



INSTITUT  
NATIONAL  
des SCIENCES  
APPLIQUÉES



Projet de Physique P6-3  
STPI/P6-3/2008 – 008



Nom des étudiants :

Matthieu AUDRAS	André FABBRI
Huan GENG	Jéréemie LEHOUX
Nicolas TRISCOS	Matthieu VAUTROT

Enseignant responsable du projet :  
Jérôme YON



Les Théorèmes de  
Green-Ostrogradsky et Stokes :  
applications et illustrations  
pédagogiques



À TAILLE  
HUMAINE  
À L'ECHELLE  
DU MONDE



Date de remise du rapport : **23/06/08**

Référence du projet : **STPI/P6-3/2008 – 008**

Intitulé du projet : Les Théorèmes de Green-Ostrogradsky et Stokes : applications et illustrations pédagogiques

Type de projet : **Théorique**

Objectifs du projet :

Ce projet a pour but d'étudier en plus en profondeur les théorèmes de Green-Ostrogradsky et de Stokes. Les objectifs principaux de notre travail seront de les démontrer mathématiquement, puis de recenser l'ensemble des champs de la physique pour lesquels ces formules sont utiles. Nous nous focaliserons sur le théorème de Green – Ostrogradsky dans le domaine de la mécanique des fluides. Ces théorèmes et de mettre au point des méthodes pédagogiques via des expériences pratiques pour illustrer les différentes applications de ces théories à la physique.

Cahier de laboratoire associé : **A30224**

---

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>6</b>
<b>2</b>	<b>Méthodologie / Organisation du travail</b>	<b>6</b>
<b>3</b>	<b>Travail réalisé et résultats</b>	<b>7</b>
3.1	Le théorème de Green – Ostrogradsky . . . . .	7
3.1.1	Préambule : l'opérateur divergence . . . . .	7
3.1.2	Énoncé du théorème . . . . .	8
3.1.3	Démonstration . . . . .	8
3.1.4	Applications . . . . .	9
3.2	Le théorème de Stokes . . . . .	12
3.2.1	Préambule : l'opérateur rotationnel . . . . .	12
3.2.2	Énoncé du théorème . . . . .	15
3.2.3	Démonstration . . . . .	15
3.2.4	Applications . . . . .	16
3.3	Illustration des théorèmes . . . . .	17
3.3.1	Description du travail effectué sur champs PIV : . . . . .	17
3.3.2	Illustration du rotationnel par un système d'engrenages . . . . .	19
<b>4</b>	<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>21</b>
<b>5</b>	<b>Bibliographie</b>	<b>23</b>

---

## NOTATIONS, ACRONYMES

On notera  $\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$  l'opérateur mathématique « Nabla »

## 1 Introduction

Depuis que nous sommes en âge de comprendre ce qu'est la physique, au sens général du terme, les mathématiques y ont toujours été associées. Mais la plupart du temps, il s'agit de faire des mathématiques pour les mathématiques, c'est-à-dire qu'on ne nous explique pas vraiment à quoi cela sert, dans quel domaine on les applique. Ou alors c'est le cas contraire, à savoir qu'on nous donne tel ou tel théorème de physique sans nous expliquer vraiment d'où cela vient, comment et avec quels outils les différents scientifiques de l'histoire ont découvert ces notions et mis au point leur théorie. L'exemple le plus simple que nous pouvons prendre est l'équation  $E = mc^2$ , qui est universellement connue, mais que le commun des mortels aura bien du mal à décoder. Aujourd'hui, nous avons l'occasion de mieux comprendre l'utilité des mathématiques dans la physique, via une étude des théorèmes de Green – Ostrogradsky et Stokes. Nous les connaissons tous, mais nous ne savons pas trop en quoi ils sont utiles. Nous pouvons de plus avoir une approche beaucoup plus concrète des opérateurs divergence et rotationnel, qui ont été abordés en mathématiques comme en physique, mais dont nous n'avons pas encore d'interprétation concrète.

## 2 Méthodologie / Organisation du travail

En ce qui concerne le travail personnel pour notre projet, nous avons décidé de nous répartir les tâches à la fin de chaque séance pour la suivante, en nous débrouillant tout de même pour que chacun ne soit pas seul à faire des recherches sur un sujet, sauf exception. Le bilan était fait à chaque début de réunion, le plus souvent en présence de l'enseignant pour voir quelles étaient les pistes à explorer et éventuellement pour revoir certains aspects du sujet en question qui pouvaient paraître un peu obscurs.

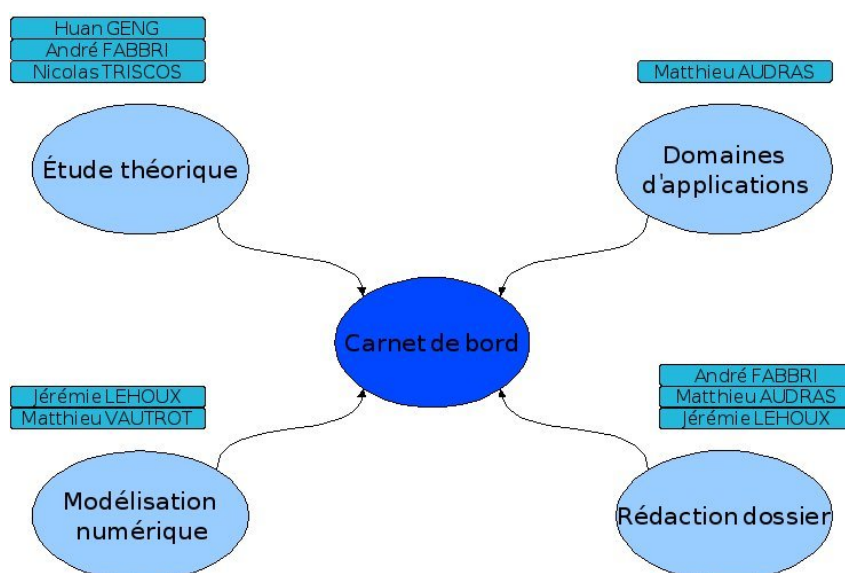


FIG. 1 – Organigramme des tâches réalisées et des étudiants concernés.

### 3 Travail réalisé et résultats

#### 3.1 Le théorème de Green – Ostrogradsky

##### 3.1.1 Préambule : l'opérateur divergence

Avant d'énoncer et de démontrer chaque théorème, nous avons choisi de faire d'abord une présentation de l'opérateur mathématique qui le caractérise le plus. En effet, dans le cas de Green-Ostrogradsky et Stokes, ces théorèmes s'expliquent via l'interprétation des opérateurs qui les illustrent. Dans le cas de Green – Ostrogradsky, donc, la divergence.

définition mathématique :

Soit  $\vec{A} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}$  un champ vectoriel. L'opérateur Divergence est l'opérateur qui à tout vecteur d'un champ associe un scalaire tel que :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \text{div}(\vec{A}) = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (1)$$

L'opérateur nabla permet d'étudier les variations spatiales d'un champ vectoriel. La divergence, au moyen du produit scalaire, fait la somme de ces variations spatiales suivant les 3 directions. Cet opérateur représente localement les variations spatiales d'un champ vectoriel. Si la divergence est positive (c'est-à-dire que les variations sont globalement positives), les vecteurs du champ auront localement tendance à s'écartier (à diverger). Au contraire, si la divergence est négative, les vecteurs du champ auront localement tendance à converger.

Étant donné que l'on passe d'un vecteur à un scalaire, on perd la notion de sens et de direction : il s'agit donc d'une valeur générale.

Exemple de champs :

Afin de mieux illustrer cet opérateur, appliquons le aux champs vectoriels suivant :

$$\vec{F}_1(x, y, z) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{F}_1 = 2$$

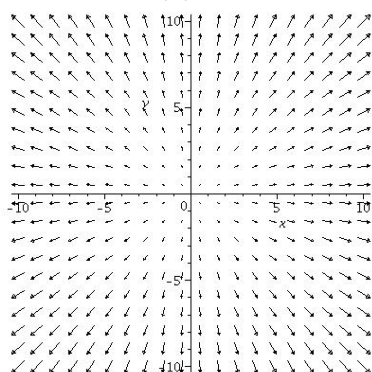


FIG. 2 – Champ  $\vec{F}_1$ .

$$\vec{F}_2(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2 \cdot x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{F}_2 = 2$$

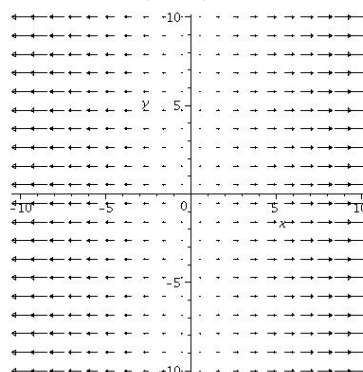
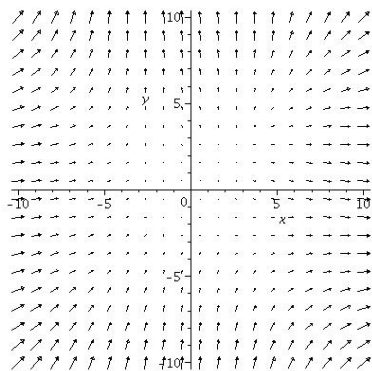
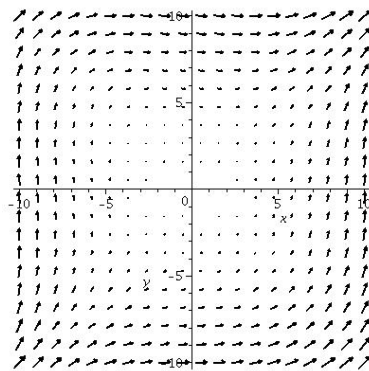


FIG. 3 – Champ  $\vec{F}_2$ .

On constate que la divergence des champs  $\vec{F}_1$  et  $\vec{F}_2$  est la même bien que le champ vectoriel soit différent.

$$\vec{F}_a(x, y, z) = \begin{pmatrix} x^2 - y \\ y^2 - x \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{F}_1 = 2 \cdot x + 2 \cdot y \quad \vec{F}_b(x, y, z) = \begin{pmatrix} y^2 + x \\ x^2 - y \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{F}_2 = 0$$

FIG. 4 – Champ  $\vec{F}_a$ .FIG. 5 – Champ  $\vec{F}_b$ .

Sur le champs  $\vec{F}_a$  on visualise bien une convergence des vecteurs ( $div < 0$ ) en bas à gauche et une divergence ( $div > 0$ ) en haut à droite : ce que l'on peut facilement retrouver à partir de l'équation obtenue. Ce n'est pas aussi évident pour le champ  $\vec{F}_b$ ...

### Généralisation

Il existe deux formes de divergence : la divergence directionnelle due aux variations de direction, et la divergence modulaire due aux variations de module.

On parle de divergence directionnelle lorsque l'angle entre deux vecteurs adjacents n'est pas constant (cf. Champ  $\vec{F}_1$ ). Il y a donc une variation de la densité de vecteurs et non de leur intensité.

On peut imaginer le même phénomène, mais sans variation de direction, dans un champ où tous les vecteurs sont parallèles. En effet, c'est le cas si de deux vecteurs, celui qui est devant est par exemple plus petit que le précédent (cf. Champ  $\vec{F}_2$ ). On peut imaginer des vecteurs entrant en collision l'un dans l'autre (penser à une suite d'automobiles sur une autoroute, chacune allant plus vite que celle devant elle) : on parle alors de divergence modulaire.

### 3.1.2 Énoncé du théorème

Soit  $\mathcal{V}$  un volume dans  $\mathbb{R}^3$  et  $S$  sa surface surface  
Si  $\vec{A}$  est un champ vectoriel à dérivées continues en tout point de  $\mathcal{V}$  alors :

$$\iiint_{\mathcal{V}} \text{div}(\vec{A}) \cdot d\mathcal{V} = \iint_{\Sigma} \vec{A} \cdot d\vec{S} \quad (2)$$

Ce qui revient à dire que la divergence d'un champ de vecteurs  $\vec{A}$  est égale au flux extérieur de ce champ de vecteurs.

### 3.1.3 Démonstration

Soit un champ vectoriel  $\vec{A}$  défini dans un espace donné. On veut calculer le flux  $\Phi$  du vecteur  $\vec{A}$  à travers une surface fermée. Pour la démonstration, on choisit comme surface  $S$ , la surface d'un cube infinitésimal de côté  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ , et  $\Delta z$ . On notera  $\Delta\mathcal{V} = \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z$ .



$$\Phi = \iint_S \vec{A} \cdot d\vec{S} \quad (3)$$

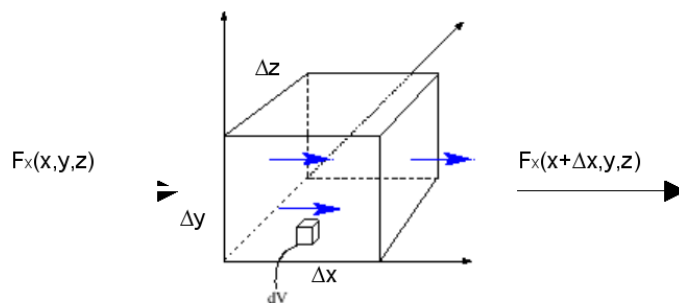


FIG. 6 – Schéma du cube infinitésimal utilisé pour la démonstration du théorème de Green-Ostrogradsky

$$\Delta x \rightarrow 0 \Rightarrow \Delta\Phi_x \rightarrow \frac{\partial A_x}{\partial x} \cdot \Delta\mathcal{V} \quad (4)$$

$$\Delta y \rightarrow 0 \Rightarrow \Delta\Phi_y \rightarrow \frac{\partial A_y}{\partial y} \cdot \Delta\mathcal{V} \quad (5)$$

$$\Delta z \rightarrow 0 \Rightarrow \Delta\Phi_z \rightarrow \frac{\partial A_z}{\partial z} \cdot \Delta\mathcal{V} \quad (6)$$

En sommant les variations des trois faces :

$$\Delta\Phi = \Delta\Phi_x + \Delta\Phi_y + \Delta\Phi_z \quad (7)$$

et donc

$$\Delta\Phi = \left( \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) \cdot \Delta\mathcal{V} = \text{div}(\vec{A}) \cdot \Delta\mathcal{V} \quad (8)$$

En intégrant de part et d'autre de l'équation ( sur  $\mathcal{V}$  pour la divergence ), on retombe sur l'énoncé du théorème :

$$\iiint_{\mathcal{V}} \text{div}(\vec{A}) \cdot d\mathcal{V} = \iint_{\Sigma} \vec{A} \cdot d\vec{S} \quad (9)$$

### 3.1.4 Applications

Le théorème de Green-Ostrogradsky permet la généralisation de l'opérateur divergence (défini localement) sur un volume.

Les deux grands domaines physique où utilise ce théorème sont l'électromagnétisme et la mécanique.

Que ce soit la mécanique des fluides, l'électromagnétisme ou la mécanique quantique, tous trois utilisent ce théorème. Il permet en effet d'étendre les équations de continuité de masse, énergie et probabilité (définis localement avec l'opérateur divergence) à des flux une fois l'équation intégrée.

En mécanique des fluides, on définit l'équation de conservation de masse comme suit :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \cdot \vec{U}) = 0 \quad (10)$$

Avec  $\rho$  la densité du fluide et  $\vec{U}$  le champ de vecteurs vitesse des particules fluides.

Si on se place en régime permanent et que l'on intègre sur un volume. On peut en déduire d'après le théorème qu'il y a autant de flux entrant que sortant de ce volume. Comme nous l'avons évoqué précédemment, cet opérateur permet de déterminer localement la «tendance qu'à une particule fluide à s'étendre ou bien à se comprimer». En intégrant ces valeurs sur un volume on obtient un nombre résultant qui correspond à la différence entre flux sortant et flux entrants. Il s'agit d'une valeur globale : rien n'empêche que la divergence varie à l'intérieur du volume considérée.

Dans le cas de l'étude de fluides incompressibles, on montre que  $\text{div} = 0$  : les flux entrants sont alors toujours égaux aux flux sortants.

En électricité, si  $\iiint \text{div}(\vec{F}) \neq 0$  alors on dit que le champ  $\vec{F}$  possède une source ou un puits de champ, il est dit à flux non-conservatif.

Si  $\iiint \text{div}(\vec{F}) = 0$ , le flux est dit à champ conservatif, il est dit solénoïdal. En d'autres termes, cela veut dire qu'il y a autant de flux entrant que de flux sortant.

Ce théorème peut servir en outre à démontrer la poussée d'Archimède.

De la même manière que précédemment, ce théorème permet de faire le lien entre la forme locale des théorèmes de Gauss (pour l'électricité ou pour la gravité) et leur forme intégrée.

**Théorème de Gauss en électricité :**

Le flux électrique traversant une surface fermée est égal à la somme des charges contenues dans ce volume.

$$\Phi_{\vec{E},S} = \frac{Q_V}{\epsilon_0} \text{ on montre ainsi qu'il est égal à : } \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (11)$$

$\vec{E}$  : champ électrique

$\Phi_{\vec{E},S}$  : flux du champ électrique traversant la surface  $S$

$Q_V$  : charge contenue dans un volume  $V$  de surface  $S$

$\rho$  : densité volumique de charges

$\epsilon_0$  : permittivité du vide

**Théorème de Gauss pour la gravitation :**

On détermine le flux gravitationnel comme suit :

$$\oiint_S \vec{g} \cdot d\vec{S} = -4\pi GM \text{ en utilisant Ostrogradsky on obtient : } \vec{\nabla} \cdot \vec{g} = -4\pi G\rho \quad (12)$$

$M$  : masse contenue à l'intérieur du volume fermé par la surface  $S$

$G$  : constante universelle de gravitation

$\vec{g}$  : champ gravitationnel

$\rho$  : densité volumique de masse

Exercice :

Soit un champ vectoriel  $\vec{A} = \frac{A_0}{\rho^2} \cdot \vec{e}_\rho$  exprimé dans un repère cylindrique  $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ .

On considère un volume  $(\Omega)$  cylindrique orienté suivant l'axe  $\vec{e}_z$ , de hauteur  $h$  et clos par deux cylindres de rayons  $R_1$  et  $R_2$  avec  $R_2 > R_1$ .

1. Trouver le flux  $\Phi$  traversant la surface  $(\Sigma)$  entourant  $(\Omega)$ .
2. Calculer la divergence de  $\vec{A}$ .
3. Calculer l'intégrale  $\iiint_{\Omega} \text{div}(\vec{A}) \cdot d\vec{\tau}$ .

$$\Phi = \iint_{\Sigma_1} \vec{A} \cdot d\vec{S} + \iint_{\Sigma_2} \vec{A} \cdot d\vec{S} + \iint_{\Sigma_3} \vec{A} \cdot d\vec{S} + \iint_{\Sigma_4} \vec{A} \cdot d\vec{S} \quad (13)$$

Avec  $\Sigma_2$  et  $\Sigma_4$  les deux surfaces planes de chacun des cylindres,  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_3$  les surfaces cylindriques de rayons respectifs  $R_1$  et  $R_2$ .

$\vec{A} = A \cdot \vec{e}_\rho = \frac{A_0}{\rho^2} \cdot \vec{e}_\rho$  donc il ne dépend que de  $\vec{e}_\rho$ . On obtient alors :

$$\Phi = - \iint_{\Sigma_1} A \cdot \vec{e}_\rho \cdot \vec{e}_\rho \cdot dS + \iint_{\Sigma_3} A \cdot \vec{e}_\rho \cdot \vec{e}_\rho \cdot dS \quad (14)$$

Les intégrales sur  $\Sigma_2$  et  $\Sigma_4$  s'annulent car  $\vec{e}_\theta \perp \vec{e}_\rho$  et  $\vec{e}_z \perp \vec{e}_\rho$ . De plus,  $dS = \rho \cdot d\theta dz$  :

$$\Phi = \int_0^h \left( \int_0^{2\pi} \frac{A_0}{R_2^2} \cdot R_2 \cdot d\theta \right) dz - \int_0^h \left( \int_0^{2\pi} \frac{A_0}{R_1^2} \cdot R_1 \cdot d\theta \right) dz \quad (15)$$

$$\boxed{\Phi = A_0 \cdot 2\pi \cdot h \cdot \left( \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right)} \quad (16)$$

$$\text{div}(\vec{A}) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho A)}{\partial \rho} + \frac{\partial A}{\partial \theta} + \frac{\partial A}{\partial z} = -\frac{A_0}{\rho^3} + 0 + 0 = \boxed{-\frac{A_0}{\rho^3}} \quad (17)$$

$$\iiint_{\Omega} \text{div}(\vec{A}) \cdot d\vec{\tau} = \int_{R_1}^{R_2} \int_0^h \int_0^{2\pi} \frac{A_0}{\rho^2} \cdot \rho d\rho dz d\theta = \boxed{A_0 \cdot 2\pi \cdot h \cdot \left( \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right)} \quad (18)$$

$$\boxed{\iiint_{\Omega} \text{div}(\vec{A}) \cdot d\vec{\tau} = \iint_{\Sigma} \vec{A} \cdot d\vec{S}} \quad (19)$$

On retrouve l'égalité du théorème de Green-Ostrogradsky.

## 3.2 Le théorème de Stokes

### 3.2.1 Préambule : l'opérateur rotationnel

Définition :

Soit  $\vec{A} = \begin{pmatrix} A_x(x, y, z) \\ A_y(x, y, z) \\ A_z(x, y, z) \end{pmatrix}$  un champ vectoriel. L'opérateur rotationnel est l'application qui à tout vecteur de  $\vec{A}$  associe un nouveau vecteur tel que :

$$\text{rot}(\vec{A}) = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (20)$$

Comme nous l'avons vu pour la divergence, l'opérateur nabla  $\vec{\nabla}$  permet d'étudier les variations spatiales d'un champ vectoriel. Le produit vectoriel  $\vec{A} \wedge \vec{B}$  retourne, quant à lui, un vecteur  $\vec{R}$  de norme  $\|\vec{R}\| = \|\vec{A}\| \cdot \|\vec{B}\| \cdot \sin(\vec{A}, \vec{B})$  orthogonal aux vecteurs  $\vec{A}$  et  $\vec{B}$ .

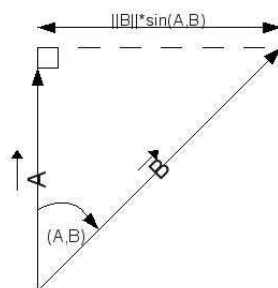


FIG. 7 – Illustration du produit vectoriel.

La valeur  $\|\vec{B}\| \cdot \sin(\vec{A}, \vec{B})$  représente la composante de  $\vec{B}$  orthogonale à  $\vec{A}$ , que l'on va appeler composante tangentielle.

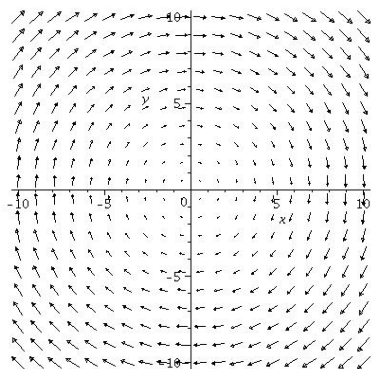
Le rotationnel va donc calculer localement les variations des composantes tangentielles d'un champ vectoriel. Pour résumer Le rotationnel mesure donc la tendance à pivoter qu'aurait un petit objet situé à l'endroit étudié.

Contrairement à l'opérateur divergence, le résultat retourné est vecteur orthogonal aux sens de variations des vecteurs du champ. Sa direction indique l'axe de rotation du volume élémentaire, son sens indique le sens de rotation (règle du bonhomme d'ampère) et sa norme est proportionnelle à la vitesse de rotation du volume élémentaire.

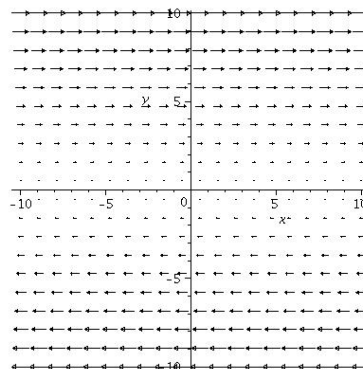
Exemples de champs :

Afin de mieux l'illustrer, appliquons cet opérateur aux champs vectoriels suivants :

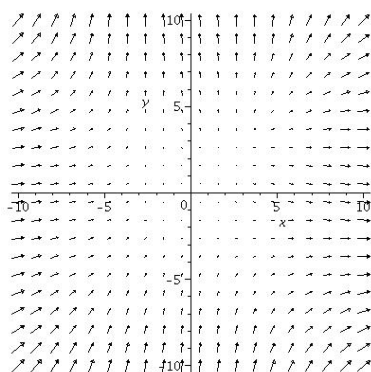
$$\vec{F}_3(x, y, z) = \begin{pmatrix} x \\ -y \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{\nabla} \wedge \vec{F}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

FIG. 8 – Champ  $\vec{F}_3$ .

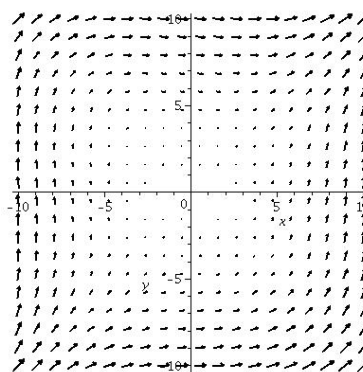
$$\vec{F}_4(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2 \cdot y \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{\nabla} \wedge \vec{F}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

FIG. 9 – Champ  $\vec{F}_4$ .

$$\vec{F}_a(x, y, z) = \begin{pmatrix} x^2 - y \\ y^2 - x \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{\nabla} \wedge \vec{F}_a = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

FIG. 10 – Champ  $\vec{F}_a$ .

$$\vec{F}_b(x, y, z) = \begin{pmatrix} y^2 + x \\ x^2 - y \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{\nabla} \wedge \vec{F}_b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

FIG. 11 – Champ  $\vec{F}_b$ .

Encore une fois, on constate que l'on peut obtenir le même vecteur rotationnel en tout point pour deux champs de formules différentes comme pour les champs  $\vec{F}_3$  et  $\vec{F}_b$ .

Le rotationnel (comme la divergence) est défini localement. C'est à dire que si on obtient un rotationnel différent de zéro cela veut dire que, localement, une particule élémentaire pivote sur elle-même.

Dans le cas du champ vectoriel  $\vec{F}_3$ , on visualise bien un mouvement global de rotation mais il ne correspond pas directement à la valeur du rotationnel.

En effet rotationnel n'entraîne pas nécessairement « rotation » contrairement à ce que l'on pourrait croire. Nous en avons une belle illustration avec le champ vectoriel  $\vec{F}_a$  ( $\text{rot}(\vec{F}_a) = 0$ ).

Imaginons que ce champ modélise l'écoulement d'un fluide. Une particule fluide ayant pour coordonnées initiales  $(5, -10)$  sera entraînée vers la droite du graphique par simple translation.

Une particule élémentaire peut tourner sans générer de rotation :

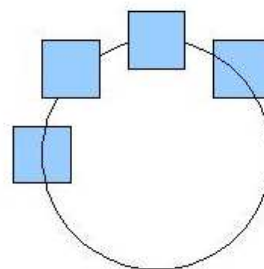
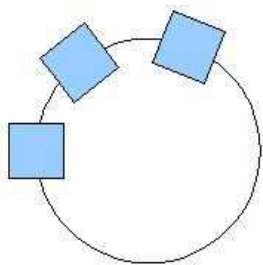


FIG. 12 – Particule qui tourne avec rotation. FIG. 13 – Particule qui tourne par translation.

### Généralisation

De la même manière que pour la divergence on définit deux formes de rotationnels : le rotationnel modulaire et le rotationnel directionnel.

Si vous êtes dans un fauteuil roulant, et que chacune de vos roues possède chacun une vitesse parallèle mais de module différent, vous allez pivoter. Dans le champ vectoriel  $F_4$  des vecteurs parallèles possèdent un rotationnel qui est dû à une différence de module : c'est ce que l'on appelle le rotationnel modulaire. C'est aussi avec un rotationnel modulaire que l'on arrive à faire tourner une balle de tennis sur elle-même.

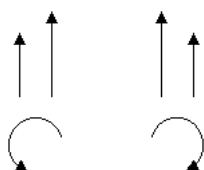


FIG. 14 – Rotation due à la différence de module entre deux vecteurs adjacents : rotation modulaire.

À l'inverse, des vecteurs de modules constants peuvent pivoter si de deux vecteurs, celui qui est devant a une autre direction. Le rotationnel directionnel est lié à la courbure des lignes de courant (courbe dont la tangente, en tout point, est parallèle à la direction des vitesses). Si vous suivez une ligne de courant circulaire, vous allez parcourir un cercle mais vous allez également pivoter puisque vous conservez la même orientation que la tangente.

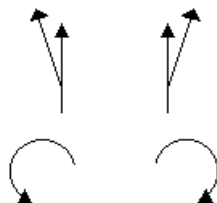


FIG. 15 – Rotation due à la différence de direction entre deux vecteurs sur une même ligne de courant.

### 3.2.2 Énoncé du théorème

Soit  $S$  une surface orientée dans  $\mathbb{R}^3$  et  $C$  le contour orienté de cette surface. L'orientation de  $C$  est induite par l'orientation de  $S$ . Si le champ vectoriel  $\vec{A}$  admet des dérivées partielles continues, alors :

$$\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l} = \iint_S \text{rot}(\vec{A}) \cdot d\vec{S} \quad (21)$$

avec  $d\vec{l}$  le vecteur directeur de la courbe en tout point,  $\text{rot}(\vec{A}) = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$  le rotationnel de  $\vec{A}$  et  $d\vec{S}$  le vecteur normal à un élément de surface infinitésimale dont la norme est égale à la surface de l'élément.

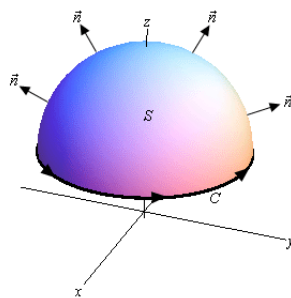


FIG. 16 – Illustration du théorème de Stokes.

C'est à dire que le travail obtenu sur le contour d'une surface fermée est égal au flux de rotationnels traversant cette surface.

### 3.2.3 Démonstration

Soit un champ vectoriel  $\vec{A}$  défini dans un espace donné. On veut calculer la circulation du vecteur  $\vec{A}$  autour d'un contour  $C$ . ( $d\vec{l}$  est un déplacement élémentaire suivant  $C$ )

$$\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l} \quad (22)$$

On choisit  $C$  le contour d'un rectangle de cotés  $\Delta x$  et  $\Delta y$  et de surface  $\Delta y$ .  $A_x(x, y, z)$  est la composante de  $\vec{A}$  suivant  $x$  et  $A_y(x, y, z)$  sa composante suivant  $y$ .

$$\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l} = A_x(x, y, z)\Delta x - A_x(x, y + \Delta y, z)\Delta x + A_y(x + \Delta x, y, z)\Delta y - A_y(x, y, z)\Delta y \quad (23)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{A_x(x, y, z)\Delta x \Delta y - A_x(x, y + \Delta y, z)\Delta x \Delta y}{\Delta y} \xrightarrow{\Delta y \rightarrow 0} -\frac{\partial A_x}{\partial y} \Delta S \\ \frac{A_y(x + \Delta x, y, z)\Delta y \Delta x - A_y(x, y, z)\Delta y \Delta x}{\Delta x} \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\partial A_y}{\partial x} \Delta S \end{array} \right. \quad (24)$$

On obtient alors pour un contour  $\Delta C$  :

$$\oint_{\Delta C} \vec{A} \cdot d\vec{l} = \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \Delta S = \text{rot}(\vec{A}) \Delta S \quad (25)$$

En intégrant sur  $C$  d'un côté et sur  $S$  de l'autre, on trouve bien :

$$\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l} = \iint_S \text{rot}(\vec{A}) \cdot d\vec{S} \quad (26)$$

On peut alors généraliser cette égalité pour toute surface car :

- en juxtaposant deux rectangles identiques, la circulation commune à l'interface s'annule. On peut répéter ainsi la même opération une infinité de fois.
- toute surface peut être découpée en une infinité de rectangles de dimensions infinitésimales.

### 3.2.4 Applications

Le théorème de Stokes permet la généralisation de l'opérateur rotationnel (défini localement) sur une surface.

Les deux grands domaines physique où utilise ce théorème sont l'électromagnétisme et la mécanique des fluides.

En électromagnétisme la variation de champ magnétique crée un champ électrique qui lui est directement relié grâce au théorème d'ampère :

$$\oint_C \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \cdot \sum I_{traversant} \quad (27)$$

La circulation du champ magnétique  $\vec{B}$  le long d'un circuit fermé  $C$  est égale à la somme des courants traversant la surface délimitée par ce circuit.

On retrouve la notion de circulation ainsi que celle de flux (courants traversant une surface).

En mécanique des fluides ce théorème est utilisé pour déterminer l'intensité d'un tourbillon. Comme nous l'avons évoqué précédemment l'opérateur rotationnel permet de déterminer localement la « tendance qu'a une particule fluide à pivoter ». En sommant tous ces vecteurs rotationnels sur une surface, on obtient une résultante dont la norme correspond à l'intensité  $\Gamma$  du tourbillon porté par cette surface :

$$\Gamma = \iint_S \text{rot}(\vec{v}) d\vec{S} \quad (28)$$

Le théorème de Stokes permet de calculer l'intensité du tourbillon à partir de son contour.

Grâce à ce théorème on peut aussi facilement vérifier que toute force  $\vec{F}$  dérivant d'un potentiel  $\vec{U}$  est conservative. Une force est conservative lorsque son travail sur une distance ne dépend que des points de départ et d'arrivée.

Soit  $\vec{F}$  une force telle que  $\vec{F} = (-)\text{grad}(\vec{U})$ .

Le calcul montre que, pour tout  $\vec{U}$ ,  $\text{rot}(\text{grad}(\vec{U})) = \vec{0}$  car les dérivées partielles s'annulent.

Ainsi pour toute surface fermée  $S$ ,  $\iint_S \text{rot}(\vec{F}) d\vec{S} = 0$ .

D'après le théorème de Stokes, on peut dire que le travail de cette force sur le contour  $C$  de



cette surface est nul. C'est à dire que le travail effectué par la force pour revenir à son point de départ est nul quelque soit son parcours. Le travail ne dépend donc que des points de départ et d'arrivée. La force  $\vec{F}$  est conservative.

### 3.3 Illustration des théorèmes

#### 3.3.1 Description du travail effectué sur champs PIV :

Champs PIV :

La méthode PIV permet d'obtenir un champs de vitesse à partir d'un écoulement d'air.

- Un type de flux d'air est créé expérimentalement
- On introduit dans ce flux de fines particules
- On illumine grâce à un laser le plan d'écoulement du flux
- On prend 2 photos suffisamment rapprochées afin de pouvoir déterminer grâce à des outils informatiques une position initiale et une position final de chacune des particules. En les croisant on obtient un vecteur vitesse. Et ce appliqué sur l'ensemble du flux permet la modélisation du champs.

Ici les données ont été recueillis par la CORIA sous forme d'un tableau de 4 colonnes :  $x^*, y^*, u$  et  $v$  représentant pour chaque point de mesure respectivement son abscisse, son ordonnée, sa composante en abscisse et sa composante en ordonnée. Une fois traité sous Maple ou Scilab on obtient deux tableaux  $uxTab$  et  $uyTab$  contenant respectivement les valeurs de la composante en  $x$ , et les valeurs de la composante en  $y$ , sur l'ensemble des points du plan.

Ces tableaux nous permette alors de visualiser différents champs :

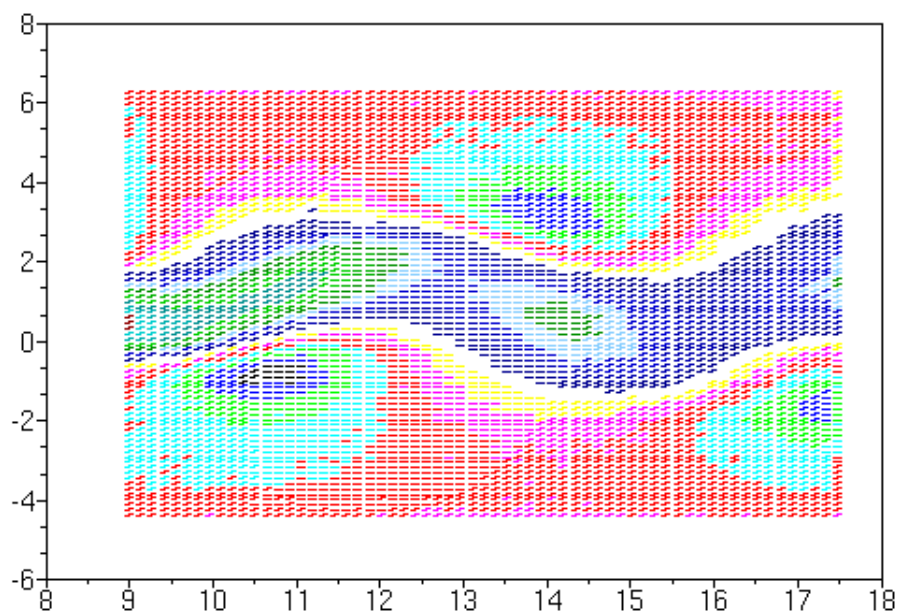


FIG. 17 – Champ PIV. Norme des vitesses. Interprétation graphique réalisée avec Scilab.

Sur ce champ on peut facilement obtenir le champ de rotationnels, ainsi que la courbe de la divergence :

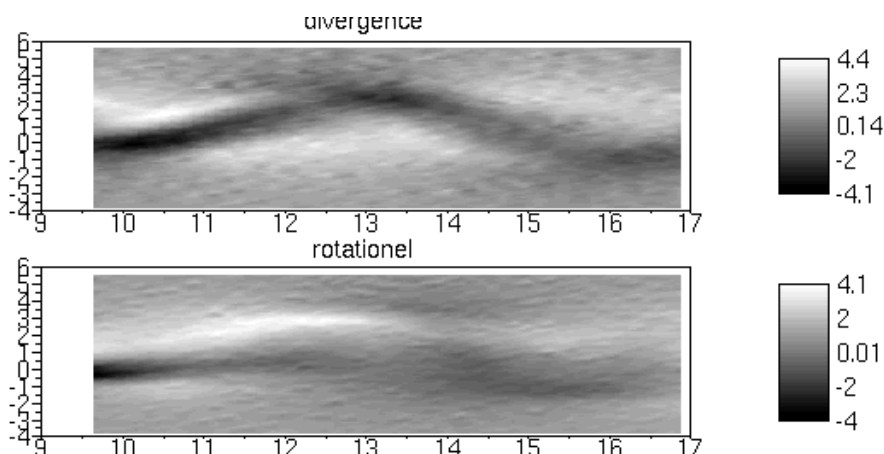


FIG. 18 – Champ PIV. traitement des données expérimentales pour représenter graphiquement la divergence et le rotationnel. Réalisé avec Scilab.

En partant de ces 3 données, l'objectif du travail effectué sur PIV aura été de vérifier certaines propriétés des théorèmes étudiés dans le projet :

**Green-Ostrogradsky :** Afin de vérifier le théorème de Green-Ostrogradsky, on s'est intéressé à l'erreur obtenue lorsque l'on compare les deux membres de l'équation de Green-Ostrogradsky : le programme effectué sous Scilab permet donc de faire la somme dans un volume, de profondeur 1 par convention, du champ des valeurs de la divergence. Et la somme des vecteurs vitesse sur le plan étudié. Une fois ces deux valeurs obtenues on remarque qu'il existe bien une différence. Afin d'évaluer cette erreur nous avons dans un deuxième temps soumis cette méthode avec des champs théoriques qui ont la particularité d'avoir une divergence nulle. On remarque alors erreur d'ordre de grandeur constant subsiste. A défaut de totalement justifier l'erreur obtenue par le champs expérimentale cette 2<sup>ème</sup> démarche nous amène à conclure que la discrétisation d'un champs fausse le théorème de Green-Ostrogradsky, et marque ainsi l'importance de la condition de la continuité des champs pour qu'ils puissent vérifier Green-Ostrogradsky.

**Stokes :** Pour vérifier le théorème de Stokes, l'approche a été similaire : on a dans un premier temps calculé le rotationnel en chaque point du système plan étudié (voir FIG. 19) en prenant comme hypothèse la linéarité entre les valeurs de chaque composantes éloignées spatialement d'une longueur  $\Delta x$  (suivant  $x$ ) et  $\Delta y$  (suivant  $y$ ). Pour calculer une valeur approchée de l'intégrale des rotationnel de notre champ sur une surface prédéfinie, nous avons fait la somme discrète des rotationnels que nous avons calculés en chaque point du maillage recouvrant cette surface. Nous avons calculé de la même manière la circulation autour de cette surface pour comparer les deux valeurs trouvées.

Le Théorème de Stokes prédit que ces valeurs sont égales. Nous n'avons pu trouver que des valeurs de même ordre de grandeur, parfois avec un rapport de presque  $\frac{1}{2}$  ! Cette erreur se retrouve sur des champs théoriques mais tend à diminuer lorsque l'on diminue les valeurs de  $\Delta x$  et  $\Delta y$ . Cela montre encore une fois l'importance de la continuité dans la validité du théorème de Stokes.

Finalement, les résultats obtenus nous rappellent que la validité de ces théorèmes dépend de conditions particulières sur le champ étudié. Il est donc important de les vérifier avant d'utiliser les outils mathématiques à notre disposition ici. Pour des mesures expérimentales, cela nous met en garde sur les hypothèses admises lors de l'expérience. Pour les champs PIV, nous avons

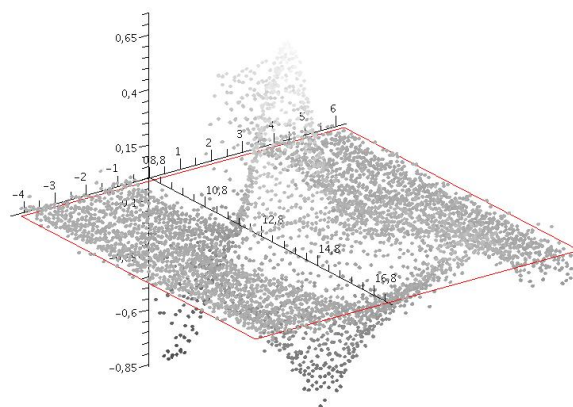


FIG. 19 – Représentation de la valeur du rotationnel d'un champ 2-D. Réalisé avec Maple.

du considérer le fluide expérimental parfait, et les conditions de mesures optimales, ce qui est impossible en réalité. Il est important de se rappeler que ces outils mathématiques sont issus de modélisation de la réalité, et qu'il faut toujours garder en mémoire les limites de ces modèles.

### 3.3.2 Illustration du rotationnel par un système d'engrenages

Comme nous l'avons vu précédemment le théorème de Stokes est une généralisation de l'opérateur rotationnel sur une surface. Afin de mieux illustrer sens physique de ce théorème, nous avons essayé de modéliser un champ de rotationnels.

Soit le champ vectoriel suivant :

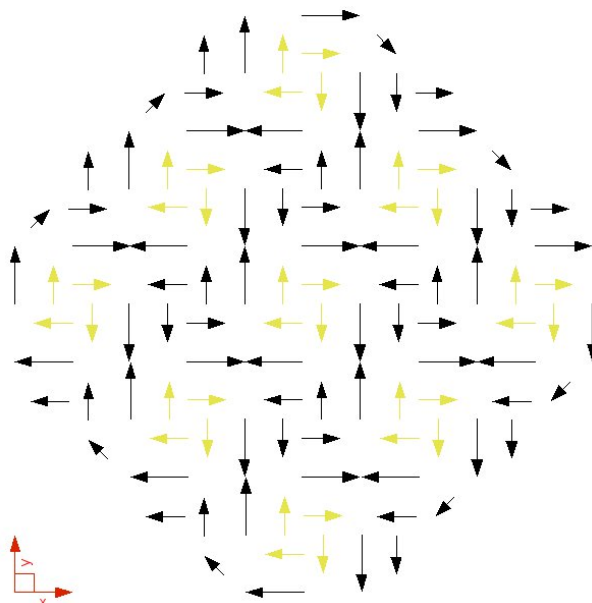


FIG. 20 – champ de vitesses engendré par des engrenages : le mouvement de rotation se transmet jusqu'au contour.

On voit bien que ce champs présente de nombreux mouvements rotationnels et anti-rotationnels.

Lorsque un champ vectoriel présente localement un rotationnel différent de 0, on se doute bien que le champ de vitesses autour de ce point sera perturbé par ce rotationnel : Il se transmettra localement.

On l'observe bien sur le champ vectoriel ci-dessus.

Les flèches jaunes représentent des points où, localement, le rotationnel est dans le sens horaire.

Les flèches noirs sont donc entraînées par le mouvement.

Elles forment ainsi localement des mouvements rotationnels dans le sens trigonométrique.

On peut modéliser le champ suivant à l'aide d'engrenages de deux couleurs. Les blancs représenteront le rotationnel dans le sens horaire  $(0, 0, -1)$  et les noirs ceux dans le sens trigonométrique  $(0, 0, 1)$ .



FIG. 21 – Système d'engrenage. Illustration du rotationnel.

Que nous dit le théorème : la somme des rotationnels sur la surface étudiée est égale à la circulation sur son contour.

On compte le nombre d'engrenages blancs : 9

On compte le nombre d'engrenages noirs : 4

On obtient donc globalement un rotationnel négatif (dans le horaire). Par conséquent la circulation sur le contour de la surface devrait être elle aussi dans le sens horaire.

Ainsi lorsque l'on place une cordelette autour de notre surface de contrôle, on constate qu'elle se déplace en effet dans le sens horaire.

Nous venons de vérifier le théorème de Stokes.

Ce modèle montre bien comment cette notion de rotationnel se généralise à une surface. On visualise en effet que les engrenages se transmettent le mouvement de proche en proche. Bien sûr il s'agit d'une approche simplifiée mais qui illustre bien le théorème de Stokes.

## 4 Conclusion et perspectives

### Conclusions sur le travail réalisé :

Ce travail nous a permis de nous rendre compte à quel point les outils mathématiques sont indispensables pour pouvoir expliquer les phénomènes physiques. Un bon physicien doit aussi être un matheux, mais il doit surtout être suffisamment malin pour ne pas avoir à faire trop de calculs. On a eu ici deux exemples avec les démonstrations des théorèmes de Green – Ostrogradsky et Stokes. Deux théorèmes assez complexes de prime abord, mais qui peuvent être démontrés en quelques lignes en évitant de nombreuses pages de calculs.

Nous avons pu vérifier la validité de ces théorèmes grâce au champ PIV (Expérience du CORIA). Mettre au point des méthodes pédagogiques pour les expliquer n'a pas été simple, mais nous pensons que le montage des engrenages illustre assez bien Stokes. En ce qui concerne Green-Ostrogradsky, nous pensons que le rapport en lui-même est une bonne approche pédagogique. Nous l'avons structuré de manière à ce qu'une personne d'un niveau de terminale puisse comprendre ce sur quoi nous avons travaillé.

D'un point de vue organisationnel, il est clair que faire des projets en groupe ne peut être qu'un bon entraînement pour ce qui sera notre futur métier d'ingénieur.

### Conclusions sur l'apport personnel de cette U.V. projet :

**Matthieu Audras :** Ce projet m'a permis de comprendre un peu mieux les notions de rotationnel et de divergence. J'ai beaucoup apprécié l'illustration de Stokes par les engrenages. Cependant, il est dommage que nous n'ayons pas pu faire nous-même d'expérience pour vérifier la validité des théorèmes, nous avons trop accordé d'importance à l'aspect mathématique. Néanmoins, cette uv est très intéressante, mais il faudrait proposer plus de projets en rapport avec chaque thématique.

**Jérémie Lehoux :** La réalisation d'un tel projet a été une bonne occasion de manipuler les outils mathématiques utilisés dans de nombreux domaines physiques, dont certains abordés pendant les cours. Cela m'a un peu plus familiarisé avec leur sens physique intrinsèque et m'aidera je pense par la suite à les utiliser à bonne escient. Enfin, il est toujours bénéfique de travailler en groupe. Cela m'a en effet permis d'avoir des points de vue différents sur un même sujet, ce qui est très bénéfique pour la suite de mes études qui nécessitent une ouverture d'esprit permanente.

**André Fabbri :** Ce projet m'a permis de faire le lien entre différents domaines de la physique : je pense aux similitudes entre électromagnétisme et mécanique des fluides. Le théorème d'Ostrogradsky apparaît tout de suite plus intéressant lorsqu'on a l'habitude de manipuler des flux et des champs vectoriels en cours.

Ce projet a aussi été pour moi une bonne première approche du travail en projet.

**Matthieu Vautrot :** A la base mon objectif premier en choisissant ce sujet été de démystifier ces théorèmes en me les appropriant. Lors de notre première année à la sortie de la terminale, l'introduction avec ces équations remplis d'opérateurs physiques est assez déstabilisante. Ainsi découvrir les différentes applications, et modélisations possibles du théorème de Stokes et de de Green-Ostrogradsky m'a parut très intéressant.

Un projet à plusieurs reste toujours très enrichissants d'un point de vue des résultats obtenus ainsi que de l'expérience en travail d'équipe, pour notre future carrière. Et celui ci a particulièrement été riche en terme d'organisation :

- Bien définir les objectifs et les grandes lignes à suivre
- Comment se répartir ces différentes charges de travail
- Comment centraliser les différents résultats ..

Ce projet m'a permis de mettre en application les quelques connaissances que j'avais de Maple, mais aussi de découvrir un nouvel outil tout aussi performant qu'est Scilab. L'apport des différents résultats obtenu par ces outils pour l'avancement du projet est là aussi très gratifiant.

**Nicolas Triscos :** Les deux théorèmes sont trop théoriques pour les comprendre physiquement avec plus de précision. C'est à dire que pour le théorème d'Ostrogradsky, je ne me le représente quasiment pas mieux qu'avant le projet. Pour le théorème de Stokes, j'ai quand même une meilleure approche avec l'effet du rotationnel qui engendre un travail sur le contour avec l'image des engrenages. Même notre tuteur nous as dit qu'il essayait de trouver la vraie signification physique de ces théorèmes : ce n'est donc pas en un semestre qu'un groupe d'étudiant connaissant les théorèmes depuis un an peuvent trouver une véritable signification. Je n'ai pas trouvé le sujet très exploitable. Il faudrait peut-être aussi que le projet soit plus ciblé, c'est à dire que le contenu du projet ne dépende pas autant de la décision du groupe, ce qui éviterait que le groupe parte dans la mauvaise direction et du coup recommencer par un autre bout. Il faut donc définir plus clairement et plus précisément ce que l'on attend de nous dès la première séance.

**Huan Geng :** Green-Ostrogradsky et Stokes sont deux formules qui sont beaucoup utilisées dans les mathématiques et la physique. De plus, je veux faire le département Génie Mathématique l'année prochaine, donc il est très important de bien les comprendre. Au cours des séances, on a trouvé des démonstrations, des exercices et pas mal d'applications. Comme c'est un projet, ça me donne de l'expérience sur le travail en groupe.

#### Perspectives pour la poursuite de ce projet :

Pour les projets à venir il est important que les élèves sachent un peu où aller. En ce qui nous concerne, nous partions un peu dans tous les sens et nous n'avons donc pas vraiment mené une piste jusqu'au bout, ce qui est dommage. Il faudrait peut-être essayer « d'uniformiser les sujets » : c'est à dire que tous doivent mettre en avant une expérience physique vérifiant un théorème par exemple ou bien étudier une pièce mécanique ; on aurait alors l'impression d'être tous sur le même pied d'égalité.

Il faut aussi prendre en compte le fait que nous ne suivons pas le même cursus. D'un côté c'est enrichissant car chacun y apporte sa petite touche personnelle, d'un autre côté ceux qui ne font plus de cours de physique (qui suivent un cursus plutôt orienté vers l'informatique ou vers la chimie) vont sûrement moins bien accrocher car ils ne pourront pas faire le lien avec ce qu'ils connaissent. Par exemple, les théorèmes d'Ostrogradsky et Stokes apparaissent tout de suite plus intéressants lorsque l'on a l'habitude de manipuler des flux et des champs vectoriels en cours.

## 5 Bibliographie

- [1] Noms des auteurs, «Titre du livre», *Editeur*, année.
- [2] J.Brébec, «Mécanique des fluides : 2de année, PC-PC\*, PSI-PSI\*», *Hachette*, 1998.
- [3] lien internet: <http://les-mathematiques.u-strasbg.fr/phorum5/read.php?8,354475,356187>. (valide à la date du 17 juin 2008).
- [4] lien internet: [http://en.wikipedia.org/wiki/Divergence\\_theorem](http://en.wikipedia.org/wiki/Divergence_theorem). (valide à la date du 17 juin 2008).
- [5] lien internet: [http://en.wikipedia.org/wiki/Gauss27s\\_law\\_for\\_gravity](http://en.wikipedia.org/wiki/Gauss27s_law_for_gravity). (valide à la date du 17 juin 2008).
- [6] lien internet: [http://en.wikipedia.org/wiki/Gauss\27s\\_law](http://en.wikipedia.org/wiki/Gauss\27s_law). (valide à la date du 17 juin 2008).
- [7] lien internet: <http://www.sciences.univ-nantes.fr/physique/perso/blanquet/synophys/45meflu/45meflu.htm#2>. (valide à la date du 17 juin 2008).
- [8] lien internet: [www-lgit.obs.ujf-grenoble.fr/~dbrito/TUE302/COURS/TUE302\\_math.pdf](http://www-lgit.obs.ujf-grenoble.fr/~dbrito/TUE302/COURS/TUE302_math.pdf). (valide à la date du 17 juin 2008).
- [9] lien internet: <http://www.cegepat.qc.ca/TPhysique/sebas/pageaccueil/Opera.htm>. (valide à la date du 17 juin 2008).

### Autres documents :

Tableau de valeurs expérimentales des champs PIV. *Coria*.