Cours de RO - seconde partie : optimisation - Cahier de TD/TP

Stéphane Canu
LITIS, INSA de Rouen, B.P. 08,
76801 Saint Etienne du Rouvray CEDEX
stephane.canu@insa-rouen.fr

5 janvier 2011

Résumé

liste de TD et des TP de lapartie optimisation du cours de RO

Table des matières

1 TP sur les moindres carrés

Le but de ce TP est d'écrire une fonction matlab permettant d'approcher au sens des moindres carrés la fonction $\cos$ sur l'intervalle $[0, \pi]$ à l'aide de polynômes, lorsque l'on ne dispose que d'un échantillon bruité de cette fonction.

1. construire un échantillon de $n = 100$ points de la fonction $\cos$
2. construire l'estimateur au sens des moindres carrées de cette fonction à l'aide de polynômes de degré $d = 12$
3. que ce passe t'il si l'on change l'ordre du polynôme : $d = 0, 1, 2, 35, 10, 15, 20$
4. quelle est la sensibilité de la méthode aux mesures aberrantes :

   ```
   ya(1) = -1;
   ya(n) = 1;
   ```

5. quelle est la sensibilité de la méthodes face aux discontinuités ?

On pourra utiliser le cadre général suivant :

```
n = 100;    x = sort(rand(n,1));
nt = 1000; xt = linspace(0,1,nt)';
y = cos(pi*x);
yt = cos(pi*xt);
figure(1);
plot(x,y); hold on;
sig = 0.1;
ya = y+sig*randn(size(y));
plot(x,ya,'x');

X = [ones(size(x)) x x.^2 x.^3 x.^4 x.^5 x.^6 x.^7 x.^8 x.^9 x.^10 x.^11 x.^12];
Xt = [ones(size(xt)) xt xt.^2 xt.^3 xt.^4 xt.^5 xt.^6 xt.^7 xt.^8 xt.^9 xt.^10 xt.^11 xt.^12];

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%
% ecrire comment calculer a qui minimise ||X a - ya||^2 ?
%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

plot(xt,Xt*a,'r');
plot(x,X*a,'or');
```

2 TD sur les dérivées

Exercice 1 Montrez que :

$$\nabla(\mathbf{a}^\top \mathbf{x}) = \mathbf{a} \qquad \nabla(\mathbf{x}^\top A\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + A^\top \mathbf{x}$$

où $\mathbf{a}$ et $\mathbf{x}$ sont des vecteurs de $\mathbb{R}^n$ et A une matrice carré de taille $n \times n$.

Exercice 2

Calculez le gradient et le hessien des fonctions suivantes :

(a) $J_1(x, y) = (1 - x)^2 + 105(y - x^2)^2$

(b) $J_2(\mathbf{x}) = \|Ax\|^2 - \lambda\|x\|^2 \qquad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$

(c) $J_3(\mathbf{x}) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} J(r_i) \qquad r_i = \mathbf{a}_i^\top \mathbf{x} - b_i \quad J(r) = \log(1 - r^2)$

(d) $J_4(\mathbf{x}) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} y_i \mathbf{a}_i^\top \mathbf{x} - \log\left(1 + \exp^{\mathbf{a}_i^\top \mathbf{x}}\right)$ on poura poser $p = \dfrac{1}{1 + \exp^{\mathbf{a}_i^\top \mathbf{x}}}$ et écrie la solution en fonction du vecteur $\mathbf{p}$

Exercice 3

Calculez la dérivée directionnelle des des fonctions suivantes :

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (x_1, x_2) & \mapsto & f(x_1, x_2) = 1 \text{ si} x_1 > 0 \text{ et } x_2 = x_1^2 \text{ et } 0 \text{ sinon} \end{array}$$

$$\begin{array}{rccl} J: & \mathcal{F} & \to & \mathbb{R} \\ & f & \mapsto & J(f) = \|f\|^2 + C\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |f(\mathbf{x}_i) - y_i| \end{array}$$

3 Le gradient sur la fonction log barrière - gradient, gradient à pas optimal et gradient conjugué

Le but de ce TP est d'écrire un programme efficace permettant de résoudre le problème d'optimisation suivant :

$$\min_{x\mathbf{R}^n} \sum_{i=1}^{n} J(r_i) \qquad r_i = \mathbf{a}_i^\top \mathbf{x} - b_i \quad J(r) = -c\log(1 - \frac{r^2}{c^2})$$

à l'aide des méthodes suivantes : gradient à pas fixe, gradient à pas optimal, gradient conjugué et Newton. On utilisera le cadre général des données vue au premier TP. Comparez les moindres carrés avec la méthode de la fonction log-barrière (visualisez les résidus r_i des deux approches).

On pourra initialiser $\mathbf{x} = 0$ et utiliser $\alpha = \max(|\mathbf{r}|) + \varepsilon$

1. écrire les fonctions J, $grad_J$ et $Hess_J$ qui calculent respectivement le cout, le vecteur gradient et la matrice hessienne, et des programmes de test vérifiant que vos fonctions calculent bien ces quantités.
2. écrire le programme du gradient à pas fixe
3. écrire le programme du gradient à pas variable ne utilisant une technique d'optimisation mono dimensionnelle
4. écrire le programme du gradient conjuguée
5. écrire le programme de la méthode de Newton

4 TD sur la Programmation linéaire et le simplexe

Exercice 1

Résoudre le problème d'optimisation suivant :

$$\begin{cases} \min\limits_{x_1,x_2,x_3} -4x_1 - 2x_2 - 2x_3 & \\ 3x_1 + x_2 + x_3 & = 12 \\ x_1 - x_2 + x_3 & = -8 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 & \end{cases}$$

à l'aide de la méthode vue en cours (on partira de la base $(1, 2)$).

Exercice 2 Réduction

Donner la forme normale du problème suivant

$$\begin{cases} \min\limits_{x_1,x_2} x_1 - 2x_2 & \\ x_1 + x_2 & \leq 3 \\ -x_1 + 3x_2 & \leq -4 \\ x_1 \geq 0 & \end{cases}$$

Exercice 3 Initialisation

Construire une base de départ réalisable pour le problème suivant :

$$\begin{cases} \min\limits_{x_1,x_2,x_3} x_1 - 2x_2 + 3x_3 & \\ x_1 + x_2 - x_3 & = 3 \\ -x_1 + 3x_2 & = -4 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 & \end{cases}$$

Exercice 4

Résoudre le problème d'optimisation suivant :

$$\begin{cases} \max\limits_{x_1,x_2} x_1 + 2x_2 & \\ -3x_1 + 2x_2 & \leq 2 \\ -x_1 + 2x_2 & \leq 4 \\ x_1 + x_2 & \leq 5 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 & \end{cases}$$

d'abord de manière graphique puis à l'aide de la méthode vue en cours.

Exercice 5

Résoudre le problème d'optimisation suivant :

$$\begin{cases} \max\limits_{x_1,x_2} x_2 & \\ 2x_1 + 3x_2 & \leq 1 \\ |x_1 - \frac{2}{3}| & \leq \frac{1}{3} \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 & \end{cases}$$

d'abord de manière graphique puis à l'aide de la méthode vue en cours.

Exercice 6

Résoudre le problème d'optimisation suivant en matlab :

$$\left\{\begin{array}{rl} \max\limits_{x_1,x_2,x_3} 3x_1 + +5x_2 + 8x_3 & \\ x_1 + x_2 + x_3 & \leq 100 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 & \leq 200 \\ x_1 + 2x_2 & \leq 150 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 & \end{array}\right.$$

5 TP sur la régession L_1

1. Reformuler le problème d'optimisation suivant (de la régression L_1) comme une programme linéaire.

$$\min_{\beta} \sum_{i=1}^{n} |\mathbf{x}_i^\top \beta - y_i|$$

2. Télécharger un solveur de programmation linéaire comme par exemple `linprog`
3. Ecrire un programme matlab permettant de résoudre le problème de régression L_1
4. Comparer les résultats à ceux des moindres carrés et de la log barrière dans différents cas.

6 TD sur le calcul de Lagrangien et dualité

Donnez les conditions d'optimalité (de Kuhn et Tucker) des problèmes suivants :

1. $$\left\{\begin{array}{rl} \displaystyle\min_{x_1,x_2} & x_1 + x_2 \\ \text{avec} & 2 - x_1^2 - x_2^2 \geq 0 \\ \text{et} & x_2 \geq 0 \end{array}\right.$$

   donnez graphiquement la solution du problème

2. $$\left\{\begin{array}{rl} \displaystyle\min_{x_1,x_2} & (x_1 - 3/2)^2 + (x_2 - 1/2)^2 \\ \text{avec} & |x_1| + |x_2| \geq 1 \\ \text{et} & x_2 \geq 0 \end{array}\right.$$

   là encore, donnez graphiquement la solution du problème

Calculez le lagrangien et la formulation duale des problèmes suivants :

1. Soit A une matrice $n \times p$ et $\mathbf{y}$ un vecteur de $\mathbb{R}^n$

$$\left\{\begin{array}{rl} \displaystyle\min_{\mathbf{x}} & \|\mathbf{x}\|_1 \\ \text{avec} & A\mathbf{x} = \mathbf{y} \end{array}\right.$$

2. $\left\{\begin{array}{rl} \displaystyle\min_{\mathbf{x}} & \|\mathbf{x}\|^2 \\ \text{avec} & A\mathbf{x} = \mathbf{y} \end{array}\right.$

3. $\left\{\begin{array}{rl} \displaystyle\min_{\mathbf{x}} & \|A\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 \\ \text{avec} & \|\mathbf{x}\|^p \leq 1 \end{array}\right.$ pour $p = 1$ et 2.

7 Archives des examens

Exercice 1 — un simple simplexe — 7 points

On doit organiser une pont aérien pour transporter 1600 personnes et 90 tonnes de bagages. Deux types d'avions sont disponibles : des caravelles qui peuvent transporter, à pleine charge 200 personnes et 6 tonnes de fret et des illiouchines qui peuvent transporter à pleine charge 100 personnes et 6 tonnes de bagages. Il y a 12 caravelles de disponibles et 9 illiouchines. Les tarifs de location sont les suivants : 800.000 euros pour une caravelle et 200.000 euros pour un Illiouchine.

Proposez, à l'aide de la méthode du simplexe, la formule de location la moins chère permettant de transporter les personnes et les bagages.

Exercice 2 — Optimisation propre — 3 points

Soit A une matrice symétrique définie positive. soit J une fonction de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ à valeur dans $\mathbb{R}$:

$$J(\mathbf{x}, \lambda) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^\top A\mathbf{x} - \lambda(\mathbf{x}^\top \mathbf{x} - 1)$$

Donnez le gradient et la matrice Hessienne de J par rapport au couple $(\mathbf{x}, \lambda)$. Proposez une méthode permettant de trouver le minimum de la fonction suivante J pour $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

Exercice 3 — un simple simplexe — 7 points

Un pâtissier cherche maximiser ses revenus. Or, chaque brioche vendue lui rapporte 6 euros, chaque tarte au pommes lui rapporte 5 euros et chaque gâteau au chocolat 8 euros. Ce matin il lui reste une heure vingt de travail avant de mettre en vente sa production et la fabrication d'une brioche lui prend 2 minutes, celle d'une tarte au pommes une minute et cette d'un gâteau au chocolat 4 minutes. De plus il ne dispose que de 8 kg de farine et un kilo et demi de beurre alors que la fabrication d'une brioche n'utilise pas de farine mais exige 10 grammes de beurre, celle d'une tarte aux pommes nécessite 400 grammes de farine et 30 grammes de beurre et celle d'un gâteau au chocolat 100 grammes de farine et 50 grammes de beurre.

(a) Proposez, à l'aide de la méthode du simplexe, la formule de fabrication offrant le meilleur revenu à ce pâtissier !

(b) A l'issue de cette journée, s'il vend toute sa production, pourra-t'il s'acheter le baladeur enregistreur de ses rêves qui coute 280 euros ?

(c) donnez la formulation duale de ce problème ?

Exercice 4 — chose pomise... — 3 points

Soit $A^i, i = 1, ..., n$ une base de $\mathbb{R}^n$. On note $A^j, j = n+1, ..., n+m,\quad m$ autres vecteurs de $\mathbb{R}^n$. L'expression des vecteurs $A^j, j = n+1, ..., n+m$ dans la base des A^i est noté :

$$A^j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} A^i$$

nous allons maintenant voir comment remplacer un des éléments de la base $A^\ell, \ell \in \{1, ...n\}$ par un des vecteurs hors base $A^k, k \in \{n+1, ..., n+m\}$

(a) exprimez A^ℓ en fonction des α_{ik}, des vecteurs $A^i, i = 1, n, i \neq \ell$ et de A^k

(b) en déduire que les $A^j, j = n+1, ..., n+M, j \neq k$ peuvent s'écrire sans faire intervenir le vecteur A^ℓ de la manière suivante :

$$A^j = \sum_{i=1, i\neq\ell}^{n} \beta_{ij} A^i + \beta_{kj} A^k$$

où l'on précisera la valeurs des coefficients β

Exercice 5 — un simple simplexe — 4 points

Pour fabriquer un bureau qui va rapporter un bénéfice de 300 euros, une entreprise estime qu'il lui faudra une heure de sciage, deux heures d'assemblage et une heure de sablage. Pour fabriquer une armoire qui va rapporter un bénéfice de 200 euros, cette même entreprise estime qu'il lui faudra deux heures de sciage, une heure d'assemblage et une heure de sablage. Elle dispose par jour de vingt heures pour le sciage, 22 heures pour l'assemblage et douze heures pour le sablage.

Calculez, à l'aide de la méthode du simplexe, la quantité de bureaux et d'armoire que la société doit produire pour maximiser son profit.

Exercice 6 — Optimisation propre — 4 points

Soit A une matrice symétrique définie positive. soit J une fonction de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ à valeur dans $\mathbb{R}$:

$$J(\mathbf{x}, \lambda) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^\top A \mathbf{x} - \lambda(\mathbf{x}^\top \mathbf{x} - 1)$$

Donnez le gradient et la matrice Hessienne de J par rapport au couple $(\mathbf{x}, \lambda)$. Proposez une méthode permettant de trouver le minimum de la fonction suivante J pour $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

Exercice 7 — approximation — 2 points

On cherche a approcher une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ inconnue par la fonction

$$g(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_n k(x - x_i) \qquad \text{avec} \quad k(u) = \exp^{-u^2}$$

On suppose que l'on dispose de n observations $(x_i, y_i = f(x_i))_{i=1,n}$. Proposez, en matlab, une méthode permettant de calculer les coefficiants α_i de manière optimale.

Exercice 8 — encore un autre simple simplexe — 5 points

La société ORANCO fabrique deux mélanges de jus de fruits : le Bahama et le Costa. La société dispose chaque jour de 5500 litres de jus de raisin, 5200 litres de jus de pomme et 6000 litres de jus d'orange. Elle vend le Bahama 10 euros les 100 litres et le Costa 8 euros les 100 litres. Le tableau qui suit indique la composition d'un litre de chaque mélange.

	Jus de raisin	Jus de pomme	Jus d'orange
Bahama	0, 3	0, 4	0, 3
Costa	0, 3	0, 2	0, 5

Calculez, à l'aide de la méthode du simplexe, combien ORANCO doit-elle fabriquer de litres de Bahama et de Costa chaque jour pour maximiser son chiffre d'affaires ?

Exercice 9 Dérivations 2 points

Soit x_i une famille de n vecteurs de $\mathbb{R}^d$, soit $y_i \in \{-1, 1\}$ pour $i = 1, n$. Soit k une fonction de deux variables de $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ à valeur dans $\mathbb{R}$ Calculez la dérivée directionnelle par rapport au vecteur α de la fonctionnelle suivante :

$$J(f) = \frac{1}{2}\alpha^\top K\alpha - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(y_i(f(x_i) + b) - 1)$$

avec $f(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i k(x, x_i)$, K la matrice de terme général $K_{ij} = k(x_j, x_i)$ et α le vecteur des α_i.

Exercice 10 approximation 3 points

Soit $x_i \in \mathbb{R}$ pour $i = 1, n.$ et $y_i = f(x_i) \in \mathbb{R}$ pour $i = 1, n.$ avec un certain nombre de valeurs aberrantes. On cherche à approcher une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ inconnue par la fonction

$$g(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_n k(x - x_i) \qquad \text{avec } k(u) = \frac{1}{\sqrt{1 + u^2}}$$

Proposez, en matlab, une méthode permettant de calculer les coefficients α_i de manière optimale.

Exercice 11 Can-U 6 points

Le gérant de la distribution de l'entreprise Cannes United (production de cannes pour aveugles), dispose de trois usines de fabrication (une à Amfreville la campagne (A), une à Bogota (B) et une dernière à Canberra (C)). Il souhaite minimiser ses couts de transports entre les sites de fabrication et ses quatre magasins (à Winipeg (W), Xanadu (X), Yerville (Y) et Zanzibar (Z)).

Usine	Production
A	400
B	1500
C	900
Total	2800

Magasins	Demande
W	700
X	600
Y	1000
Z	500
Total	2800

.

Nous avons aussi la matrice des couts de transports :

	W	X	Y	Z
A	20	40	70	50
B	100	60	90	80
C	10	110	30	200

Par exemple ça coute 70 euros de transporter à Yerville une canne fabriquée à Amfreville la campagne.

(a) formuler le problème comme un programme linéaire,

(b) écrire le tableau de simplexe associé

(c) l'adjoint du grand chef à proposé la solution S_1 (en nombre de cannes) et la mère du chef à suggéré la solution S_2 :

$S_1 =$

	W	X	Y	Z
A	100	100	100	100
B	400	200	700	200
C	100	300	300	200

$S_2 =$

	W	X	Y	Z
A		400		
B		200	800	500
C	700		200	

i. ces solutions sont-elle admissibles ?

ii. et si oui comment la (ou les) améliorer : écrire le tableau du simplexe initial associé à la (ou les) solution admissible et préciser quelle modifications lui apporter pour l'améliorer.

(d) écrire la lagrangien associé au programme linéaire et en déduire la forme duale du programme

---

Exercice 12 Coniques 4 points

On considère le problème d'optimisation suivant :

$$\left\{\begin{array}{ll}\min\limits_{x,y,z} & (x-2)^2+(y-1)^2+(z+1)^2 \\ \text{avec} & z \geq x^2+y^2+\frac{6}{5}xy \\ \text{et} & -2x+y+z=1\end{array}\right.$$

(a) donner les conditions nécessaires pour qu'un point (x, y, z) puisse être une solution du problème,

(b) écrire le lagrangien du problème

(c) écrire un algorithme de type gradient à pas variable permettant de minimiser le lagrangien par rapport à (x, y, z) (les multiplicateurs de Lagrage étant supposés fixe),

(d) écrire un algorithme de type gradient à pas variable permettant de maximiser le lagrangien par rapport au multiplicateurs de Lagrage ((x, y, z) étant supposés fixe).

8 Éléments de correction

Exercice 3 un simple simplexe 7 points

```
A =   2     1     4     1     0     0    80
      0     4     1     0     1     0    80
      1     3     5     0     0     1   150
     -6    -5    -8     0     0     0     0

B = 0.2500         0         0         0
   -0.2500    1.0000         0         0
   -1.2500         0    1.0000         0
    2.0000         0         0    1.0000

C = 0.5000    0.2500    1.0000    0.2500         0         0   20.0000
   -0.5000    3.7500         0   -0.2500    1.0000         0   60.0000
   -1.5000    1.7500         0   -1.2500         0    1.0000   50.0000
   -2.0000   -3.0000         0    2.0000         0         0  160.0000

B = 1.0000   -0.0667         0         0
         0    0.2667         0         0
         0   -0.4667    1.0000         0
         0    0.8000         0    1.0000

C = 0.5333         0    1.0000    0.2667   -0.0667         0   16.0000
   -0.1333    1.0000         0   -0.0667    0.2667         0   16.0000
   -1.2667         0         0   -1.1333   -0.4667    1.0000   22.0000
   -2.4000         0         0    1.8000    0.8000         0  208.0000

B = 1.8750         0         0         0
    0.2500    1.0000         0         0
    2.3750         0    1.0000         0
    4.5000         0         0    1.0000

C = 1.0000         0    1.8750    0.5000   -0.1250         0   30.0000
         0    1.0000    0.2500         0    0.2500         0   20.0000
         0         0    2.3750   -0.5000   -0.6250    1.0000   60.0000
         0         0    4.5000    3.0000    0.5000         0  280.0000
```

Exercice 4 chose promise... 3 points

Soit $A^i, i = 1, ..., n$ une base de $\mathbb{R}^n$. On note $A^j, j = n+1, ..., n+m$, m autres vecteurs de $\mathbb{R}^n$. L'expression des vecteurs $A^j, j = n+1, ..., n+m$ dans la base des A^i est noté :

$$A^j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} A^i$$

nous allons maintenant voir comment remplacer un des éléments de la base $A^\ell, \ell \in \{1, ...n\}$ par un des vecteurs hors base $A^k, k \in \{n+1, ..., n+m\}$

(a) exprimez A^ℓ en fonction des α_i, des vecteurs $A^i, i = 1, n, i \neq \ell$ et de A^k

$$A^\ell = \frac{1}{\alpha_{\ell k}} \left(A^k - \sum_{i=1, i\neq \ell}^{n} \alpha_{ik} A^i \right)$$

(b) en déduire que les $A^j, j = n+1, ..., n+M, j \neq k$ peuvent s'écrire sans faire intervenir le vecteur A^ℓ de la manière suivante :

$$A^j = \sum_{i=1, i\neq k}^{n} \alpha_{ij} A^i + \alpha_{\ell j} \left(\frac{1}{\alpha_{\ell k}} \left(A^k - \sum_{i=1, i\neq k}^{n} \alpha_{ik} A^i \right)\right)$$

on en déduit :

$$\beta_{ij} = \alpha_{ij} - \frac{\alpha_{\ell j}}{\alpha_{\ell k}} \alpha_{ik} \qquad \text{et} \qquad \beta_{j\ell} = \frac{\alpha_{\ell j}}{\alpha_{\ell k}}$$

Exercice 8 encore un autre simple simplexe 5 points

```
A =

   1.0e+03 *

    0.0003    0.0003    0.0010         0         0    5.5000
    0.0002    0.0004         0    0.0010         0    5.2000
    0.0005    0.0003         0         0    0.0010    6.0000
   -0.0001   -0.0001         0         0         0         0

M1 =

    1.0000   -0.7500         0              0
         0        2.5000         0              0
         0       -0.7500    1.0000         0
         0        0.2500         0    1.0000

A1 =

   1.0e+04 *

    0.0000         0    0.0001   -0.0001         0    0.1600
    0.0001    0.0001         0    0.0003         0    1.3000
    0.0000         0         0   -0.0001    0.0001    0.2100
   -0.0000         0         0    0.0000         0    0.1300

M2 =

    1.0000         0   -0.4286         0
         0    1.0000   -1.4286         0
         0         0        2.8571         0
         0         0        0.0857    1.0000

A2 =

   1.0e+04 *

         0         0    0.0001   -0.0000   -0.0000    0.0700
         0    0.0001         0    0.0004   -0.0001    1.0000
    0.0001         0         0   -0.0002    0.0003    0.6000
         0         0         0    0.0000    0.0000    0.1480
```