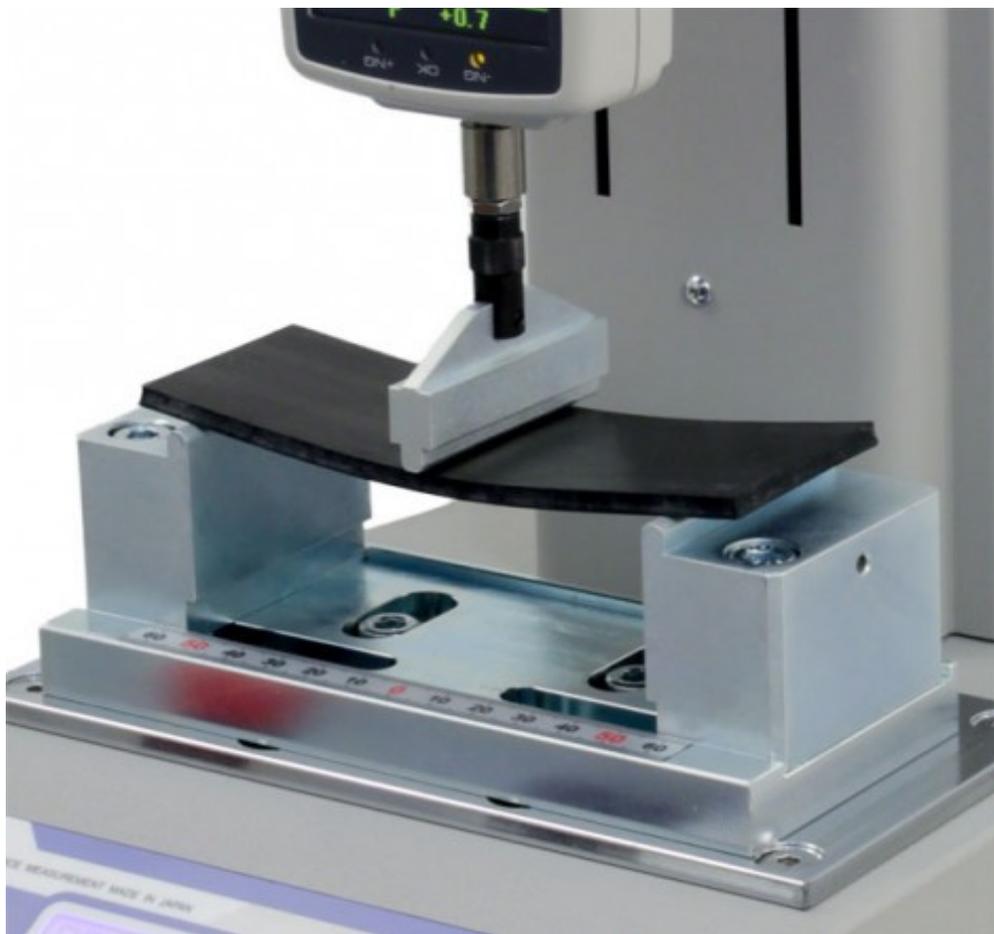


Déformation d'une plaque



Etudiants :

Alix Lecarpentier

Loula Girma

Léandre Courtemanche

Léo Gripon

Romain Lespinasse

Vincent Dubreuil

Enseignant-responsable du projet :

Bernard Gleyse

Date de remise du rapport : **12/06/2021**

Référence du projet : **STPI/P6/2021 – 10**

Intitulé du projet : **Déformation d'une plaque**

Type de projet : **Bibliographique, modélisation**

Objectifs du projet :

Ce projet a pour objectif de réaliser la modélisation de la déformation d'une plaque carrée en utilisant des méthodes de résolutions analytiques dans un premier temps avec le Laplacien et le Bilaplacien, puis de résoudre numériquement les équations matricielles trouvées.

Mots-clefs du projet : Plaque, Laplacien, Bilaplacien, Equation de poisson

TABLE DES MATIERES

1. Introduction.....	5
2. Méthodologie / Organisation du travail.....	5
3. Résolution avec le Laplacien.....	6
3.1. Résolution numérique.....	6
3.2. Résolution numérique du système linéaire associé.....	9
3.3. Validation du modèle numérique du Laplacien :.....	10
3.4. Aperçu de la solution.....	12
4. Résolution avec le Bilaplacien.....	13
4.1 Cas appui encastré.....	13
4.2. Résolution Mathématique : plaque en appui simple sur les bords.....	15
4.3. Autre méthode.....	18
4.4. Validation du modèle numérique du Bilaplacien :.....	18
4.5. Comparaison des résultats :.....	19
4.6. Aperçu de la solution :.....	20
5. Conclusions et perspectives.....	20
6. Bibliographie.....	21
7. Annexes.....	22
7. 1. Matrices.....	22
8. Propositions de sujets de projets.....	25

1. INTRODUCTION

Contexte du travail. Objectifs à atteindre pour le projet :

A cause du Covid-19, nous avons dû réaliser une partie des séances à distance, avec une moitié du groupe en présentiel et l'autre moitié en distanciel.

Lors de ce projet, on avait pour objectif de réaliser la modélisation de la déformation d'une plaque.

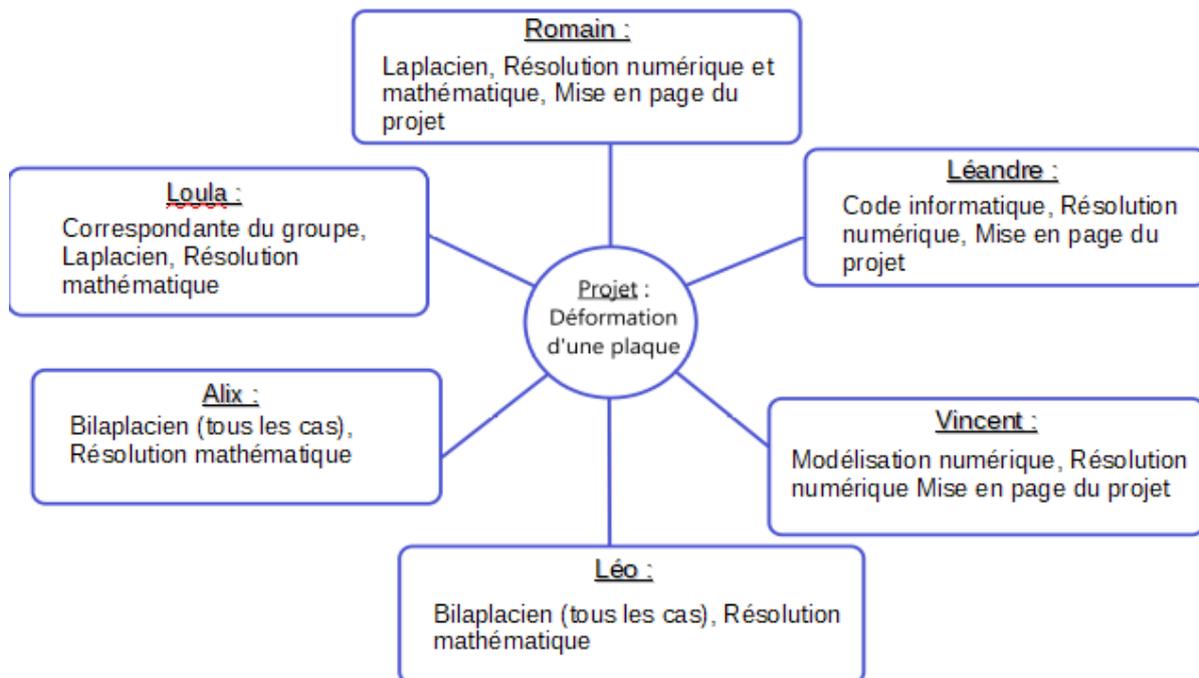
Ainsi, on devait réaliser la résolution numérique du Laplacien avec le cas $N=3$, $N=4$.

Puis, on devait résoudre numériquement le cas avec le Bilaplacien, pour un $N=8$ dans le cas avec l'appui encasté.

Enfin, nous avons déterminé avec la méthode du Bilaplacien la matrice quand $N=8$ dans le cas en appui simple et nous avons aussi résolu le système avec la méthode de Fourier.

2. MÉTHODOLOGIE / ORGANISATION DU TRAVAIL

On s'est divisé en 3 groupes, un qui travaillait sur le Laplacien, un sur le Bilaplacien et un groupe qui travaillait sur la résolution numérique avec les programmes en c et en Pascal.



3. RÉOLUTION AVEC LE LAPLACIEN

3.1. Résolution numérique

Enoncé du problème :

Dans ce cas, nous étudions la déformation d'une plaque sans évolution au cours du temps (cas stationnaire).

La plaque étudiée est rectangulaire et en position horizontale. Nous la mettons en tension en exerçant une force transversale et en fixant les bords (cas encasté). La déformation au bord est donc nulle. La surface d'étude évolue en fonction de la pression exercée.

L'équation de Poisson que nous utilisons traduit notre problème : $-c_1 \Delta u = f$

Nous cherchons u la déformation verticale.

C_1 est la tension appliquée à la plaque

F représente le terme source (ici pression sur la plaque)

Le domaine rectangulaire étudié est : $\Omega = [0; L_x][0; L_y]$, avec L_x la longueur et L_y la largeur.

Les conditions aux limites du problème sont que les bords de la plaque sont fixes. Alors nous avons : $u_{bords} = 0$

Résolution du problème :

Pour modéliser le comportement de la plaque, il faut la modéliser. Il nous faut donc pouvoir déterminer la position de nombreux points. Pour cela, nous allons procéder à une discrétisation, qui consiste au maillage de la plaque avec une approximation du Laplacien et des conditions limites

On pose $u = u(x_i; y_j)$ qui représente la hauteur du point considéré aux coordonnées $(x_i; y_j)$. $u_{i;j}$ est une approximation de la solution exacte du problème au nœud de maillage $(x_i; y_j)$.

Nous avons $N+1$ et $M+1$ qui sont le nombre de divisions des côtés de la plaque (longueur et largeur).

$$h = \frac{L_x}{N+1} \text{ et } k = \frac{L_y}{M+1}$$

De plus, on utilise les pas de discrétisation h et k tel que :

et $x_i = ih$ et $y_j = jk$ avec $j \in [0; N+1]$ et $i \in [0; M+1]$

D'après les conditions aux limites ($u_{bords} = 0$), nous avons :

$$u_{(0;j)} = 0, u_{(i;0)} = 0, u_{(N+1;j)} = 0, u_{(i;M+1)} = 0$$

Pour simplifier les calculs, nous considérons que la plaque est de forme carrée donc $N=M$, $L_x=L_y$ et donc $h=k$.

Pour résoudre ce problème nous allons réaliser un développement de Taylor.

- Développement de Taylor de x_i en h :

$$\rightarrow u(x_{(i+1)}; y_j) = u((i+1)h; y_j) = u(x_i + h; y_j)$$

$$u(x_{(i+1)}; y_j) = u(x_i; y_j) + h \frac{\delta u(x_i; y_j)}{\delta x} + \frac{h^2}{2} \frac{\delta^2 u(x_i; y_j)}{\delta x^2} + h^2 \varepsilon(h; y_j) \quad (1)$$

$$\rightarrow u(x_{(i-1)}; y_j) = u(x_i - h; y_j) = u(x_i; y_j) - h \frac{\delta u(x_i; y_j)}{\delta x} + \frac{h^2}{2} \frac{\delta^2 u(x_i; y_j)}{\delta x^2} + h^2 \varepsilon(h; y_j) \quad (2)$$

En additionnant (1)+(2) on obtient :

$$u(x_{(i+1)}; y_j) + u(x_{(i-1)}; y_j) \approx 2u(x_i; y_j) + h^2 \frac{\partial^2 u(x_i; y_j)}{\partial x^2} \quad (3)$$

On néglige les termes en epsilon car ceux-ci tendent vers 0 au voisinage de h

- Développement de Taylor de y_j en k :

$$\rightarrow u(x_i; y_{(j+1)}) = u(x_i; y_j) + k \frac{\delta u(x_i; y_j)}{\delta y} + \frac{k^2}{2} \frac{\delta^2 u(x_i; y_j)}{\delta y^2} + k^2 \varepsilon(k; x_i) \quad (4)$$

$$\rightarrow u(x_i; y_{(j-1)}) = u(x_i; y_j) - k \frac{\delta u(x_i; y_j)}{\delta y} + \frac{k^2}{2} \frac{\delta^2 u(x_i; y_j)}{\delta y^2} + k^2 \varepsilon(k; x_i) \quad (5)$$

En additionnant (4)+(5) on obtient :

$$u(x_i; y_{(j+1)}) + u(x_i; y_{(j-1)}) \approx 2u(x_i; y_j) + k^2 \frac{\partial^2 u(x_i; y_j)}{\partial y^2} \quad (6)$$

On néglige ici aussi pour la même raison les termes en epsilon.

Or on sait que $-c_1 \Delta u = f$

$$\Leftrightarrow -c_1 \left(\frac{\delta^2 u_{(i,j)}}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 u_{(i,j)}}{\delta y^2} \right) = f_{(i,j)} \quad (7)$$

En remplaçant dans la formule (7) par les données trouvées en (3) et (6) on obtient :

$$-c_1 \left[\frac{1}{h^2} [u_{(i+1,j)} - 2u_{(i,j)} + u_{(i-1,j)}] + \frac{1}{k^2} [u_{(i,j+1)} - 2u_{(i,j)} + u_{(i,j-1)}] \right] = f_{(i,j)} \quad (8)$$

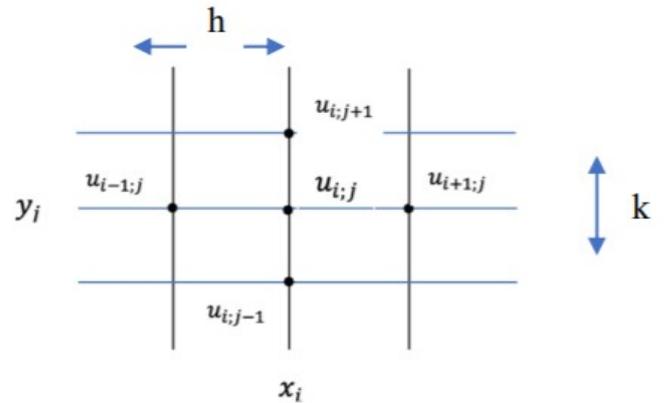
Sachant que nous prenons une plaque carrée, nous pouvons simplifier les calculs avec $h=k$, $M=N$, $L_x=L_y$.

$$\frac{-c_1}{h^2} (u_{(i+1,j)} + u_{(i,j+1)} + u_{(i-1,j)} + u_{(i,j-1)} - 4u_{(i,j)}) = f_{(i,j)} \quad (9)$$

Cette équation est valable pour les points de coordonnées $i, j = 0, \dots, N+1$.

On peut maintenant calculer la déformation en un point. Tout en conservant nos conditions aux limites, qui nous donnent : $u_{(0;j)} = 0$, $u_{(i;0)} = 0$, $u_{(M+1;j)} = 0$, $u_{(i;N+1)} = 0$

Cette déformation prendra en compte les 4 points les plus proches de celui choisis, comme le montre la figure ci-dessous :



Par exemple : Nous allons déterminer le système linéaire de matrice carrée. Prenons $N=3$.

D'après les conditions limites fixées préalablement nous savons que pour $i = 0 ; i = 4 ; j = 0 ; j = 4$, la déformation sera nulle car ces sont les points situés sur les « bords » de la plaque, soit $u_{i,j}=0$.

Nous allons déterminer cette déformation pour les points : $\{1,1 ; 1,2 ; 1,3 ; 2,1 ; 2,2 ; 2,3 ; 3,1 ; 3,2 ; 3,3\}$.

$$-u_{2,1} - u_{1,2} - 4u_{1,1} = \frac{h^2}{c_1} f_{1,1}$$

$$-u_{2,2} - u_{1,3} - u_{1,1} - 4u_{1,2} = \frac{h^2}{c_1} f_{1,2}$$

$$-u_{2,3} - u_{1,2} - 4u_{1,3} = \frac{h^2}{c_1} f_{1,3}$$

$$-u_{3,1} - u_{2,2} - u_{1,1} - 4u_{2,1} = \frac{h^2}{c_1} f_{2,1}$$

$$-u_{3,2} - u_{2,3} - u_{1,2} - u_{2,1} - 4u_{2,2} = \frac{h^2}{c_1} f_{2,2}$$

$$-u_{3,3} - u_{1,3} - u_{2,2} - 4u_{2,3} = \frac{h^2}{c_1} f_{2,3}$$

$$-u_{3,2} - u_{2,1} - 4u_{3,1} = \frac{h^2}{c_1} f_{3,1}$$

$$-u_{3,3} - u_{2,2} - u_{3,1} - 4u_{3,2} = \frac{h^2}{c_1} f_{3,2}$$

$$-u_{2,3} - u_{3,2} - 4u_{3,3} = \frac{h^2}{c_1} f_{3,3}$$

Le système linéaire associé est de la forme : $\frac{c_1}{h^2} A U = F$

Nous obtenons A une matrice de taille 9 tel que :

On va donc vérifier le modèle du Laplacien sur le cas avec la plaque fixée au bord comme condition aux limites.

Pour rappel : $u_{bords} = 0$ comme conditions aux limites et : $x_i = ih$ et $y_j = jh$ avec $h = k = \frac{L_x}{N+1}$

De plus notre plaque est carrée, donc $L_x = L_y = 1$.

On prend une fonction $p = xy(x-1)(y-1)$, on sait que cette fonction est solution au problème, donc :

$$-c_1 \Delta p = f_{(i,j)}$$

On fait une hypothèse en considérant c_1 comme étant égal à 1.

On doit donc calculer les dérivées secondes de p pour résoudre le problème :

$$\frac{\delta^2 p}{\delta x^2} = 2y^2 - 2y \quad \text{et} \quad \frac{\delta^2 p}{\delta y^2} = 2x^2 - 2x$$

On a que $-\Delta p = f_{(i,j)}$, donc on peut trouver $f_{(i,j)}$ à chaque nœud :

$$-2y^2 + 2y - 2x^2 + 2x = f_{(i,j)}$$

Ainsi, on peut résoudre le problème de la même manière qu'à la partie précédente en calculant mais B à chaque nœud.

On sait que $AU = B = h^2 f_{(i,j)} \Rightarrow B = h^2 f_{(i,j)}$

On va chercher à trouver U, pour cela nous allons d'abord calculer le seconde membre de l'équation B car nous savons que $B = h^2 f_{(i,j)}$.

Une fois que les B sont calculés à chaque nœud de notre problème, on peut chercher U comme on l'a fait dans la partie précédente : $AU = B$

Ainsi, lorsque $N=3$ on trouve :

i	j	B = H ² F _{i,j}	P _{i,j} avec f _{i,j} calculés
		H ² (-2y ² + 2y - 2x ² + 2x)	P _{i,j}
1	1	0,046875000000	0,0423376020238
1	2	0,054687500000	0,0558702801145
1	3	0,046875000000	0,0447761108887
2	1	0,054687500000	0,0666051279806
2	2	0,062500000000	0,0816799075456
2	3	0,054687500000	0,0630381378443
3	1	0,046875000000	0,0500418073038
3	2	0,054687500000	0,0614791355539
3	3	0,046875000000	0,0476086156452

Donc maintenant on peut comparer aux résultats polynomiaux (aux nœuds x_i, y_j)

Comparaison des résultats :

En fait, les composantes de U trouvées sont donc les $p_{(i,j)}$ (p étant solution de l'équation, $U=p$)

On va donc comparer ces $p_{(i,j)}$ aux $p_{(x_i,y_j)}$ pour voir si les résultats sont proches et si ils le sont, valider le modèle du Laplacien.

x_i,y_j	$P_{i,j}$	P_{x_i,y_j}	Erreur ($P_{i,j}-P_{x_i,y_j}$)
1,1	0,04233760202378	0,034938573893575	7,40E-03
1,2	0,055870280114529	0,047711598522282	8,16E-03
1,3	0,044776110888739	0,037019691326408	7,76E-03
2,1	0,066605127980591	0,056886447052017	9,72E-03
2,2	0,081679907545595	0,072013128869146	9,67E-03
2,3	0,06303813784431	0,053833627372946	9,20E-03
3,1	0,050041807303845	0,041338058886549	8,70E-03
3,2	0,061479135553888	0,052300499610773	9,18E-03
3,3	0,047608615645169	0,039304296200513	8,30E-03

On voit que les erreurs sont très faibles. Ces erreurs apparaissent car l'algorithme de résolution du problème fait de nombreuses approximations, et celles-ci ont des répercussions sur les $p_{(i,j)}$. Cependant, ces erreurs restent assez faibles, donc on peut considérer que notre résolution est bonne.

3.4. Aperçu de la solution

On utilise un logiciel de calcul formel, Maple pour modéliser la solution :

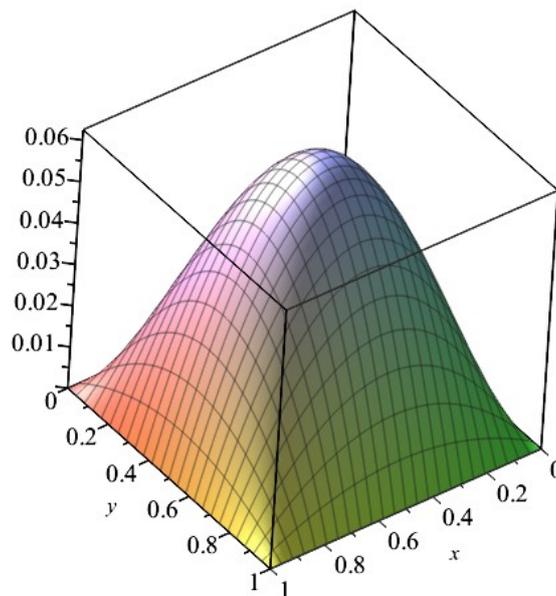


Figure 1: Modélisation de la déformation d'une plaque avec la méthode du Laplacien

On voit bien que localement, la plaque est déformée de manière assez conséquente, mais que

si on la regarde dans son ensemble on ne verra pas forcément cette déformation car elle reste assez petite.

On voit aussi, que plus on augmente le nombre de nœuds mieux la déformation sera modélisée précisément au détriment du temps de calcul.

4. RÉOLUTION AVEC LE BILAPLACIEN

4.1 Cas appui encastré

La deuxième approche possible dans la résolution de l'équation des plaques consiste à utiliser le bilaplacien qui se définit de la manière suivante : $\Delta u^2 = \Delta(\Delta u)$

Dans ce cas on considère la plaque carrée et l'équation à résoudre devient : $c^2 \Delta^2 u = f$ avec u le terme de source et c^2 définit comme le coefficient de résistance à la flexion dont la forme est la suivante: $c^2 = \frac{Ee}{12(1-\nu)}$ où E est le module de Young du matériau de la membrane, e est l'épaisseur de la membrane et ν le coefficient de poisson du matériau.

Dans un premier temps, on considère que la plaque est encastrée sur les bords. Elle n'admet pas de mouvements de torsions sur ses bords, les conditions limites sont donc les suivantes :

$$u_{bords} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{donc :} \quad u_{(i,j)} = u_{(i,N-1)} = u_{(i,1)} = u_{(N-1,j)} = 0 \quad \text{car} \quad u_{(0,j)} = u_{(i,N)} = u_{(i,0)} = u_{(N,j)} = 0$$

Comme pour le cas du laplacien la plaque est discrétisée. On choisit un pas $h = \frac{1}{n}$ avec $x_i = ih, y_i = ih \quad \forall i, j \in \llbracket 0, N \rrbracket^2$.

L'équation initiale devient alors $c_2 \Delta^2 u_{i,j} = f_{i,j}$

Pour ce qui est du calcul du bilaplacien de $u_{i,j}$, on utilise la formule $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 u}{\partial^2 y}$

que l'on réapplique une seconde fois comme suit : $\Delta^2 u = \frac{\partial^2(\Delta u)}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2(\Delta u)}{\partial^2 y}$ On obtient alors :

$$\Delta^2 u = \frac{\partial^4(u)}{\partial^4 x} + \frac{\partial^4(u)}{\partial^2 x \partial^2 y} + \frac{\partial^4(u)}{\partial^2 y \partial^2 x} + \frac{\partial^4(u)}{\partial^4 y} \quad \text{puis grâce au théorème de Schwartz on peut}$$

échanger les variables et ainsi regrouper les deux termes du milieu tel que

$$\Delta^2 u = \frac{\partial^4(u)}{\partial^4 x} + 2 \frac{\partial^4(u)}{\partial^2 x \partial^2 y} + \frac{\partial^4(u)}{\partial^4 y}$$

$$c_2 \Delta^2 u_{i,j} = -c_2 \left[\frac{1}{h^2} [u_{x_{i+1}; y_j} - 2u_{x_i; y_j} + u_{x_{i-1}; y_j}] + \frac{1}{k^2} [u_{x_i; y_{j+1}} - 2u_{x_i; y_j} + u_{x_i; y_{j-1}}] \right] = f_{i,j}$$

On réalise alors les approximations suivantes : $u_{ij} \simeq u_{(xi,yj)}$ et $f_{ij} = f_{(xi,yj)}$ et on remplace u_{ij} par $-\Delta u_{ij}$; $u_{i,j+1}$ par $-\Delta u_{i,j+1}$ et ainsi de suite.

$$-c_2 \left[\frac{1}{h^2} \left[\frac{1}{h^2} [u_{i+2;j} - 2u_{i+1;j} + u_{i;j}] + \frac{1}{k^2} [u_{i+1;j+1} - 2u_{i+1;j} + u_{i+1;j-1}] \right] - 2 \left[\frac{1}{h^2} [u_{i+1;j} - 2u_{i;j} + u_{i-1;j}] + \frac{1}{k^2} [u_{i;j+1} - 2u_{i;j} + u_{i;j-1}] \right] + \left[\frac{1}{h^2} [u_{i;j} - 2u_{i-1;j} + u_{i-2;j}] + \frac{1}{k^2} [u_{i-1;j+1} - 2u_{i-1;j} + u_{i-1;j-1}] \right] \right. \\ \left. + \frac{1}{k^2} \left[\frac{1}{h^2} [u_{i+1;j+1} - 2u_{i;j+1} + u_{i;j+1}] + \frac{1}{k^2} [u_{i;j+2} - 2u_{i;j+1} + u_{i;j}] \right] - 2 \left[\frac{1}{h^2} [u_{i+1;j} - 2u_{i;j} + u_{i-1;j}] + \frac{1}{k^2} [u_{i;j+1} - 2u_{i;j} + u_{i;j-1}] \right] + \left[\frac{1}{h^2} [u_{i;j-1} - 2u_{i;j-1} + u_{i-1;j-1}] + \frac{1}{k^2} [u_{i;j} - 2u_{i;j-1} + u_{i;j-2}] \right] \right] = f_{i,j}$$

On obtient alors :

$$\Delta^2 u_{i,j} = \frac{1}{h^2} u_{i-2;j} - \left(\frac{4}{h^2 k^2} + \frac{4}{k^4} \right) u_{i-1;j} + \left(\frac{8}{h^2 k^2} + \frac{6}{h^4} + \frac{6}{k^4} \right) u_{i+1;j} + \frac{1}{h^4} u_{i+2;j} + \frac{2}{h^2 k^2} u_{i-1;j+1} \\ - \left(\frac{4}{h^2 k^2} + \frac{4}{k^4} \right) u_{i;j+1} + \frac{2}{h^2 k^2} u_{i+1;j+1} + \frac{1}{k^4} u_{i;j+2} + \frac{1}{k^4} u_{i;j-2} + \frac{2}{h^2 k^2} u_{i-1;j-1} - \left(\frac{4}{h^2 k^2} + \frac{4}{k^4} \right) u_{i;j-1} + \frac{2}{h^2 k^2} u_{i+1;j-1}$$

Or d'après l'hypothèse de départ la plaque est considérée carrée, c'est-à-dire que $h=k$ et $M=N$

$$c_2 \Delta^2 u_{i,j} = \frac{1}{h^4} [u_{i;j-2} + 2u_{i-1;j-1} - 8u_{i;j-1} + 2u_{i+1;j-1} + u_{i-2;j} - 8u_{i-1;j} + 2u_{i+1;j-1} + u_{i-2;j} - 8u_{i-1;j} + 20u_{i;j} - 8u_{i+1;j} + u_{i+2;j} + 2u_{i-1;j+1} - 8u_{i;j+1} + 2u_{i+1;j+1} + u_{i;j+2}]$$

L'équation obtenue peut s'interpréter comme les coefficients de 12 points entourant un point central sur un maillage

Pour résoudre cette équation linéaire, on va réaliser une résolution matricielle. En effet cette équation est de la forme $A*u = b$ avec A la matrice des coefficients, u le vecteur des points de la grille et $b = \frac{h^4}{c_2} f_{i,j}$

On prend l'exemple d'un carré de côté $N=8$ avec $h = 1/N$, les termes pour lesquels les indices sont 0,1,7,8 sont nuls d'après les conditions initiales

Pour la première équation on obtient :

$$20u_{2,2} - 8u_{2,3} + u_{2,4} - 8u_{3,2} + 2u_{3,3} + u_{4,2} + 2u_{3,1} + u_{2,0} - 8u_{2,1} + 2u_{1,3} + 2u_{1,1} - 8u_{1,2} + u_{0,2} = \frac{h^4}{c_2} f_{2,2}$$

En appliquant cette méthode à toutes les lignes d'équation, on obtient la matrice carré-tridiagonale par blocs A :

$$A = \begin{pmatrix} R & B & I_5 & 0_5 & 0_5 \\ B & R & B & I_5 & 0_5 \\ I_5 & B & R & B & I_5 \\ 0_5 & I_5 & B & R & B \\ 0_5 & 0_5 & I_5 & B & R \end{pmatrix}$$

avec O_5 la matrice nulle de taille 5, I_5 la matrice identité, R et B les matrices définies par :

$$R = \begin{pmatrix} 20 & -8 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 20 & -8 & 1 & 0 \\ 0 & -8 & 20 & -8 & 1 \\ 0 & 1 & -8 & 20 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & -8 & 20 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} -8 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -8 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -8 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -8 \end{pmatrix}$$

Ainsi, lorsqu'on résout le système avec la méthode de Cholesky, comme dans la partie du Laplacien, on obtient :

On prend $B = h^4 f_{(i,j)}$ avec $h = \frac{1}{N}$ et $c_2 = 1$.

On trouve donc :

1	w ² vecteur x :
2	0.0004484876355954
3	0.0008795125563373
4	0.0010482474971695
5	0.0008795125563373
6	0.0004484876355954
7	0.0008795125563373
8	0.0017242290389806
9	0.0020553218137479
10	0.0017242290389806
11	0.0008795125563373
12	0.0010482474971695
13	0.0020553218137479
14	0.0024502089432206
15	0.0020553218137479
16	0.0010482474971695
17	0.0008795125563373
18	0.0017242290389806
19	0.0020553218137479
20	0.0017242290389806
21	0.0008795125563373
22	0.0004484876355954
23	0.0008795125563373
24	0.0010482474971695
25	0.0008795125563373
26	0.0004484876355954
27	

4.2. Résolution Mathématique : plaque en appui simple sur les bords

La résolution de l'équation d'équilibre dans le cas d'une flexion simple peut également s'obtenir en appliquant la méthode des séries de fourier :

$$D \times \Delta^2 \omega = P$$

avec P la pression appliquée sur la plaque et ω la déformation verticale

On commence par établir les nouvelles conditions aux limites relatives à l'appui simple sur les bords.

Conditions aux limites :

$$- \omega = 0 \quad \text{pour } x=0 \text{ et } x = L_x; \quad y = 0 \text{ et } y = L_y$$

$$- \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} = 0 \quad \text{pour } x = 0 \text{ et } x = L_x$$

$$- \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} = 0 \quad \text{pour } y = 0 \text{ et } y = L_y$$

Résolution de l'équation :

$$L' \text{ équation à résoudre se } \Delta^2 \omega = \frac{\partial^4 \omega}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^4 \omega}{\partial y^2 \partial x^2} + \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^4} \text{ présente sous la forme :}$$

On utilise la méthode de Fourier dont la forme générale est :

$$\omega = \sum_{m,n} a_{m,n} \omega_{m,n} \text{ avec } \omega_{m,n} = \sin\left(\frac{m\pi x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right) \forall m, n \geq 1$$

Elle se présente sous la forme d'une combinaison linéaire des fonctions sinus et cosinus que l'on regroupe par principe de superposition.

On commence par calculer $\frac{\partial^4 \omega}{\partial y^4}, \frac{\partial^4 \omega}{\partial y^2 \partial x^2}, \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^4}$

en utilisant la formule de Fourier, on obtient ainsi :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega_{m,n}}{\partial x} &= \frac{m\pi}{L_x} \cos\left(\frac{m\pi x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right) & \frac{\partial^2 \omega_{m,n}}{\partial x^2} &= -\left(\frac{m\pi}{L_x}\right)^2 \sin\left(\frac{m\pi x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right) \\ \frac{\partial^3 \omega_{m,n}}{\partial x^3} &= -\left(\frac{m\pi}{L_x}\right)^3 \cos\left(\frac{m\pi x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right) & \frac{\partial^4 \omega_{m,n}}{\partial x^4} &= \left(\frac{m\pi}{L_x}\right)^4 \sin\left(\frac{m\pi x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right) \end{aligned} \quad \forall m, n \geq 1$$

En utilisant les mêmes méthodes de calcul, on obtient $\frac{\partial^4 \omega_{m,n}}{\partial y^4} = \left(\frac{n\pi}{L_y}\right)^4 \sin\left(\frac{m\pi x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right)$

Pour obtenir $\frac{\partial^4 \omega_{m,n}}{\partial y^2 \partial x^2}$

On commence par calculer $\frac{\partial^2 \omega_{m,n}}{\partial y^2} = -\left(\frac{n\pi}{L_y}\right)^2 \sin\left(\frac{m\pi x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right)$

Puis on intègre deux fois par rapport à x successivement ce qui nous donne :

$$\frac{\partial^3 \omega_{m,n}}{\partial y^2 \partial x} = -\left(\frac{n\pi}{L_y}\right)^2 \frac{m\pi}{L_x} \cos\left(\frac{m\pi x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right) \quad \frac{\partial^4 \omega_{m,n}}{\partial y^2 \partial x^2} = \left(\frac{m\pi}{L_x}\right)^2 \left(\frac{n\pi}{L_y}\right)^2 \sin\left(\frac{m\pi x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right) \quad \forall m, n \geq 1$$

On remplace alors les termes obtenus dans la formule du bilaplacien en factorisant

$$\Delta^2 \omega_{m,n} = \left[\left(\frac{m\pi}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{L_y}\right)^2 \right]^2 \sin\left(\frac{m\pi x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right) \quad \Delta^2 \omega_{m,n} = \left[\left(\frac{m\pi}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{L_y}\right)^2 \right]^2 \omega_{m,n}$$

$$\Delta^2 \omega_{m,n} = \gamma_{m,n} \omega_{m,n} \quad \gamma_{m,n} = \left[\left(\frac{m\pi}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{L_y}\right)^2 \right]^2 \quad \forall m, n \geq 1$$

$$\Delta^2 \omega_{m,n} = \Delta^2 \sum_{m,n} a_{m,n} \omega_{m,n}$$

Par propriété de l'opérateur linéaire, on peut le rentrer dans la somme tel que :

$$\Delta^2 \omega_{m,n} = \sum_{m,n} a_{m,n} \Delta^2 \omega_{m,n}$$

On remplace par la formule que l'on a obtenu avant, ainsi :

$$\forall m, n \geq 1 \quad \Delta^2 \omega = \sum_{m,n} a_{m,n} \gamma_{m,n} \omega_{m,n} \text{ avec } \gamma_{m,n} = \left[\left(\frac{m\pi}{L_x} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{L_y} \right)^2 \right]^2 \text{ et } \omega_{m,n} = \sin\left(\frac{m\pi x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right)$$

Or l'équation que l'on cherche à résoudre est : $D \times \Delta^2 \omega = P$

On va donc réécrire le polynôme P comme une combinaison linéaire des fonctions de base $\omega_{m,n}$ en utilisant le résultat sur les séries de Fourier afin d'établir l'expression de P :

$$P = \sum_{m,n} P_{m,n} \sin\left(\frac{m\pi x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right) \quad \forall m, n \geq 1$$

Puis par identification, on obtient $a_{m,n} \gamma_{m,n} = P_{m,n} \frac{1}{D} \Leftrightarrow a_{m,n} = \frac{P_{m,n}}{\gamma_{m,n} D}$

On remplace alors l'expression obtenue dans la formule de ω tel que :

$$\omega = \sum_{m,n} a_{m,n} \omega_{m,n} \quad \omega = \sum_{m,n} \frac{P_{m,n}}{\gamma_{m,n} D} \omega_{m,n}$$

On obtient finalement :

$$\omega = \sum_{m,n} \frac{P_{m,n}}{D \left[\left(\frac{m\pi}{L_x} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{L_y} \right)^2 \right]^2} \sin\left(\frac{m\pi x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right) \quad \forall m, n \geq 1$$

On vérifie ensuite que les conditions limites aux bords sont vérifiées à l'aide de l'expression obtenue :

$$\text{pour } x = 0 \quad \omega(0, y) = \sum_{m,n} \frac{P_{m,n}}{D \left[\left(\frac{m\pi}{L_x} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{L_y} \right)^2 \right]^2} \sin\left(\frac{m\pi \cdot 0}{L_x}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right) = 0$$

$$x = L_x \quad \omega(L_x, y) = \sum_{m,n} \frac{P_{m,n}}{D \left[\left(\frac{m\pi}{L_x} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{L_y} \right)^2 \right]^2} \sin(m\pi) \sin\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right) = 0$$

D'une manière équivalente on obtient :

$$\begin{aligned} y = 0 & \quad \omega(x, 0) = 0 \\ y = L_y & \quad \omega(x, L_y) = 0 \end{aligned}$$

La dernière étape consisterait à trouver une expression mathématique pour les coefficients $P_{m,n}$.

Cela nous montre que la solution est valide à l'intérieur de la plaque. De plus le cas encasté atteste que cette solution est correcte sur les bords.

ω est donc la solution de notre problème et elle vérifie les conditions aux limites.

4.3. Autre méthode

On reprend la même équation et hypothèses que pour le cas encastéré mais pas les mêmes conditions aux limites : au bord on a $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ et $U=0$ (voir calculs condition au limites en annexe).

D'où :

$$c^2 \Delta^2 u_{i,j} = (1/h^4) * [u_{i,j-2} + 2u_{i-1,j-1} - 8u_{i,j-1} + 2u_{i+1,j-1} + u_{i-2,j} - 8u_{i-1,j+2} + u_{i+1,j-1} + u_{i-2,j} - 8u_{i-1,j} + 20u_{i,j} - 8u_{i+1,j} + u_{i+2,j+2} + u_{i-1,j+1} - 8u_{i,j+1} + 2u_{i+1,j+1} + u_{i,j+2}]$$

Exemple pour le premier point : $12,5u_{2,2} - 7u_{2,3} + u_{2,4} - 7u_{3,2} + 2u_{3,3} + u_{4,2} = \frac{h^4}{c_2} f_{2,2}$. On obtient la matrice suivante :

$$A = \begin{matrix} E & C & I & O & O \\ D & B & C & I & O \\ I & C & B & C & I \\ O & I & C & B & C \\ O & O & I & C & E^\circ \end{matrix} \text{ avec } E = \begin{matrix} 12,5 & -7 & 1 & 0 & 0 \\ -6,5 & 16 & -7 & 1 & 0 \\ 1 & -7 & 16 & -7 & 1 \\ 0 & 1 & -7 & 16 & -6,5 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & 12,5 \end{matrix}, B = \begin{matrix} 16 & -8 & 1 & 0 & 0 \\ -7,5 & 20 & -8 & 1 & 0 \\ 1 & -8 & 20 & -8 & 1 \\ 0 & 1 & -8 & 20 & -7,5 \\ 0 & 0 & 1 & -8 & 16 \end{matrix}$$

$$C = \begin{matrix} -7 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -8 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -8 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -7 \end{matrix}, D = \begin{matrix} -6,5 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -7,5 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -7,5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -7,5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -6,5 \end{matrix}$$

et E° la même matrice que E mais avec le terme en haut à gauche égal à 13.

On ne peut pas résoudre le système avec la méthode de Cholesky car A n'est pas symétrique.

4.4. Validation du modèle numérique du Bilaplacien :

Dans cette partie, nous allons comparer les résultats obtenus numériquement dans la partie précédente, qui sont des résultats théoriques avec des résultats polynomiaux tout comme nous l'avons fait pour le Bilaplacien.

On va donc vérifier le modèle du Bilaplacien sur le cas avec la **plaque fixée au bord** comme condition aux limites.

Pour rappel, les conditions aux limites sont : $u_{bords} = 0$ et $\frac{\delta u}{\delta n} = 0 \Rightarrow u_{(1,j)} = u_{(i,N-1)} = u_{(i,1)} = u_{(N-1,j)} = 0$

, notre plaque est carrée avec : $x_i = ih$ et $y_j = jh, h = \frac{1}{N}$ et $i, j \in [0, N]^2$

On prend une fonction $p = x^2 y^2 (1-x)^2 (1-y)^2$.

On sait qu'elle est solution au problème, donc $-c_2 \Delta^2 p = f_{(i,j)}$

On considère que c_2 est égal à 1 pour simplifier le problème.

Donc on a que $\Delta^2 p = \frac{\delta^4 p}{\delta x^2} + \frac{\delta^4 p}{\delta y^2} + 2 \frac{\delta^4 p}{\delta x^2 \delta y^2}$ ce qui donne :

$$\frac{\delta^4 p}{\delta x^4} = 24 y^2 (1-y)^2 \text{ et } \frac{\delta^4 p}{\delta y^4} = 24 x^2 (1-x)^2 \text{ et } 2 \frac{\delta^4 p}{\delta x^2 \delta y^2} = 8(6y^2 - 6y + 1)(6x^2 - 6x + 1)$$

On peut donc trouver $f_{(i,j)}$ à chaque nœud :

$$f_{(i,j)} = 24x^4 - 48x^3 + 288(y - 1/2)^i + (-288y^2 + 288y - 48)x + 24y^4 - 48y^3 + 72y^2 - 48y + 8$$

Ainsi, on peut trouver chaque composante de B et donc résoudre $AU = B$ avec

$$B = h^4 f_{(i,j)}$$

Ainsi lorsque N=8, on trouve :

i	j	B=H^4*Fi,j
2	2	0,000442504882813
2	3	0,000627040863037
2	4	0,000694274902344
2	5	0,000627040863037
2	6	0,000442504882813
3	2	0,000627040863037
3	3	0,00096607208252
3	4	0,001084804534912
3	5	0,00096607208252
3	6	0,000627040863037
4	2	0,000694274902344
4	3	0,001084804534912
4	4	0,001220703125
4	5	0,001084804534912
4	6	0,000694274902344
5	2	0,000627040863037
5	3	0,00096607208252
5	4	0,001084804534912
5	5	0,00096607208252
5	6	0,000627040863037
6	2	0,000442504882813
6	3	0,000627040863037
6	4	0,000694274902344
6	5	0,000627040863037
6	6	0,000442504882813

4.5. Comparaison des résultats :

Comme dans la partie sur le Laplacien, on compare les résultats que l'on a obtenu avec la méthode de Cholesky avec les résultats polynomiaux sur Maple :

i	j	B=H^4*Fi,j	Valeurs trouvée par le calcul : Pi,j	Valeurs sur Maple : Pxi,yj	Erreurs
2	2	0,000442504882813	0,000448487635595	0,001235961914063	0,000787474278467
2	3	0,000627040863037	0,000879512556337	0,001931190490723	0,001051677934385
2	4	0,000694274902344	0,00104824749717	0,002197265625	0,001149018127831
2	5	0,000627040863037	0,000879512556337	0,001931190490723	0,001051677934385
2	6	0,000442504882813	0,000448487635595	0,001235961914063	0,000787474278467
3	2	0,000627040863037	0,000879512556337	0,001235961914063	0,000356449357725
3	3	0,00096607208252	0,001724229038981	0,003017485141754	0,001293256102774
3	4	0,001084804534912	0,002055321813748	0,003433227539063	0,001377905725315
3	5	0,00096607208252	0,001724229038981	0,003017485141754	0,001293256102774
3	6	0,000627040863037	0,000879512556337	0,001931190490723	0,001051677934385
4	2	0,000694274902344	0,00104824749717	0,002197265625	0,001149018127831
4	3	0,001084804534912	0,002055321813748	0,003433227539063	0,001377905725315
4	4	0,001220703125	0,002450208943221	0,00390625	0,001456041056779
4	5	0,001084804534912	0,002055321813748	0,003433227539063	0,001377905725315
4	6	0,000694274902344	0,00104824749717	0,002197265625	0,001149018127831
5	2	0,000627040863037	0,000879512556337	0,001931190490723	0,001051677934385
5	3	0,00096607208252	0,001724229038981	0,003017485141754	0,001293256102774
5	4	0,001084804534912	0,002055321813748	0,003433227539063	0,001377905725315
5	5	0,00096607208252	0,001724229038981	0,003017485141754	0,001293256102774
5	6	0,000627040863037	0,000879512556337	0,001931190490723	0,001051677934385
6	2	0,000442504882813	0,000448487635595	0,001235961914063	0,000787474278467
6	3	0,000627040863037	0,000879512556337	0,001931190490723	0,001051677934385
6	4	0,000694274902344	0,00104824749717	0,002197265625	0,001149018127831
6	5	0,000627040863037	0,000879512556337	0,001931190490723	0,001051677934385
6	6	0,000442504882813	0,000448487635595	0,001235961914063	0,000787474278467

On voit que les erreurs sont plus grandes que sur la partie du Laplacien mais il faut quand même les remettre en perspective car ce sont des calculs au millième, et les erreurs sont elles aussi au millièmes, ce qui fait qu'au final, les erreurs ne sont pas aussi grandes qu'elles ont en l'air.

4.6. Aperçu de la solution :

Encore une fois, on utilise le logiciel Maple pour avoir un aperçu de la solution :

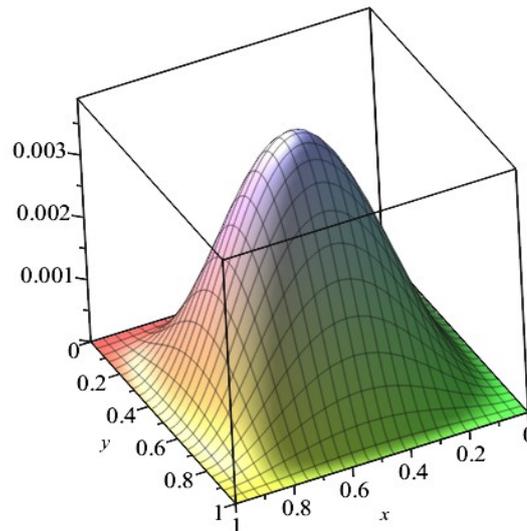


Figure 2: Modélisation de la déformation d'une plaque par la méthode du Bilaplacien

On voit donc, au vu de la modélisation que la méthode du Bilaplacien est plus précise et réaliste que la méthode du Laplacien.

5. CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

Conclusions sur le travail réalisé :

Pour finir, nous avons pu modéliser la déformation d'une plaque grâce aux méthodes analytiques du Laplacien et du Bilaplacien puis de effectué la résolution numérique des systèmes trouvés.

Conclusions sur l'apport personnel de cet E.C. projet :

Ce projet nous a permis de découvrir une méthode pour modéliser des problèmes physiques : la discrétisation qui est un outil extrêmement puissant pour se rapprocher le plus de la réalité lorsqu'on modélise un phénomène physique complexe sur un objet réel.

Perspectives pour la poursuite de ce projet :

Pour aller plus loin, on pourrait résoudre le cas du bilaplacien en appui simple, mais aussi essayer d'étendre notre code de façon à ce qu'il crée les matrices lui-même au lieu de les

remplir fastidieusement à la main.

6. BIBLIOGRAPHIE

[1] Grégoire Allaire, Numerical Analysis and Optimization: An Introduction to Mathematical Modelling and Numerical Simulation, Oxford Science Publications, 2007

[2] <https://www.f-legrand.fr/scidoc/docimg/numerique/elliptique/poisson/poisson.html>

[3] http://mms2.ensmp.fr/mms_paris/plaque/transparents/plaques-2010.pdf

[4] https://fr.wikipedia.org/wiki/Th%C3%A9orie_des_plaques#D%C3%A9finitions_et_hypoth%C3%A8ses

[5] http://www.utc.fr/~hagegebe/UV/MQ12/TD/TD_Laminate/%5BLestuzzi%5DPlaquesVSpoutres.pdf

[6] <https://appx.cegep-chicoutimi.qc.ca/svilleneuve/materiaux/chap6.pdf>

[7] <https://fr.wikipedia.org/wiki/Discr%C3%A9tisation>

[8] https://perso.univ-lyon1.fr/marc.buffat/COURS/COURSDF_HTML/node19.html

7. ANNEXES

7. 1. Matrices

Pour N=3

$A[1][1] := 4;$ $A[1][2] := -1;$ $A[1][3] := 0;$ $A[1][4] := -1;$ $A[1][5] := 0;$ $A[1][6] := 0;$ $A[1][7] := 0;$ $A[1][8] := 0;$ $A[1][9] := 0;$
 $A[2][1] := -1;$ $A[2][2] := 4;$ $A[2][3] := -1;$ $A[2][4] := 0;$ $A[2][5] := -1;$ $A[2][6] := 0;$ $A[2][7] := 0;$ $A[2][8] := 0;$ $A[2][9] := 0;$
 $A[3][1] := 0;$ $A[3][2] := -1;$ $A[3][3] := 4;$ $A[3][4] := 0;$ $A[3][5] := 0;$ $A[3][6] := -1;$ $A[3][7] := 0;$ $A[3][8] := 0;$ $A[3][9] := 0;$
 $A[4][1] := -1;$ $A[4][2] := 0;$ $A[4][3] := 0;$ $A[4][4] := 4;$ $A[4][5] := -1;$ $A[4][6] := 0;$ $A[4][7] := -1;$ $A[4][8] := 0;$ $A[4][9] := 0;$
 $A[5][1] := 0;$ $A[5][2] := -1;$ $A[5][3] := 0;$ $A[5][4] := -1;$ $A[5][5] := 4;$ $A[5][6] := -1;$ $A[5][7] := 0;$ $A[5][8] := -1;$ $A[5][9] := 0;$
 $A[6][1] := 0;$ $A[6][2] := 0;$ $A[6][3] := -1;$ $A[6][4] := 0;$ $A[6][5] := -1;$ $A[6][6] := 4;$ $A[6][7] := 0;$ $A[6][8] := 0;$ $A[6][9] := -1;$
 $A[7][1] := 0;$ $A[7][2] := 0;$ $A[7][3] := 0;$ $A[7][4] := -1;$ $A[7][5] := 0;$ $A[7][6] := 0;$ $A[7][7] := 4;$ $A[7][8] := -1;$ $A[7][9] := 0;$
 $A[8][1] := 0;$ $A[8][2] := 0;$ $A[8][3] := 0;$ $A[8][4] := 0;$ $A[8][5] := -1;$ $A[8][6] := 0;$ $A[8][7] := -1;$ $A[8][8] := 4;$ $A[8][9] := -1;$
 $A[9][1] := 0;$ $A[9][2] := 0;$ $A[9][3] := 0;$ $A[9][4] := 0;$ $A[9][5] := 0;$ $A[9][6] := -1;$ $A[9][7] := 0;$ $A[9][8] := -1;$ $A[9][9] := 4;$

Pour N= 4

$A[0][0] = 4;$ $A[0][1] = -1;$ $A[0][2] = 0;$ $A[0][3] = 0;$ $A[0][4] = -1;$ $A[0][5] = 0;$ $A[0][6] = 0;$ $A[0][7] = 0;$ $A[0][8] = 0;$ $A[0][9] = 0;$
 $A[0][10] = 0;$ $A[0][11] = 0;$ $A[0][12] = 0;$ $A[0][13] = 0;$ $A[0][14] = 0;$ $A[0][15] = 0;$ $A[1][0] = -1;$ $A[1][1] = 4;$ $A[1][2] = -1;$ $A[1][3]$
 $= 0;$ $A[1][4] = 0;$ $A[1][5] = -1;$ $A[1][6] = 0;$ $A[1][7] = 0;$ $A[1][8] = 0;$ $A[1][9] = 0;$ $A[1][10] = 0;$ $A[1][11] = 0;$ $A[1][12] = 0;$ $A[1][13]$
 $= 0;$ $A[1][14] = 0;$ $A[1][15] = 0;$ $A[2][0] = 0;$ $A[2][1] = -1;$ $A[2][2] = 4;$ $A[2][3] = -1;$ $A[2][4] = 0;$ $A[2][5] = 0;$ $A[2][6] = -1;$ $A[2][7]$
 $= 0;$ $A[2][8] = 0;$ $A[2][9] = 0;$ $A[2][10] = 0;$ $A[2][11] = 0;$ $A[2][12] = 0;$ $A[2][13] = 0;$ $A[2][14] = 0;$ $A[2][15] = 0;$ $A[3][0] = 0;$ $A[3]$
 $[1] = 0;$ $A[3][2] = -1;$ $A[3][3] = 4;$ $A[3][4] = 0;$ $A[3][5] = 0;$ $A[3][6] = 0;$ $A[3][7] = -1;$ $A[3][8] = 0;$ $A[3][9] = 0;$ $A[3][10] = 0;$ $A[3]$
 $[11] = 0;$ $A[3][12] = 0;$ $A[3][13] = 0;$ $A[3][14] = 0;$ $A[3][15] = 0;$ $A[4][0] = -1;$ $A[4][1] = 0;$ $A[4][2] = 0;$ $A[4][3] = 0;$ $A[4][4] = 4;$
 $A[4][5] = -1;$ $A[4][6] = 0;$ $A[4][7] = 0;$ $A[4][8] = -1;$ $A[4][9] = 0;$ $A[4][10] = 0;$ $A[4][11] = 0;$ $A[4][12] = 0;$ $A[4][13] = 0;$ $A[4][14] =$
 $0;$ $A[4][15] = 0;$ $A[5][0] = 0;$ $A[5][1] = -1;$ $A[5][2] = 0;$ $A[5][3] = 0;$ $A[5][4] = -1;$ $A[5][5] = 4;$ $A[5][6] = -1;$ $A[5][7] = 0;$ $A[5][8] =$
 $0;$ $A[5][9] = -1;$ $A[5][10] = 0;$ $A[5][11] = 0;$ $A[5][12] = 0;$ $A[5][13] = 0;$ $A[5][14] = 0;$ $A[5][15] = 0;$ $A[6][0] = 0;$ $A[6][1] = 0;$ $A[6]$
 $[2] = -1;$ $A[6][3] = 0;$ $A[6][4] = 0;$ $A[6][5] = -1;$ $A[6][6] = 4;$ $A[6][7] = -1;$ $A[6][8] = 0;$ $A[6][9] = 0;$ $A[6][10] = -1;$ $A[6][11] = 0;$ $A[6]$
 $[12] = 0;$ $A[6][13] = 0;$ $A[6][14] = 0;$ $A[6][15] = 0;$ $A[7][0] = 0;$ $A[7][1] = 0;$ $A[7][2] = 0;$ $A[7][3] = -1;$ $A[7][4] = 0;$ $A[7][5] = 0;$
 $A[7][6] = -1;$ $A[7][7] = 4;$ $A[7][8] = 0;$ $A[7][9] = 0;$ $A[7][10] = 0;$ $A[7][11] = -1;$ $A[7][12] = 0;$ $A[7][13] = 0;$ $A[7][14] = 0;$ $A[7][15] =$
 $0;$ $A[8][0] = 0;$ $A[8][1] = 0;$ $A[8][2] = 0;$ $A[8][3] = 0;$ $A[8][4] = -1;$ $A[8][5] = 0;$ $A[8][6] = 0;$ $A[8][7] = 0;$ $A[8][8] = 4;$ $A[8][9] = -1;$
 $A[8][10] = 0;$ $A[8][11] = 0;$ $A[8][12] = -1;$ $A[8][13] = 0;$ $A[8][14] = 0;$ $A[8][15] = 0;$ $A[9][0] = 0;$ $A[9][1] = 0;$ $A[9][2] = 0;$ $A[9][3]$
 $= 0;$ $A[9][4] = 0;$ $A[9][5] = -1;$ $A[9][6] = 0;$ $A[9][7] = 0;$ $A[9][8] = -1;$ $A[9][9] = 4;$ $A[9][10] = -1;$ $A[9][11] = 0;$ $A[9][12] = 0;$ $A[9]$
 $[13] = -1;$ $A[9][14] = 0;$ $A[9][15] = 0;$ $A[10][0] = 0;$ $A[10][1] = 0;$ $A[10][2] = 0;$ $A[10][3] = 0;$ $A[10][4] = 0;$ $A[10][5] = 0;$ $A[10]$
 $[6] = -1;$ $A[10][7] = 0;$ $A[10][8] = 0;$ $A[10][9] = -1;$ $A[10][10] = 4;$ $A[10][11] = -1;$ $A[10][12] = 0;$ $A[10][13] = 0;$ $A[10][14] = -1;$
 $A[10][15] = 0;$ $A[11][0] = 0;$ $A[11][1] = 0;$ $A[11][2] = 0;$ $A[11][3] = 0;$ $A[11][4] = 0;$ $A[11][5] = 0;$ $A[11][6] = 0;$ $A[11][7] = -1;$
 $A[11][8] = 0;$ $A[11][9] = 0;$ $A[11][10] = -1;$ $A[11][11] = 4;$ $A[11][12] = 0;$ $A[11][13] = 0;$ $A[11][14] = 0;$ $A[11][15] = -1;$ $A[12][0] =$
 $0;$ $A[12][1] = 0;$ $A[12][2] = 0;$ $A[12][3] = 0;$ $A[12][4] = 0;$ $A[12][5] = 0;$ $A[12][6] = 0;$ $A[12][7] = 0;$ $A[12][8] = -1;$ $A[12][9] = 0;$
 $A[12][10] = 0;$ $A[12][11] = 0;$ $A[12][12] = 4;$ $A[12][13] = -1;$ $A[12][14] = 0;$ $A[12][15] = 0;$ $A[13][0] = 0;$ $A[13][1] = 0;$ $A[13][2]$
 $= 0;$ $A[13][3] = 0;$ $A[13][4] = 0;$ $A[13][5] = 0;$ $A[13][6] = 0;$ $A[13][7] = 0;$ $A[13][8] = 0;$ $A[13][9] = -1;$ $A[13][10] = 0;$ $A[13][11] =$
 $0;$ $A[13][12] = -1;$ $A[13][13] = 4;$ $A[13][14] = -1;$ $A[13][15] = 0;$ $A[14][0] = 0;$ $A[14][1] = 0;$ $A[14][2] = 0;$ $A[14][3] = 0;$ $A[14][4]$
 $= 0;$ $A[14][5] = 0;$ $A[14][6] = 0;$ $A[14][7] = 0;$ $A[14][8] = 0;$ $A[14][9] = 0;$ $A[14][10] = -1;$ $A[14][11] = 0;$ $A[14][12] = 0;$ $A[14][13]$
 $= -1;$ $A[14][14] = 4;$ $A[14][15] = -1;$ $A[15][0] = 0;$ $A[15][1] = 0;$ $A[15][2] = 0;$ $A[15][3] = 0;$ $A[15][4] = 0;$ $A[15][5] = 0;$ $A[15][6]$
 $= 0;$ $A[15][7] = 0;$ $A[15][8] = 0;$ $A[15][9] = 0;$ $A[15][10] = 0;$ $A[15][11] = -1;$ $A[15][12] = 0;$ $A[15][13] = 0;$ $A[15][14] = -1;$ $A[15]$
 $[15] = 4;$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}(x_i, 0) \approx \frac{U_{i,2} - 2U_{i,1} + U_{i,0}}{k^2} \Leftrightarrow U_{i,2} = 2u_{i,1}$$

- $\frac{\partial^2 U}{\partial^2 y}(x_i, 1) \approx \frac{\partial^2 U}{\partial^2 y}(x_i, y_{N-1})$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}(x_i, 1) \approx \frac{U_{i,N} - 2U_{i,N-1} + U_{i,N-2}}{k^2} \Leftrightarrow U_{i,N-2} = 2u_{i,N-1}$$

Explication des hypothèses du bilaplacien en appui simple. On part d'un développement limité de u :

D'abord en x_{i+h}, y_j :

$$u(x_{i+h}, y_j) = u(x_i, y_j) + h \frac{\partial u(x_i, y_j)}{\partial x} + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 u(x_i, y_j)}{\partial x^2}$$

Puis en x_{i-h}, y_j

$$u(x_{i-h}, y_j) = u(x_i, y_j) - h \frac{\partial u(x_i, y_j)}{\partial x} + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 u(x_i, y_j)}{\partial x^2}$$

Puis en x_i, y_{j+k}

$$u(x_i, y_{j+k}) = u(x_i, y_j) + k \frac{\partial u(x_i, y_j)}{\partial y} + \frac{k^2}{2} \frac{\partial^2 u(x_i, y_j)}{\partial y^2}$$

Enfin en x_i, y_{j-k}

$$u(x_i, y_{j-k}) = u(x_i, y_j) - k \frac{\partial u(x_i, y_j)}{\partial y} + \frac{k^2}{2} \frac{\partial^2 u(x_i, y_j)}{\partial y^2}$$

On regroupe alors les équations

$$\frac{\partial^2 u(x_i, y_j)}{\partial x^2} = [u(x_{i+h}, y_j) + u(x_{i-h}, y_j) - 2u(x_i, y_j)] \frac{1}{h^2}$$

$$\frac{\partial^2 u(x_i, y_j)}{\partial y^2} = [u(x_i, y_{j+k}) + u(x_i, y_{j-k}) - 2u(x_i, y_j)] \frac{1}{k^2}$$

C'est donc grâce à ces équations et l'hypothèses de décalage que l'on peut obtenir les équations de simplification du rapport.

8. PROPOSITIONS DE SUJETS DE PROJETS

-Essai de déformation d'une plaque en laboratoire et comparaison des résultats expérimentaux avec les résultats théoriques obtenus dans ce projet.

-Même sujet que celui-ci mais en utilisant une autre approche pour la résolution du problème : utiliser autre une autre méthode au lieu du Laplacien et du Bilaplacien pour la résolution analytique.