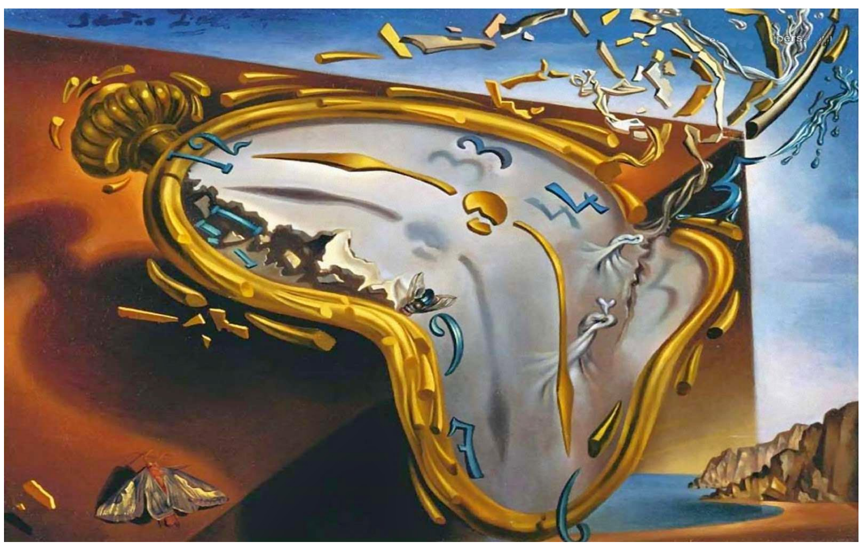
Projet de Physique
P6-2018
STPI/P6/2018 - #28

Introduction à la Théorie de la relativité restreinte : Approche physique, mathématique, historique et philosophique



Sandy PONCET, Noémie PRIN, Alix POULBOT,
Julien DELAUNAY, Hamza ZAOUAK, Barnabé PERROT, Benjamin PATRY
Enseignant responsable : Guillaume DUVAL

Date de remise du rapport : 18 Juin 2018

Référence du projet : STPI/P6/2018 - 27/28

Intitulé du projet : Introduction à la Théorie de la relativité restreinte : Approche physique, mathématique, historique et philosophique

Type de Projet : Physique Théorique

Objectifs du projet : L'Objectif du projet est de suivre le cheminement logique, mathématique et physique des grands savants des XIXièmes et XXièmes siècle qui ont, par leurs travaux, menés à l'élaboration de la théorie de la relativité restreinte qui sera finalement énoncée sous la forme qu'on lui connait aujourd'hui par Albert Einstein dans son article intitulé *« Zur Elektrodynamik bewegter Körper »* soit *« De l'Électrodynamique des Corps en mouvements »* dans la revue *Annalen Der Physik* en Juin 1905.

Mots-clés du projet :
- Physique Théorique
- Mécanique
- Relativité
- Mathématiques

INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES DE ROUEN
Département Sciences et Techniques Pour l'Ingénieur
Avenue de l'Université - 76801 Saint-Étienne-du-Rouvray - tél : +33 (0)2 32 95 97 00 - fax : +33 (0)2 32 95 98 60

Table des matières

Introduction

La physique est une discipline bâtie sur des intuitions. Elle tente de modéliser le réel à l'aide d'outils mathématiques. En d'autres termes elle propose des modèles théoriques pour expliquer des phénomènes naturels. La difficulté de cette science apparait d'autant plus lorsqu'on réalise le contraste significatif entre le réel et notre perception de celui-ci. L'objectivité consiste à créer une distance entre l'objet d'étude et ses ressentis, à savoir la perception des sens. Le prodige des physiciens réside donc bien en cette capacité à imaginer des principes qui vont à l'encontre de ce que l'on peut percevoir. C'est avec ce même talent qu'Aristarque de Samos à estimé le diamètre de la Lune à un tiers de celui de la Terre, et ce au IVème siècle avant J-C, alors que de notre point de vue il s'agit simplement d'un astre dans la nuit. Mais ce sont ses réflexions sur la taille du Soleil qui sont encore plus impressionnantes, car il à énoncé que le diamètre solaire serait d'approximativement 40 fois celui de notre planète. En réalité, ce dernier est 400 fois plus gros que la Terre, mais ce n'est pas l'important, car Aristarque était assez objectif pour croire que le Soleil, qui nous apparait tout petit dans le ciel, est en réalité bien plus imposant que notre planète.

Prenons maintenant l'exemple de la lumière. Elle à longtemps été considérée comme instantanée. En effet, l'expérience de Galilée, qui consistait à allumer une lampe en haut d'une colline et à déterminer le temps qu'il faut à cette lumière pour atteindre un observateur situé sur une autre colline (suffisamment éloignées) on mené ce dernier à la conclusion que la lumière à une vitesse infinie. Les moyens mis en œuvre pour cette expérience étaient bien insuffisants pour observer le moindre retard de diffusion de la lumière. Cette idée était d'ailleurs partagée par de grands savants de l'époque tels que Kepler et Descartes. En allant à l'encontre de cette dernière, comment les physiciens sont donc parvenus à déterminer une vitesse finie de la lumière ?

Au fur et à mesure des recherches sur la vitesse de la lumière et les phénomènes liées à cette dernière, des singularités on commencé à apparaitre, des équations qui ne se conservaient plus, des phénomènes physiques qui ne pouvaient être représentés par les éléments de mécaniques newtoniennes, des équations centenaires mises en défaut par une expérience physique, qu'était-il arrivé aux savants ? Est-ce que le monde dessiné par leurs prédécesseurs avait changé ? Ou bien étaient-ils sur le point de relativiser la physique et la forme même de l'univers ? Ce sont les réponses à ces questions que vont rechercher d'illustres savants tels que Lorentz, Poincaré, Minkowski ou encore Einstein, dont nous allons vous présenter les travaux. Ce rapport fait suite au rapport du projet n°27, qui vous aura présenté les expériences des précurseurs, les travaux de Maxwell face à la relativité, ainsi que les travaux de Lorentz et Poincaré sur les transformations de Lorentz-Poincaré, Nous présenterons ici les travaux de Minkowski sur la géométrie de l'espace temps ainsi que les travaux de Poincaré et d'Einstein sur la composition des vitesses relativiste ainsi que de la quantité de mouvement relativiste ainsi que l'équivalence masse-énergie.

Méthodologie / Organisation du travail

Durant ce semestre, notre projet s'est présenté sous forme d'exposés réalisés par l'ensemble des membres du projet. Chaque semaine un groupe de deux à trois personnes préparait un oral sur un thème déterminé la semaine précédente. Cette préparation demandait à la fois des connaissances historiques des expériences réalisées, mais aussi la résolution mathématique des équations énoncées vaguement dans les ouvrages consultés pour nos recherches. La relativité restreinte et les systèmes d'équations associées à celle-ci ne nous étant pas familiers, les personnes non concernées par la présentation devaient de même effectuer quelques recherches en amont. Ceci permettait de se familiariser avec le sujet abordé la semaine suivante et ainsi de gagner en efficacité. L'ensemble des membres du groupe devaient prendre des notes de chaque exposé afin d'être capable de rédiger la partie du rapport associé mais surtout de comprendre l'enchainement des raisonnements présentés au fil des semaines. En ce qui concerne la rédaction du rapport nous avons effectué plusieurs versions nous permettant de nous corriger et d'approfondir des aspects évoqués vaguement dans les premières ébauches. Représenté ci-dessous un organigramme détaillant des tâches de chacun lors du projet.

Exposés réalisés par les membres du groupe et répartition de la rédaction du rapport

Barnabé
Train d'Einstein
Intervalle d'espace-temps de genre temps, espace et lumière
Simultanéité-causalité
Cône de lumière dans l'espace de Minkowski
(exposé + rapport)
Mise en page et coordinateur du rapport

Julien
Notion d'impulsion et de l'équivalence de masse
Présentation des quadrivecteurs
(exposé + rapport)

Benjamin
Calcul de la rapidité à partir des équations de d'Alembert
(exposé)
Réalisation du poster

Hamza
Démonstration de la non conservation de la quantité mouvement en physique relative
(exposé)
Réflexions philosophiques (rapport)

Alix
Transformations de Lorentz
Diagramme de Minkowski
Notion de simultanéité
Contraction des durées et des distances
(exposé + rapport)

Sandy
Principe de relativité
Transformation de Galilée
Non invariance des équations de Maxwell
(exposé + rapport)
Expériences liées à la lumière (rapport)

Noémie
La matrice de transformations de Lorentz-Poincaré : approche par la géométrie hyperbolique
(exposé + rapport)
Réflexions philosophiques (rapport)

Chapitre 1

Espace-Temps de Minkowski et train d'Einstein

1.1 Espace-temps de Minkowski

1.1.1 Métrique

Les résultats des travaux de Lorentz, qui cherchait à résoudre les contradictions entre les travaux de Maxwell et la mécanique Newtonienne, ainsi que les résultats de l'expérience de Michelson et Morley, ont mené Einstein et Poincaré sur le chemin de la relativité restreinte. En 1907, Hermann Minkowski, mathématicien et physicien allemand, décide de reprendre les travaux de Poincaré sur les pseudos-métrique dans les espaces plats, il a pour cela l'idée de réunir en une seule métrique l'espace et le temps, que l'on avait l'habitude de dissocier. Réunis dans ce nouveau « continuum espace-temps » à 4 dimensions, ce qui est aujourd'hui devenu l'Espace de Minkowski est à la base de tous les travaux postérieurs sur la relativité restreinte, il sert de plus de base métrique à la théorie de la relativité générale d'Einstein.

Pour construire cette géométrie ou espace et temps sont unis, Minkowski à du définir une métrique différente. Cette métrique défini la norme au carré du quadrivecteur d'un évènement prenant place dans cet espace. La norme du quadrivecteur est alors définie comme : $\Delta s^2 = c^2\Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2$ qui sera appelé l'intervalle d'espace temps entre les points formant l'extrémité du vecteur, assimilés à des évènements.

Soit un quadrivecteur de l'espace-temps : $w = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

Et la matrice η qui définit la métrique, telle que $\eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

on peut alors aussi définir l'intervalle d'espace temps entre deux évènements dans l'espace-temps de Minkowski comme :

$\Delta s^2 = (\Delta w)^T \times M \times \Delta w$ avec la notation d'Einstein.

L'intervalle d'espace-temps est un outil mathématique permettant d'étudier la relation de causalité entre deux évènements.Cet intervalle est supposé égal dans tous référentiels galiléens. Faisons-en la démonstration :

$$\Delta s^{2} = c^2\Delta t^{2}\text{-}\Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2$$

Soit Δs l'écart d'espace-temps entre deux évènements.
$\Delta s^2 = c^2\Delta t^2 - \Delta l^2$ avec $\Delta l^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2$
Montrons que $\Delta s^2 = \Delta s'^2$:

$$\Delta s'^2 = c^2\Delta t'^2 - \Delta x'^2 - \Delta y'^2 - \Delta z'^2$$
$$= \gamma^2(c\Delta t - \beta\Delta x)^2 - \gamma^2(\Delta x - \beta c\Delta t)^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2$$

$$= \gamma^2\left(c^2\Delta t^2 - 2c\beta\Delta t\Delta x + \beta^2\Delta x^2 - \Delta x^2 + 2c\beta\Delta t\Delta x - \beta^2c^2\Delta t^2\right) - \Delta y^2 - \Delta z^2$$
$$= \frac{1}{1-\beta^2}(c^2\Delta t^2(1-\beta^2) - \Delta x^2(1-\beta^2)) - \Delta y^2 - \Delta z^2$$
$$= c^2\Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2$$

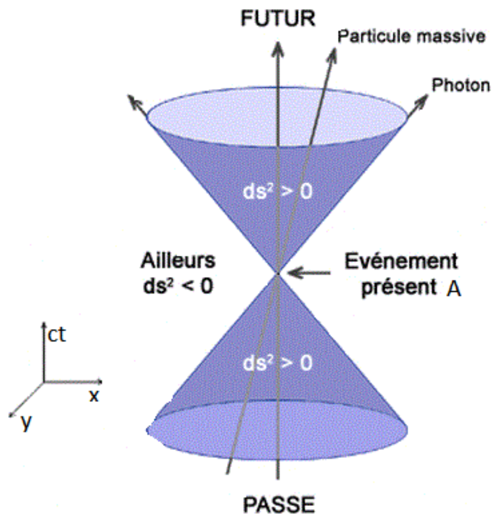
$$= c^2\Delta t^2 - \Delta l^2$$
$$= \Delta s^2$$

Ainsi, on peut affirmer que l'intervalle d'espace-temps est indépendant du référentiel dans lequel on le calcule, et que par conséquent, on peut déterminer les liens de causalité entre des évènements dans un référentiel R' en utilisant les coordonnées « simples » des évènements dans un référentiel R galiléen au repos dans l'espace.

1.1.2 Cônes de lumière

Lorsque $\Delta s^2 > 0$, l'intervalle est appelé de « genre temps » et il peut exister un lien de causalité entre les deux évènements.
De même, $\Delta s^2 = 0$, l'intervalle est appelé de « genre lumière » et il peut aussi exister un lien de causalité entre les deux évènements.
Au contraire $\Delta s^2 < 0$, l'intervalle est appelé de « genre espace » et il ne peut plus exister un lien de causalité entre les deux évènements.

$\Delta s^2 = c^2\Delta t^2$-$\Delta l^2 = c^2(t_B - t_A)^2 - (x_B - x_A)^2 = 0 - L^2 < 0$
Ainsi l'intervalle, est de genre espace. Il ne peut pas y avoir de lien de causalité. Ceci est cohérent car sinon cela signifierait que l'information transmise par l'un de ces deux évènements pour causer l'autre aurait été instantanée. En effet, au maximum l'information ne peut être transmise qu'à la vitesse de la lumière.
)
Afin de visualiser les liens de causalité plus aisément il convient d'utiliser les cônes de lumières. En prenant deux dimensions d'espace $(\vec{x}, \vec{y})$ et une de temps $(\vec{ct})$ on trace la surface $\Delta s^2 = 0$:



Le centre de la figure représente un évènement à $t = 0$ soit A un « évènement présent ». On peut placer l'origine de notre repère en ce point. Alors pour tout évènement B se trouvant à l'extérieur de ce sablier ($\Delta s^2 < 0$) alors B n'est en aucun cas la conséquence de l'évènement A. Sur la surface de ce sablier l'intervalle entre B et A est de genre lumière ainsi A peut avoir engendré B si B est la conséquence de l'émission (ou du passage) d'un photon en A à $t = 0$ (information de nature lumineuse). Si B se trouve l'intérieur du « sablier » l'intervalle d'espace-temps entre A et B sera de genre temps ($\Delta s^2 > 0$). Ainsi A peut avoir causé l'évènement B si ce dernier se trouve dans la partie haute (partie « future » de la figure). On peut maintenant imaginer une suite d'évènements (A,B,C) causés les uns par les autres en cascades, on obtient donc une série de cônes imbriqués comme suit :

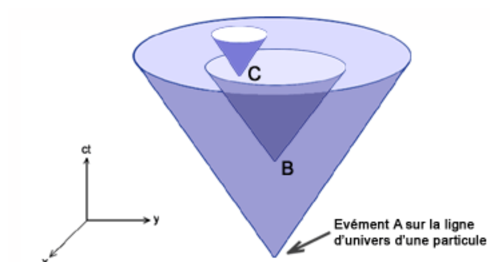


FIGURE 1.1 –

1.2 Le Train d'Einstein

La relativité restreinte peut entrainer certains phénomènes plutôt impressionnants, qui mettent nos sens et notre compréhension du monde au défi. Pour vous présenter ces derniers et tenter de comprendre le fonctionnement de la contraction des longueurs et de l'interaction des évènements en fonction des référentiels, nous allons vous présenter le paradoxe du train d'Einstein, qui met en jeu deux observateurs placés à des positions différentes dans des référentiels différents. Ceux-ci constateront d'importantes modifications de leur vision des choses. Prenons 4 éléments pour expliquer ce paradoxe. Il nous faut pour cela : un train qui va très vite ($v \approx c$), un tunnel, un observateur dans le train, qu'on appellera Adam, et un observateur sur le bord de la voie, qu'on appellera Sarah.

Prenons un train ayant une longueur propre au repos L, et un tunnel, ayant la même longueur propre L, le tunnel à une porte à chaque extrémité du tunnel. Avec les coefficients de contraction des longueurs, on aura bien $L = \gamma L' \Longrightarrow L > L'$. Définissons alors les deux évènements suivants :

A : Fermeture de la porte avant du tunnel

B : Fermeture de la porte arrière du tunnel quand l'arrière du train passe l'arrière du tunnel, ceci du point de vue de Sarah.

Dans R, référentiel de la voie, posons $t_A = t_B = 0$

Par les transformations classiques de Lorentz, on peut obtenir les équations suivantes :

$$\begin{pmatrix} x' \\ ct' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta \\ -\gamma\beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - \beta ct) \\ ct' = \gamma(-\beta x + ct) \end{cases}$$

dans le référentiel R de la voie, on pose $x_B = 0$ et $x_A = L$, par conséquent, on peut déterminer les coordonnées temporelles dans le référentiel R' par la formule : $t' = \gamma(t - \frac{vx}{c^2})$ qui découle des transformations de Lorentz exposés ci-dessus. Ainsi, on aura : $t'_A = \gamma(t_A - \frac{vx_A}{c^2}) = -\gamma\frac{vL}{c^2}$ et $t'_B = \gamma\left(t_B - \frac{vx_B}{c^2}\right) = 0$

Ainsi : $t'_A < t'_B$, donc dans le référentiel d'Adam (R'), la porte A se ferme avant la porte B, pourtant, dans le référentiel de Sarah, ces deux évènements sont parfaitement simultanés.

Posons deux évènements supplémentaires :

C : Ouverture de la porte arrière du tunnel

D : Ouverture de la porte avant du tunnel, quand l'avant du train arrive à l'avant du tunnel (sans pour autant rentrer dans la porte), ceci du point de vue de Sarah

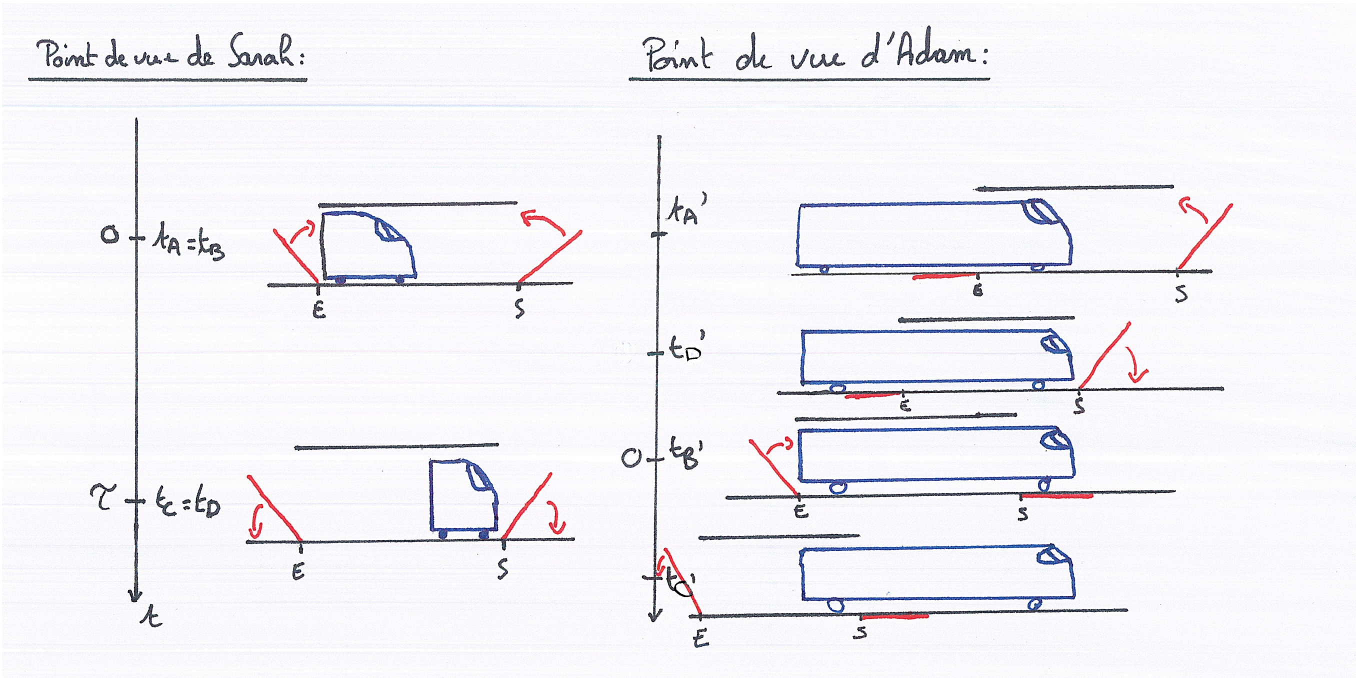
on aura alors : $t_D = t_A + \tau = t_C$ou τcorrespond au temps de trajet du train dans le tunnel, càd au temps nécessaire pour que l'avant du train arrive à l'avant du tunnel après que l'arrière du train ai pénétré dans le tunnel.Avec $\tau = \frac{L-L'}{v}$

$t'_D = \gamma(\tau - \frac{vL}{c^2})$

$t'_C = \gamma\tau$

$\Longrightarrow t'_D < t'_C$

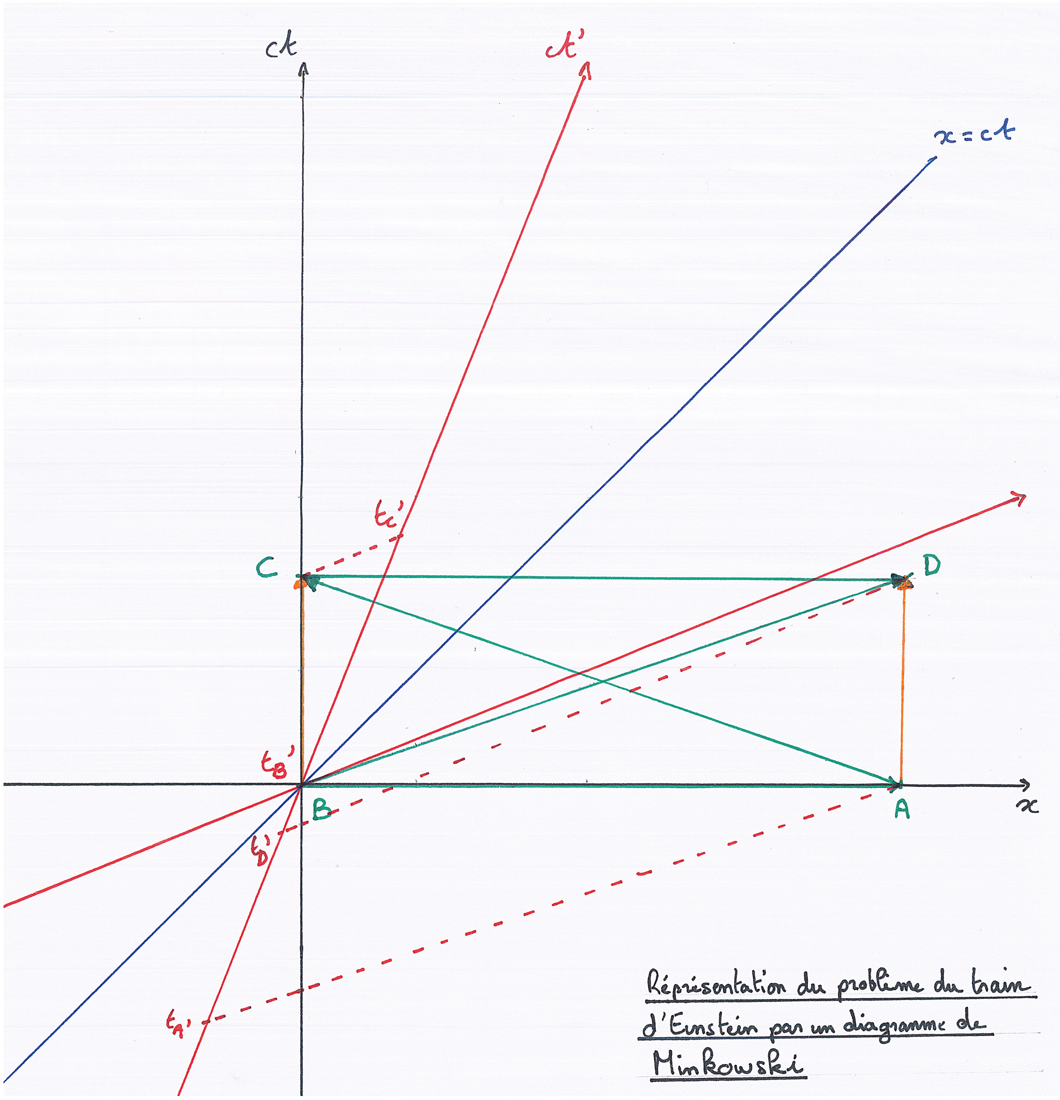
Ainsi, alors que dans le référentiel de Sarah, les évènements encore parfaitement simultanés, dans le référentiel d'Adam, la porte avant du tunnel s'ouvre avant la porte arrière. Ces évènements sont inversés, l'ordre des évènements auquel on s'attendrait pour le référentiel d'Adam serait ou le même que celui du référentiel de Sarah (Les couples d'évènements sont simultanés) ou bien l'ordre A->B->C->D (Fermeture avant, fermeture arrière, ouverture avant, ouverture arrière.), alors que nous constatons par le calcul que l'ordre est : A->D->B->C (Fermeture avant, ouverture avant, fermeture arrière, ouverture arrière) pour Adam . Pour tenter de représenter ces phénomènes, nous allons les représenter sur un diagramme d'espace-temps de Minkowski, ainsi que sur une flèche du temps.



Rappelons donc les coordonnées spatio-temporelles des évènements dans le référentiel de Sarah, avec la forme X(coordonnée d'espace ; coordonnée de temps) :

Pour les fermetures : $A(0\,;0)$ et $B(L\,;0)$
Pour les ouvertures : $C(0;\tau)$ et $D(L;\tau)$

Ainsi placées dans un diagramme de Minkowski, les évènement ont la forme suivante :



De plus, nous allons démontrer qu'il n'existe pas de rapports de causalité entre les évènements A/C-B/D-B/A-C/D Et que les évènements A/D et B/C peuvent êtres liés par un lien de causalité. Pour cela, nous allons calculer les intervalles d'espace-temps avec la formule : $\Delta s^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta l^2$

Intervalle d'espace temps entre B et A :

$$\Delta s^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta l^2 = \Delta s^2 = c^2 (t_B - t_A)^2 - (x_B - x_A)^2 = -L^2$$

Donc $\Delta s^2 < 0$, et l'intervalle d'espace-temps est de type espace, ce qui signifie qu'il ne peut y avoir de lien de causalité entre ces deux évènements.

Intervalle d'espace temps entre C et D :

$$\Delta s^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta l^2 = \Delta s^2 = c^2 (t_C - t_D)^2 - (x_C - x_D)^2 = -L^2$$

Donc $\Delta s^2 < 0$, et l'intervalle d'espace-temps est de type espace, ce qui signifie qu'il ne peut y avoir de lien de causalité entre ces deux évènements.

Intervalle d'espace temps entre B et D : (c.f annexe 1 pour le détail de la démonstration)

$$\Delta s^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta l^2 = \left(\frac{L}{\beta}\right)^2 \left(\frac{2(1-\gamma)}{\gamma^2}\right)$$

Or, $\gamma > 1$, ainsi, $1-\gamma < 0$, donc $\left(\frac{2(1-\gamma)}{\gamma^2}\right) < 0$, et Δs^2est négatif, et l'intervalle d'espace temps entre B et D est donc un intervalle de type espace, et il n'y a pas de lien de causalité entre B et D

Intervalle d'espace temps entre A et C : C'est l'autre diagonale du rectangle, on suis donc le même raisonnement que pour B et D et on obtient le même résultat. L'intervalle entre A et C est bien un intervalle du genre espace. Ce qui signifie qu'il ne peut y avoir de lien de causalité entre A et C

A présent, démontrons que les intervalle d'espace temps entre A et D et B et C sont des intervalles de genre temps :

Intervalle d'espace temps entre A et D :

$$\Delta s^2 = c^2\Delta t^2 - \Delta l^2 = c^2(t_A - t_D)^2 - (x_A - x_D)^2 = c^2\tau^2 - 0 = c^2\tau^2 = (c\tau)^2$$

Or τ représente le temps nécessaire au train pour parcourir la longueur du tunnel, et le carré de $c\tau$ est forcément une grandeur positive, par conséquent, $\Delta s^2 > 0$ et l'intervalle d'espace-temps entre A et D est un intervalle du genre temps, ce qui signifie qu'on peut avoir un lien de causalité entre ces deux évènements.

Intervalle d'espace temps entre B et C :

$$\Delta s^2 = c^2\Delta t^2 - \Delta l^2 = c^2(t_B - t_C)^2 - (x_B - x_C)^2 = c^2\tau^2 - 0 = c^2\tau^2 = (c\tau)^2$$

Encore une fois, le carré de $c\tau$ est forcément une grandeur positive, par conséquent, $\Delta s^2 > 0$ et l'intervalle d'espace-temps entre B et C est un intervalle du genre temps. On peut donc avoir un lien de causalité entre les évènements.

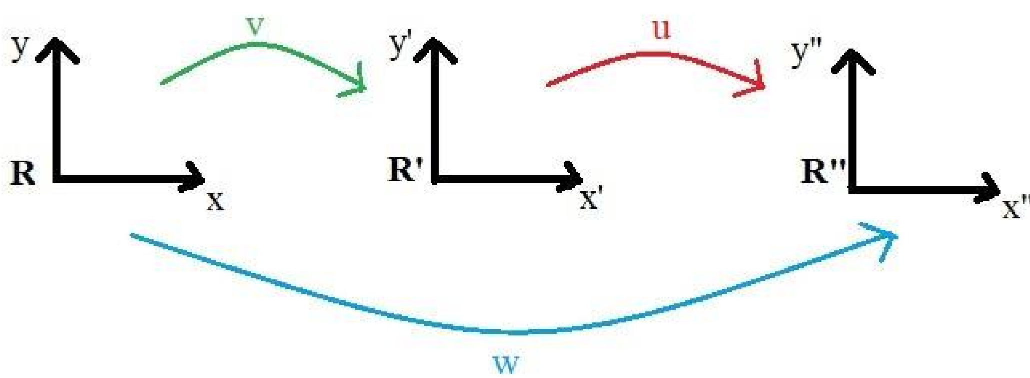
Nous pouvons donc constater que ce problème du train d'Einstein illustre bien la différence de perception des évènements qui peut affecter deux observateurs placés dans des référentiels différents dans des conditions relativistes.

Chapitre 2

Grandeurs Relativistes et Energie

2.1 La loi de composition des vitesses

Soient trois référentiels de l'espace, *R, R'* et *R"*, avec les axes O_x, $O'_{x'}$ et $O"_{x"}$ alignés. *R'* se déplace à la vitesse v par rapport à R selon l'axe Ox et *R"* se déplace à la vitesse u par rapport à *R'* selon l'axe Ox toujours. On note w la vitesse de *R"* par rapport à R.



A t=*0*, les origines des trois référentiels sont confondues.
En mécanique galiléenne, on aurait $w = u + v$.
Voyons si cette relation est toujours vraie en mécanique relativiste.

Démonstration *R"* se déplace à la vitesse u par rapport à *R'*, donc sa position dans *R'* est définie par l'équation $x' = ut'$ (sachant qu'à t'=*0*, les origines des deux référentiels sont confondues).

Grâce aux transformations de Lorentz, on a :

$x = \gamma(x' + \beta ct') = \gamma(x' + vt') = \gamma t'(\frac{x'}{t'} + v) = \gamma t'(u + v)$

$t = \gamma(t' + \beta\frac{x'}{c}) = \gamma(t' + \frac{vx'}{c^2}) = \gamma t'(1 + \frac{uv}{c^2})$

Or w est définie comme étant la vitesse de *R"* dans R donc en divisant la première équation par la seconde on obtient :

$\frac{x}{t} = w = \frac{u+v}{1+\frac{uv}{c^2}}$

On a trouve $w = u \bigoplus v = \frac{u+v}{1+\frac{uv}{c^2}}$.

On remarque que si $u = v = c$, on trouve $w = c$, ce qui est cohérent avec le fait que la vitesse de la lumière soit la même dans tous les référentiels.

On voit ainsi qu'en mécanique relativiste, on ne peut pas simplement additionner les vitesses. Néanmoins, nous allons voir que les rapidités, elles, s'additionnent normalement.

Addition des rapidités On rappelle que la rapidité α est définie par $th(\frac{\alpha}{c}) = \frac{v}{c}$. En divisant l'équation de composition des vitesses par c, on obtient :

$\frac{w}{c} = \frac{\frac{u}{c}+\frac{v}{c}}{1+\frac{u}{c}\times\frac{v}{c}} = \frac{th(\alpha'/c)+th(\alpha/c)}{1+th(\alpha/c)\times th(\alpha'/c)} = th(\frac{\alpha+\alpha'}{c}) = th(\frac{\alpha"}{c})$

Ce qui équivaut à dire que :

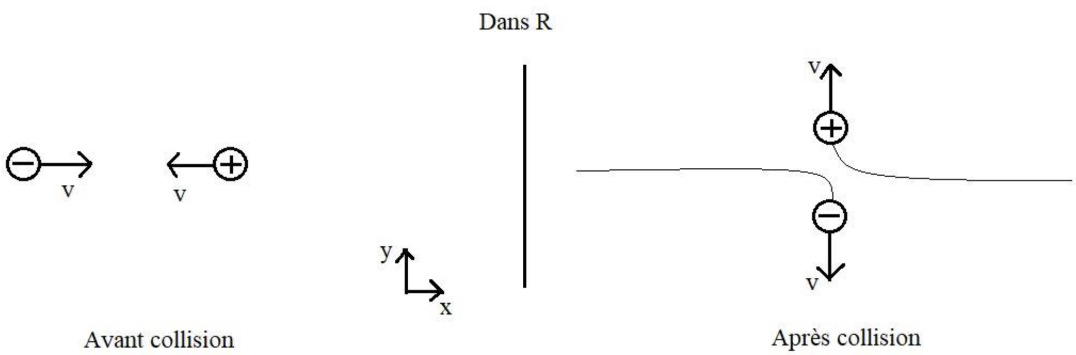
$\alpha" = \alpha + \alpha'$

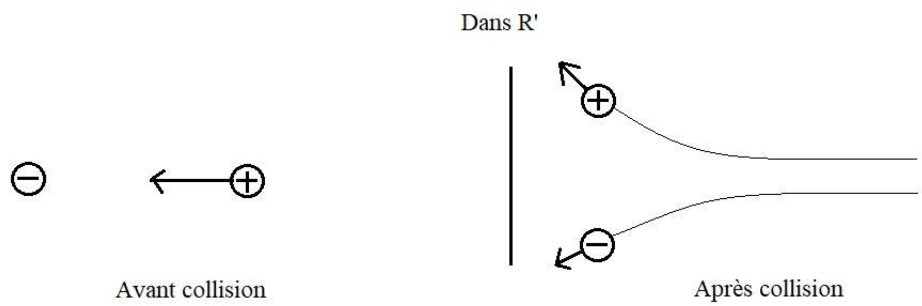
En mécanique relativiste, les rapidités s'additionnent donc normalement.

2.2 La nécessité de la notion d'impulsion

Etudions la conservation de la quantité de mouvement classique en physique relativiste. On rappelle tout d'abord que le vecteur quantité de mouvement $\overrightarrow{p}$ est défini par la relation $\overrightarrow{p} = m\overrightarrow{v}$, avec $\overrightarrow{v}$ le vecteur vitesse de l'objet.

On envisage la collision entre un électron et un positron de même masse dans un référentiel R galiléen, et dans un référentiel *R'* qui se déplace à une vitesse $\overrightarrow{v}$ selon l'axe Ox vers la droite dans R.[1] On considère que les vecteurs $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{x'}$, $\overrightarrow{y} = \overrightarrow{y'}$ et $\overrightarrow{z} = \overrightarrow{z'}$. Avant la collision, les deux particules se rapprochent l'une de l'autre à la même norme de vitesse $||\overrightarrow{v}||$ selon l'axe x dans R. Après la collision, dans R, elles s'éloignent toutes les deux dans des sens opposés, à la même norme de vitesse $||\overrightarrow{v}||$, cette fois suivant l'axe y.





On note v_- la vitesse de l'électron, v_+ celle du positron.

Dans R on a :

Vitesses initiales :

$\overrightarrow{v_{-i}} = v\overrightarrow{x}$

$\overrightarrow{v_{+i}} = -v\overrightarrow{x}$

1. Démonstration inspirée des notes de cours de Simon Vézina sur le site : http ://web-profs.cmaisonneuve.qc.ca/svezina/nyc/note_nyc/NYC_XXI_Chap%204.9a.pdf

Vitesses finales :
$\overrightarrow{v_{-f}} = -v\overrightarrow{y}$
$\overrightarrow{v_{+f}} = v\overrightarrow{y}$

Quantités de mouvement initiales :
$\overrightarrow{p_{-i}} = m\overrightarrow{v_{-i}} = mv\overrightarrow{x}$
$\overrightarrow{p_{+i}} = m\overrightarrow{v_{+i}} = -mv\overrightarrow{x}$

Quantités de mouvement finales :
$\overrightarrow{p_{-f}} = m\overrightarrow{v_{-f}} = -mv\overrightarrow{y}$
$\overrightarrow{p_{+f}} = m\overrightarrow{v_{+f}} = mv\overrightarrow{y}$

On voit bien ici que $\sum \overrightarrow{p_i} = \overrightarrow{0} = \sum \overrightarrow{p_f}$, il y a donc conservation de la quantité de mouvement dans R.

Envisageons maintenant la collision dans R', référentiel qui se déplace à v dans le sens de $\overrightarrow{x}$ par rapport à R.

Valeurs algébriques des vitesses initiales :
en $\overrightarrow{x}$ (selon la formule de composition des vitesses) :
$\overline{v'_{-ix}} = \frac{\overrightarrow{v_{-i}}.+\overrightarrow{v_{R/R'}}}{1+\frac{v_{-i}v_{R/R'}}{c^2}}.\overrightarrow{x} = \frac{v-v}{1-\frac{vv}{c^2}} = 0$
$\overline{v'_{+ix}} = \frac{\overrightarrow{v}_{+i}.+\overrightarrow{v_{R/R'}}}{1+\frac{v_{+i}v_{R/R'}}{c^2}}.\overrightarrow{x} = \frac{-v-v}{1-\frac{vv}{c^2}} = \frac{-2v}{1+\frac{v^2}{c^2}}$

en $\overrightarrow{y}$:
$\overline{v'_{-iy}} = 0$
$\overline{v'_{+iy}} = 0$

au total :
$\overline{v'_{-i}} = 0$
$\overline{v'_{+i}} = \frac{-2v}{1+\frac{v^2}{c^2}}$

Valeurs algébriques des vitesses finales :
en $\overrightarrow{x}$:
$\overline{v'_{-fx}} = \frac{\overrightarrow{v_{-f}}.+\overrightarrow{v_{R/R'}}}{1+\frac{v_{-f}v_{R/R'}}{c^2}}.\overrightarrow{x} = \frac{0-v}{1-\frac{0\times v}{c^2}} = -v$
$\overline{v'_{+fx}} = \frac{\overrightarrow{v_{+f}}.+\overrightarrow{v_{R/R'}}}{1+\frac{v_{+f}v_{R/R'}}{c^2}}.\overrightarrow{x} = \frac{0-v}{1-\frac{0\times v}{c^2}} = -v$

en $\overrightarrow{y}$:
$\overline{v'_{-fy}} = \frac{\overrightarrow{v_{-f}}.+\overrightarrow{v_{R/R'}}}{1+\frac{v_{-f}v_{R/R'}}{c^2}}.\overrightarrow{y} = \frac{-v+0}{1-\frac{0\times v}{c^2}} = -v$
$\overline{v'_{+fy}} = \frac{\overrightarrow{v_{+f}}.+\overrightarrow{v_{R/R'}}}{1+\frac{v_{+f}v_{R/R'}}{c^2}}.\overrightarrow{y} = \frac{v+0}{1+\frac{0\times v}{c^2}} = v$

au total :
$\overline{v'_{-f}} = \sqrt{(v'_{-fx})^2 + (v'_{-fy})^2} = \sqrt{2}v$
$\overline{v'_{+f}} = \sqrt{(v'_{-fx})^2 + (v'_{-fy})^2} = \sqrt{2}v$

Valeurs algébriques des quantités de mouvement initiales :
$\overline{p_{-i}} = m\overline{v'_{-i}} = 0$

$\overline{p_{+i}} = m\overline{v'_{+i}} = -\frac{2mv}{1+\frac{v^2}{c^2}}$
Valeurs algébriques des quantités de mouvement finales :
$\overline{p_{-f}} = m\overline{v'_{-f}} = \sqrt{2}mv$
$\overline{p_{+f}} = m\overline{v'_{+f}} = \sqrt{2}mv$

On a donc ici $\sum \overline{p_i} = -\frac{2mv}{1+\frac{v^2}{c^2}} \neq \sum \overline{p_f} = 2\sqrt{2}mv$. On voit donc ici qu'il n'y a pas conservation de la quantité de mouvement dans un référentiel relatif. Cela veut dire que la quantité de mouvement dépend du référentiel de l'observateur. Pourtant, on a ici retrouvé les vitesses dans *R'* grâce à la formule de composition des vitesses, donc le problème ne devrait pas venir de là.

Il faut donc trouver une formule relativiste $\overrightarrow{p} = m\overrightarrow{v}$ qui permette de conserver p, c'est ce que Poincaré appellera *l'impulsion*. Il revoit ainsi la définition de m dans cette formule, en fait m dépend de la vitesse, ce n'est plus la masse de l'objet, mais son *inertie*. En fait, $m(v) = \gamma m_0$, avec γ le facteur de Lorentz, et m_0 la *masse au repos* de l'objet.

Poincaré définit ainsi *l'impulsion* par $\overrightarrow{p} = \gamma m_0 \overrightarrow{v}$.

2.3 L'énergie propre

On veut trouver la formule qui donne l'énergie propre d'une particule. Pour cela, nous allons avoir besoin de calculer la norme hyperbolique du quadrivecteur impulsion $P = (E\,,\, c\overrightarrow{p})$. Mais tout d'abord, faisons un point rapide sur les quadrivecteurs.

Quadrivecteur

Soit A un vecteur de quatre grandeurs numériques liées à un évènement. Pour les mesurer, il faut le faire par rapport à un référentiel, on représentera alors cela par un vecteur colonne :

Dans R : $A_R = \begin{pmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix}$ Dans R' : $A_{R'} = \begin{pmatrix} A'_0 \\ A'_1 \\ A'_2 \\ A_{'3} \end{pmatrix}$

A_R et $A_{R'}$ mesurent des grandeurs intrinsèques de l'évènement s'ils sont liés par les transformations de Lorentz tel que $A_R = \mathscr{L}(v)\, A_{R'}$, avec $\mathscr{L}(v)$ la *matrice de Lorentz* $\begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Cette grandeur est alors appelée *quadrivecteur* ou *tenseur*. C'est le cas du quadrivecteur position d'une particule : $M_R = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ dans R et $M_{R'} = \begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ dans *R'* avec $M_R = \mathscr{L}(v) \times M_{R'}$.

De manière générale : $(\mathscr{L})\ :\ x^\alpha = (ct\ ;\ \overrightarrow{r}) = (ct\,;\, x\,;\, y\,;\, z)$

Pour obtenir un quadrivecteur vitesse de la particule, il nous faut non pas dériver le quadrivecteur position par rapport à t, mais par *rapport* à *t'*, le temps propre de la particule en question.

Envisageons que la particule concernée se déplace dans R et lions y un référentiel *R'* en translation uniforme de vitesse $\overrightarrow{v}$ par rapport à R. Pendant une durée infinitésimale dt $\overrightarrow{v}$ ne change pas : ainsi *R'* est bien en translation uniforme par rapport à R pendant dt. Dans *R'*, la particule est immobile puisqu'elle est liée à ce référentiel. Ainsi la conservation de l'intervalle donne :

$ds^2 = c^2dt^2 - v^2dt^2 = c^2dt'^2 - 0 \times dt'^2$.

On a donc :

$dt'^2 = dt^2 - \frac{v^2}{c^2}dt^2 = (1 - \frac{v^2}{c^2})dt^2$.

Ainsi, on retrouve la formule :

$\frac{dt}{dt'} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \gamma$ avec γ le facteur de Lorentz.

En dérivant le quadrivecteur position par rapport à *t'* le temps propre de la particule avec : $\frac{d}{dt'} = \gamma\frac{d}{dt}$ on obtient donc le quadrivecteur vitesse de cette particule :
$v^\alpha = \frac{dx^\alpha}{dt}\gamma = (\gamma c\,,\,\gamma\overrightarrow{v})$ avec $\overrightarrow{v} = \frac{d\overrightarrow{r}}{dt}$
En effet, si on dérive la relation $M_R = \mathscr{L}(v) \times M_{R'}$ par rapport au temps propre de la particule, on obtient :
$\frac{d}{dt'}(M_R) = \frac{d}{dt'}(\mathscr{L}(v) \times M_{R'}) = \mathscr{L}(v) \times \frac{d}{dt'}(M_{R'})$ puisque $\mathscr{L}(v)$ est à coefficients constants.
On trouve donc $U_R = \mathscr{L}(v) \times U_{R'}$. Or $U_R = \frac{d}{dt'}(M_R) = \frac{d}{dt}(M_R) \times \frac{dt}{dt'} = \gamma\frac{d}{dt}(M_R)$.

On a ainsi $U_R = (\gamma c\,;\,\gamma\overrightarrow{v_R}) = (\gamma c\,;\,\gamma v_x\,;\,\gamma v_y\,;\,\gamma v_z)$.

Si l'on calcule sa norme hyperbolique on trouve :
$||U_R||^2 = \gamma^2c^2 - \gamma^2v^2 = \gamma^2(c^2 - v^2) = c^2\gamma^2(1-\frac{v^2}{c^2}) = c^2 \times \frac{1-\frac{v^2}{c^2}}{1-\frac{v^2}{c^2}} = c^2$ qui est invariant.
Cela, combiné à la relation $U_R = \mathscr{L}(v) \times U_{R'}$ montre bien que nous avons affaire à un tenseur, c'est-à-dire qu'il mesure des grandeurs intrinsèques de l'événement.

Quadrivecteur impulsion-énergie

Revenons maintenant à l'impulsion. On a vu que Poincaré a défini cette notion car la quantité de mouvement ne se conservait pas d'un référentiel à l'autre. Or pour qu'une grandeur comme l'impulsion se conserve lors d'un changement de référentiel, il faut, comme nous venons de le voir, qu'elle soit de nature tensorielle. Ainsi, Poincaré eut l'idée de multiplier le quadrivecteur vitesse d'une particule par m_0c, avec m_0 la masse au repos de la particule, afin de lui donner la dimension d'une énergie et donc d'obtenir le quadrivecteur *impulsion-énergie* :
$P_R = (E\,,\,c\overrightarrow{p})$ avec $E = \gamma m_0c^2$ l'énergie de la particule et $\overrightarrow{p_R} = \gamma m_0\overrightarrow{v}$ l'impulsion de la particule dans R.
On calcule maintenant la norme hyperbolique de P *:*
$||P||^2 = E^2 - c^2||\overrightarrow{p}||^2 = m_0^2c^4\gamma^2(1-\beta^2) = m_0^2c^4 \times \frac{1-\beta^2}{1-\beta^2} = m_0^2c^4 = E_0^2$
On retrouve, pour tout v, l'énergie propre E_0. Ainsi, l'énergie propre est un *invariant* de la théorie de la relativité restreinte. Cela prouve donc d'une part, que la masse au repos de la particule ne dépend pas du référentiel, et d'autre part, que P_R est bien un tenseur.

2.4 Équivalence masse-énergie

Intéressons-nous maintenant à la démarche d'Einstein. Soit une particule de masse m se déplaçant dans un référentiel R. On suppose que sa masse dépend de la vitesse, $m = m(v)$, et qu'elle est liée à l'énergie par la relation $E = mc^2$. Ainsi m dépend du temps donc : $\frac{dE}{dt} = \frac{dm}{dt} \times c^2$. Or $\frac{dE}{dt}$ est la puissance de la particule donc $\frac{dE}{dt} = \overrightarrow{f}.\overrightarrow{v}$ avec $\overrightarrow{f}$ la somme des forces subies par la particule.

En appliquant le Principe Fondamental de la Dynamique, on obtient : $f = \frac{d\overrightarrow{p}}{dt} = \frac{d(m\overrightarrow{v})}{dt}$ avec $\overrightarrow{p}$ le vecteur impulsion.
Ainsi :
$\frac{dm}{dt} \times c^2 = \frac{d(m\overrightarrow{v})}{dt}.\overrightarrow{v}$

En multipliant par $2m$ chaque membre de l'équation on obtient :
$2m\frac{dm}{dt} \times c^2 = 2\frac{d}{dt}(m\overrightarrow{v}).m\overrightarrow{v}$

Or, on voit là qu'on peut intégrer par rapport au temps des deux côtés pour obtenir :

$m^2c^2 = m^2v^2 + constante$

Pour trouver la constante on regarde la particule au repos, c'est-à-dire quand $v = 0$. On a alors : $m_0^2c^2 = 0 + constante$ donc la constante vaut $m_0^2c^2$.

Ainsi :
$m^2c^2 = m^2v^2 + m_0^2c^2$

De là, on obtient $m^2(1 - \frac{v^2}{c^2}) = m_0^2$ et donc :
$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \gamma m_0$

On retrouve donc la formule de l'inertie, soit la masse dépendant de la vitesse, ainsi que l'impulsion relativiste $\overrightarrow{p} = m\overrightarrow{v} = \gamma m_0 \overrightarrow{v}$.

Aussi, en multipliant les deux membres de l'équation $m^2c^2 = m^2v^2 + m_0^2c^2$ par c^2, on obtient :
$m^2c^4 = c^2 \times m^2v^2 + m_0^2c^4$ soit $E^2 = c^2p^2 + E_0^2$.

On retrouve donc, grâce à l'équivalence masse-énergie $E = mc^2$ la masse relativiste, l'énergie et l'impulsion.

Conséquences de l'équivalence $E = mc^2$

On voit que grâce à cette relation, on peut obtenir une immense quantité d'énergie à partir de très peu de matière. Pour donner un ordre d'idée : en 2017, 529.4 TWh d'électricité ont été produites en France, dont 71.6% grâce au nucléaire, soit 379 TWh. Pour fournir une énergie égale à 379 TWh, ***il n' y a besoin que de 15kg de matière,*** recoltés grâce à la fission nucléaire. Une autre application de cette équivalence fut la bombe A, qui ravagea Hiroshima et Nagasaki respectivement les 6 et 9 août 1945. Devant l'incroyable puissance de cette arme, Einstein lui-même dira : "Je ne sais pas avec quelles armes on combattra à la Troisième Guerre Mondiale, mais pour la Quatrième, ce sera avec des cailloux et des bâtons."

Interrogations induites par les résultats de la Théorie de la Relativité Restreinte

La théorie de la relativité restreinte a bouleversé notre conception humaine de la réalité et soulève de grandes questions philosophiques, que nous tenterons d'exposer dans ce qui suit.

A propos du Temps

Au cours de notre étude, nous sommes arrivés à la conclusion que la perception du temps dépendait du point de vue de celui qui l'étudie.

Le temps, comme l'espace, perd son statut de grandeur absolue que la mécanique classique, par Newton, leur conférait. Nous nous trouvons à présent dans une situation inconfortable car nouvelle pour nous, qui subissons dans notre réalité le temps et l'espace comme étant invariants. Nous pouvons alors nous demander si le temps existe réellement : ce dernier ne se matérialisant pas, nous n'avons finalement aucun moyen de prouver son existence. Nous en voyons les effets, mais se pourrait-il que le temps ne soit qu'une déformation de notre perception du monde ? Est-il infini ?

Nous avons vu que les distances temporelles n'étaient pas les mêmes en fonction des référentiels . Elles sont mises en relation par l'expression :

$\mathit{\Delta} t' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \mathit{\Delta} t = \gamma \Delta t.$

A présent, imaginons un monde se déplacant à une vitesse très proche de c par rapport à nous. Le facteur γ de $\mathit{\Delta} t$ deviendrait infiniment grand, et donc les distances temporelles $\mathit{\Delta} t'$ dans ce monde seraient infiniment grandes. Comment évoluerait ce monde ? Evoluerait-t-il, d'ailleurs ?

A propos de l'Espace

Concernant les distances, qui sont en fin de compte étroitement liées au temps, des paradoxes ont également été relevés.

Premièrement, les longueurs dépendent, comme les distances temporelles, du point de vue de l'observateur. La même question se pose à propos de la réalité. Cependant, des études concernant notre définition même de l'espace remettent en cause son caractère absolu d'une part, et notre concept de la vérité de l'autre.

Depuis le XIXème siècle Riemann et Poincaré se sont aperçus que l'on pouvait définir une géométrie mais qu'il est nécessaire d'avoir d'abord un espace, un ensemble dans lequel nous allons pouvoir savoir ce qu'on calcule et ce que l'on mesure. Dans ce contexte, on peut penser qu'il est nécessaire d'avoir des prémices avant tout raisonnement comme dans le cas de la géométrie. Pour toute preuve scientifique il est nécessaire d'avoir une base, permettant de nous guider vers le chemin voulu. Cette base est beaucoup plus restrictive en physique, puisqu'elle part d'hypothèses empiriques. Cependant, les mathématiques ont plus de liberté, car les hypothèses sont fixées par l'esprit humain, permettant d'explorer plus de possibilités que n'en offrent nos sens. Elles ont cette particularité de transcender notre réalité.

Le rôle de la science et la nature de la vérité

Finalement, qu'est-ce que la science ? Ne serait-ce pas une tentative de l'être humain de décrire de façon purement objective la nature telle que nous pouvons la percevoir ?

À notre avis, la science caractérise l'analyse de notre perception. Elle repose sur la tentative de l'Homme de poser des modèles dans le but d'expliquer ce qu'on voit et prévoir ce que l'on va voir. Quand Albert Einstein déclare : *"Ce qui reste éternellement incompréhensible dans la nature, c'est qu'on puisse la comprendre"*, il s'émerveille ici de ce que la logique humaine lui permette de décrire la nature. Jusqu'ici, en se basant sur des hypothèses admises liées à notre vision de la nature, nous avons réussi à décrire bien des phénomènes en construisant (et parfois en déconstruisant) des raisonnements logiques aboutissant à l'établissement de lois prédictives qui se vérifient expérimentalement. Cependant, si tout cela est lié à notre perception, il est tout à fait possible qu'une autre forme d'intelligence ayant une réalité différente de la nôtre, construise des modèles différents des nôtres pour la décrire.

Soulignons au passage une particularité de l'intelligence humaine qui est son caractère réflexif, imaginant qu'il puisse y avoir un autre point de vue que le sien. Dans le cadre de la recherche scientifique, cela constitue un avantage pour nous, puisque le dialogue entre savants, à grand renfort d'arguments, de contestations, de critiques autant positives que négatives, nous a permis d'arriver au stade de connaissance que nous avons aujourd'hui. Cependant cette réflexivité qui nous est propre nous conduit à nous interroger sur la légitimité de notre définition de la vérité. En effet, nous appelons vérité la conformité de l'intelligence avec la réalité. Mais ce que nous montre cette théorie de la relativité, c'est justement qu'il n'y a pas qu'une seule réalité. Nous voilà donc bien attrapés, puisque nous ne savons plus ce qui est vrai et ce qui ne l'est pas. Une nouvelle question se pose : existe-t-il une vérité universelle, ou bien la vérité est-elle en fait comme la réalité, dépendante de la perception de celui qui l'étudie ?

Certains pensent que le rôle et l'essence de la science est justement de trouver la réponse à cette question. D'autres ne verront pas l'utilité d'une telle mission et décident qu'après tout, la science doit être efficace et donc se cantonner à ce qui nous est utile, à savoir notre propre réalité. Mais, comme nous l'avons dit précédemment, si les mathématiques transcendent notre réel, ne devrions-nous pas aller dans ce sens pour éclaircir cette question sur la vérité ?

Nous conclurons cette partie et ce rapport par cette citation d'Henri Poincaré, qui fut un des pères fondateurs de la Théorie de la Relativité Restreinte :

"Le monde et la science ont leurs données propres, qui se touchent et ne se pénètrent pas. L'une nous montre à quel but nous devons viser, l'autre, le but étant donné, nous donne les moyens de l'attendre."

Bibliographie

- « **L'aventure de la relativité Restreinte** », Mai 2018, Guillaume Duval.
- « **Relativité Restreinte, Bases et applications** », Mars 2016, Claude Semay, Bernard Silvestre-Brac, Ed. Dunod
- « **La Théorie de la relativité restreinte et générale** » , Octobre 2012, Albert Einstein, Ed. Dunod
- « **Science et Méthode** », 1908, Henri Poincaré
- « **Die Grundgleichungen für die elektromagnetischen Vorgänge in bewegten Körpern. Königliche Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, mathematisch–physikalische Klasse** », 1908, Hermann Minkowski, traduction française par Paul Langevin, « **Les équations fondamentales des phénomènes électromagnétiques dans les corps en mouvement** », 1908
- « **Introduction à la relativité restreinte : cours et exercices corrigés** », 2001, Livre de Jean Hladik et Michel Chrysos, Ed. Dunod
- Notes de cours de Simon Vézina sur le site : http ://webprofs.cmaisonneuve.qc.ca/svezina/nyc/note_nyc/NYC_XXI_Cha
-Bilan énergétique en France : https ://www.connaissancedesenergies.org/bilan-electrique-de-la-france-que-retenir-de-2017-180215

Annexe

ANNEXE 1 : Démonstration de l'intervalle d'espace-temps entre B et D et A et C :

$$\Delta s^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta l^2$$

$$\Delta s^2 = c^2 (t_B - t_D)^2 - (x_B - x_D)^2$$

$$\Delta s^2 = c^2 \tau^2 - L^2$$

$$\Delta s^2 = c^2 \left(\frac{L - L'}{v} \right)^2 - L^2$$

$$\Delta s^2 = \frac{c^2}{v^2} (L - L')^2 - L^2$$

$$\Delta s^2 = \left(\frac{1}{\beta} \right)^2 (L - L')^2 - L^2$$

$$\Delta s^2 = \left(\frac{1}{\beta} \right)^2 \left(L^2 - 2LL' + L^{'2} \right) - L^2$$

$$\Delta s^2 = \left(\frac{L}{\beta} \right)^2 - \frac{2LL'}{\beta^2} + \left(\frac{L'}{\beta} \right)^2 - L^2$$

Or $L' = \frac{L}{\gamma}$ on à donc :

$$\Delta s^2 = \left(\frac{L}{\beta} \right)^2 + \left(\frac{L}{\gamma\beta} \right)^2 - \frac{2L^2}{\gamma\beta^2} - L^2$$

$$\Delta s^2 = \left(\frac{L}{\beta} \right)^2 \left(1 + \frac{1}{\gamma^2} - \frac{2\gamma}{\gamma^2} - \beta^2 \right)$$

Or $\beta = 1 - \gamma^2$ ainsi :

$$\Delta s^2 = \left(\frac{L}{\beta} \right)^2 \left(\frac{2}{\gamma^2} - \frac{2\gamma}{\gamma^2} \right)$$

$$\Delta s^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta l^2 = \left(\frac{L}{\beta} \right)^2 \left(\frac{2(1-\gamma)}{\gamma^2} \right)$$