} \end{aligned}$$

NB:

- c'est la surface de la section qui compte dans ce cas-la et pas chacune des deux composantes b et h.
- On s'est intéressé à une distribution normale des variables aléatoires.

Sinon, quand on a le coefficient de variation nul on trouve que certaines méthodes comme la PMA, SAP et SORA donnent des sections proches et mieux optimisées, et la SLA RIA et KTT, vers des sections un peu plus élevées (qui sont des optimums locaux).

Or lorsque le coefficient est différent de 0 on remarque que la KKT a toujours abouti à un optimum local.

Au niveau de la SAP et la SLA on remarque qu'il ya des difficultés de convergences, en effet: la SLA n'est pas converge en utilisant le point de départ initial, cela souligne l'inconvénient de la convergence de cette méthode. La SAP n'a même pas convergé, même en utilisant des différents points de départ.

La KTT a convergé vers un optimum local à cause des instabilités numériques.

Toutes les autres méthodes on converge presque au même optimum et la SORA et la PMA ont été les plus robustes et stables au sein de cette expérience, mais la SORA était la moins calculatoire grâce à l'approche découplée.

Pour voir les résultats de cet exemple voir: [Annexe 1: Résultats de l'optimisation d'un poteau.](#)

## 4. CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

Ce projet bibliographique sur les méthodes d'optimisation de conception basée sur la fiabilité a nécessité une importante recherche documentaire sur le sujet et un véritable travail d'équipe et d'entraide car nous étions novices sur le sujet. Grâce à notre capacité à travailler ensemble, à notre motivation et notre organisation, nous avons pu atteindre nos objectifs et mener à bien cette étude approfondie. Nos recherches nous ont permis d'acquérir une expérience précieuse qui sera utile dans notre futur métier d'ingénieur. En effet, grâce à notre projet de recherche, nous avons exploré les différentes spécificités des méthodes d'optimisation de conception basée sur la fiabilité. Cette étude nous a permis de mieux appréhender les défis et les possibilités liées à la conception de pièces ou de structures.

En conclusion, notre projet de recherche sur les méthodes d'optimisation de conception basée sur la fiabilité a été une expérience enrichissante qui a renforcé nos connaissances et notre intérêt pour ce domaine. De plus, cela a permis d'améliorer nos compétences de recherches documentaires avec l'apprentissage de nouveaux outils comme Google Scholar ainsi que notre capacité à travailler en groupe ce qui nous sera utile pour la suite de nos études. À l'avenir, nous souhaitons intégrer les principes de l'optimisation de conception basée sur la fiabilité dans nos travaux afin de concevoir des solutions durables et efficaces..

Enfin, nous voulons remercier Madame Nouha LYAGOUBI pour nous avoir accompagné et guidé durant tout le projet.

## 5. BIBLIOGRAPHIE

- [1] - YU, Hang. Reliability-based design optimization of structures: methodologies and applications to vibration control. 2011. Thèse de doctorat. Ecully, Ecole centrale de Lyon. theses.fr – Hang Yu , Reliability-based design optimization of structures : methodologies and applications to vibration control
- [2] - [Qu'est-ce que la simulation de Monte-Carlo ? | IBM](#) (valide à la date du 10/04/2024)
- [3] - Lopez, Rafael Holdorf, and André Teófilo Beck. "Reliability-based design optimization strategies based on FORM: a review." *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering* 34 (2012): 506-514.
- [4] - Coelho, L. (2023). Reliability-based design optimization of composite laminates for aeroelastic applications (Doctoral dissertation, université Paris-Saclay).
- [5] - Aoues, Y., & Chateauneuf, A. (2010). Benchmark study of numerical methods for reliability-based design optimization. *Structural and multidisciplinary optimization*, 41(2), 277-294.
- [6] - Aoues, Y. (2008). *Optimisation fiabiliste de la conception et de la maintenance des structures* (Doctoral dissertation, Université Blaise Pascal-Clermont-Ferrand II).
- [7] - Kharmanda, M. G., Sharabatey, S., Ibrahim, H., Makloufi, A., & El-Hami, A. (2009). Reliability-based design optimization using semi-numerical methods for different engineering applications. *International Journal of CAD/CAM*, 9(1), 1-16.
- [8] - Tu, J., Choi, K. K., & Park, Y. H. (1999). A new study on reliability-based design optimization, *Journal of Mechanical Design*.
- [9] - Abid, F., El Hami, A., Merzouki, T., Trabelsi, H., Walha, L., & Haddar, M. (2019). Optimisation fiabiliste d'une structure en alliage à mémoire de forme. In *MATEC Web of Conferences* (Vol. 261, p. 02001). EDP Sciences.
- [10] - Younes Aoues. Optimisation fiabiliste de la conception et de la maintenance des structures. Génie des procédés. Université Blaise Pascal - Clermont-Ferrand II, 2008. Français. ffNNT : 2009CLF21908ff. fftel-00726003ff
- [11] - Fatma Abid. Contribution à la robustesse et à l'optimisation fiabiliste des structures. Mécanique des matériaux [physics.class-ph]. Normandie Université; École nationale d'ingénieurs de Sfax (Tunisie), 2019. Français. ffNNT : 2019NORMIR24ff. fftel-02925045f

- [12] - Lee, O. S., & Kim, D. H. (2006). The reliability estimation of pipeline using FORM, SORM and Monte Carlo simulation with FAD. *Journal of mechanical science and technology*, 20, 2124-213
- [13] - Strömberg, N. (2017). Reliability-based design optimization using SORM and SQP. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 56(3), 631-645.
- [14] - Gea, H. C., & Oza, K. (2006). Two-level approximation method for reliability-based design optimisation. *International Journal of Materials and Product Technology*, 25(1-3), 99-111.
- [15] - Torii, André J., Rafael H. Lopez, and Leandro F. F. Miguel. "A general RBDO decoupling approach for different reliability analysis methods." *Structural and Multidisciplinary Optimization* 54 (2016): 317-332.
- [16] An, X., & Shi, D. (2023). Enhanced modified reliability index approach for efficient and robust reliability-based design optimization. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 124(2), 382-401.
- [17] X. Qu & R.T. Haftka (2004). Reliability-based design optimization using probabilistic sufficiency factor. *Struct Multidisc Optim* 27, 314–325
- [18] López, M., & Still, G. (2007). Semi-infinite programming. *European Journal of Operational Research*, 180(1), 491-51
- [19] - Zhao, Yan-Gang, and Tetsuro Ono. "A general procedure for first/second-order reliability method (FORM/SORM)." *Structural safety* 21.2 (1999): 95-112.
- [20]-[https://www.calculs-eurocodes.com/eurocode\\_5/partie\\_1-1/bois\\_massif/flexion\\_simple/section\\_rectangulaire](https://www.calculs-eurocodes.com/eurocode_5/partie_1-1/bois_massif/flexion_simple/section_rectangulaire)

**6. ANNEXE**

**Annexe 1: Résultats de l'optimisation d'un poteau.**

Cv	0	0.05	0.1	0.15
RIA	S=0,1919 $\beta=3,00$ G-eval-FD(iter)=600(4)	S=0,2021 $\beta=2,99$ G-eval-FD(iter)=525(5)	S=0,2372 $\beta=3,000$ G-eval-FD(iter)=630(5)	S=0,3014 $\beta=3,000$ G-eval-FD(iter)=945(5)
PMA	S=0,1913 $\beta=2,996$ G-eval-FD(iter)=450(5)	S=0,2022 $\beta=2,997$ G-eval-FD(iter)=651(5)	S=0,2371 $\beta=2,999$ G-eval-FD(iter)=570(7)	S=0,3014 $\beta=2,999$ G-eval-FD(iter)=684(5)
KKT	S=0,2002 $\beta=2,997$ G-eval-FD(iter)=315(8)	S=0,2069 $\beta=2,997$ G-eval-FD(iter)=504(7)	S=0,2429 $\beta=2,994$ G-eval-FD(iter)=504(7)	S=0,3076 $\beta=2,991$ G-eval-FD(iter)=567(8)
SLA	S=0,1922 $\beta=2,996$ G-eval-FD(iter)=38(5)	S=0,2018 $\beta=2,984$ G-eval-FD(iter)=46(5)	S=0,2334 $\beta=0,925$ G-eval-FD(iter)=36(4)	S=0,2969 $\beta=2,954$ G-eval-FD(iter)=46(5)
SORA	S=0,1915 $\beta=2,999$ G-eval-FD(iter)=119(11)	S=0,2023 $\beta=2,999$ G-eval-FD(iter)=196(14)	S=0,2371 $\beta=2,997$ G-eval-FD(iter)=252(15)	S=0,3013 $\beta=2,998$ G-eval-FD(iter)=346(19)
SAP	S=0,1914 $\beta=2,999$ G-eval-FD(iter)=52(12)	S=0,2023 $\beta=2,999$ G-eval-FD(iter)=80(3)	S= nc $\beta= nc$ G-eval-FD(iter)= nc	S= nc $\beta= nc$ G-eval-FD(iter)= nc