

Introduction à la Relativité Restreinte



Étudiants :

Gael HUBER
Guillaume ROUSSEL
Pierre HELLARD

Guirec DE ROTALIER
Jules FOUACHE
Yazid BARRADOUANE

Enseignant-responsable du projet :

Guillaume DUVAL

Date de remise du rapport : 18/06/2018

Référence du projet : STPI/P6/2018 – 027

Intitulé du projet : Introduction à la Relativité Restreinte

Type de projet : théorique

Objectifs du projet : L'objectif de ce projet est de comprendre pourquoi il a fallu remettre en question les transformations de Galilée et ainsi aboutir à la théorie de la relativité restreinte, ainsi que de démontrer les équations de changement de repère de cette théorie, équations qui composent le fondement de la relativité restreinte.

Mots-clefs du projet : *Repère Galiléen, Transformations de Lorentz, Relativité*

Table des matières

Introduction	4
1 Méthodologie, organisation du travail	5
2 Travail réalisé et résultats	7
2.1 Historique de la théorie de la relativité restreinte	7
2.1.1 Premiers questionnements sur la lumière	7
2.1.2 L'expérience de Galilée	8
2.1.3 L'expérience de Cassini	9
2.1.4 Une autre expérience déterminante : celle de FIZEAU	11
2.1.5 Michelson-Morley	13
2.2 Les transformations de Lorentz-Poincaré	17
2.2.1 Relativité Galiléenne et électromagnétisme	17
2.2.2 Remise en question des théories	20
2.2.3 Nouvelles hypothèses	21
2.2.4 Présentation des transformations	22
2.3 Des rotations hyperboliques aux transformations de Lorentz	23
Conclusion et perspectives	26
Bibliographie	27
A Autre démonstration des transformations de Lorentz	30
B Fonction Tangente Hyperbolique	33

Introduction

- Depuis le début de nos études, nous avons toujours travaillé en mécanique dite « classique », c'est à dire la mécanique newtonienne. En effet, cette théorie donne une explication satisfaisante du réel pour un grand nombre de phénomènes physiques. Néanmoins, lorsqu'on s'occupe de phénomènes plus complexes, qui ont des vitesses très élevées, des incohérences entre la théorie et l'expérience surviennent. Ainsi, après les théories de Newton, vint la théorie de la relativité restreinte, après des années de travail par de très nombreux chercheurs, qui explique plus précisément notre monde.
- Aujourd'hui la théorie de la relativité restreinte a été remplacée par la théorie de la relativité générale, néanmoins on y retrouve la majorité des concepts de la relativité restreinte et ainsi pour pouvoir approcher la relativité générale, il faut déjà maîtriser la relativité restreinte. Tel est l'objectif de ce projet, découvrir et comprendre la relativité restreinte, ses conséquences étranges, ainsi que le raisonnement des grands physiciens qui ont permis de créer cette théorie.

Chapitre 1

Méthodologie, organisation du travail

- Nous avons une contrainte de taille pour ce rapport : il devait faire moins de vingt pages. Ainsi pour éviter de dépasser cette limite, nous avons divisé le travail entre les deux groupes qui ont travaillé sur la relativité restreinte. Ainsi, notre groupe a travaillé sur la première partie de notre sujet, c'est à dire des découvertes historiques sur la lumière jusqu'aux transformations de Lorentz. Pour avoir plus d'informations sur la répartition entre les 6 membres de notre groupe, nous vous renvoyons à notre organigramme.

Par ailleurs, pour que ce projet se passe dans de bonnes conditions pour chaque membre du groupe, nous avons mis en place un drive sur lequel nous partageons les parties que chacun a rédigé, et également quelques outils pour que la répartition du travail soit la plus homogène. En effet, nous avons mis en place un tableur sur lequel chacun d'entre nous remplissait les références de ses sources, de plus nous avons utilisé un autre tableur sur la fin de l'année pour savoir comment nous allions nous répartir le travail. Concernant l'organisation de notre travail à proprement parler, chaque semaine un groupe de deux à trois personnes faisait un exposé aux autres élèves sur certaines notions de la relativité restreinte. Très souvent les groupes avaient besoin de plusieurs cours pour finir leur exposé. Ces exposés ont été la base de rédaction de notre rapport.

Dans notre groupe, nous avons tous participé à la rédaction du rapport sur Latex, en effet après qu'une personne ait présentée son exposé, elle le transcrivait sur Latex, et si un exposé était fait uniquement par des élèves de l'autre groupe, nous nous divisions le travail pour insérer cet exposé dans notre rapport. Celui-ci a été relu plusieurs fois, par tous les membres du groupe ainsi que par Mr Duval à deux reprises pour éviter au maximum les erreurs et les incompréhensions pour le lecteur.

Enfin, en parallèle de ce rapport d'une quinzaine de pages, les deux groupes participant à la thématique "introduction à la théorie de la relativité" ont tout de même rendu un rapport complet sur la relativité restreinte à Mr Duval. Si cela vous intéresse nous vous invitons à le contacter.

— Organigramme des tâches réalisées et des étudiants concernés

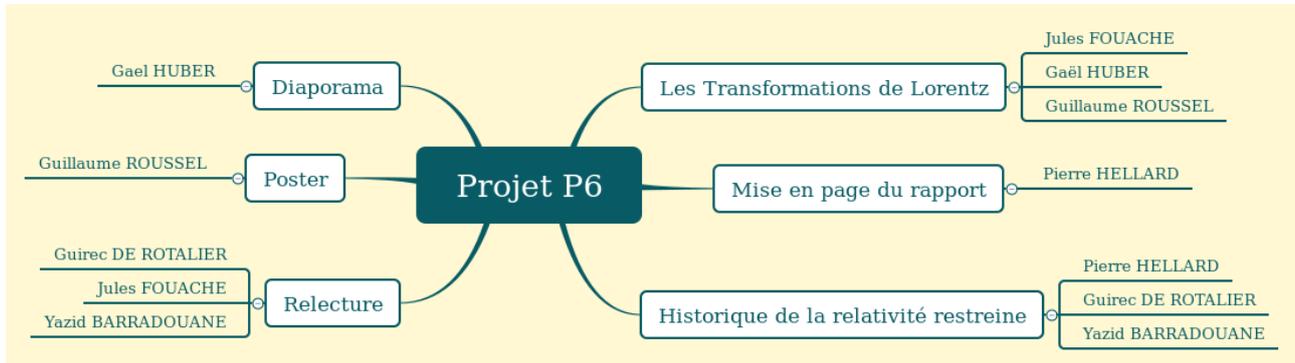


FIGURE 1.1 – Organigramme des tâches réalisées

Chapitre 2

Travail réalisé et résultats

2.1 Historique de la théorie de la relativité restreinte

A travers cette partie, nous allons retracer les événements et différentes découvertes historiques qui ont mené à la théorie de la relativité restreinte. Ainsi, nous nous intéresserons plus particulièrement à la lumière, sa nature, sa vitesse et son mode de propagation qui ont intrigué pendant des siècles de nombreux physiciens et mathématiciens.

Tout d'abord, donnons quelques chiffres sur cette entité : en 1 seconde, la lumière parcourt 299 792 km et 158 m. Il lui faut seulement 8 minutes et 13 secondes pour parvenir du soleil jusqu'à nous. Un peu plus de 4 ans depuis Proxima du centaure l'étoile la plus proche du système solaire et à peine un milliardième de seconde pour aller d'un écran que l'on regarde à nos yeux. 300 000 km/s, cela va très vite ; tellement vite que durant des milliers d'années, les hommes ont cru que la lumière était instantanée. Pour eux elle ne se déplaçait pas : il n'y en avait ou il n'y en avait pas.

Mais pourquoi se sont-ils tant intéressés à la lumière ? Au cours de l'histoire, 2 théories se faisaient face : certains savants pensaient que la vitesse avait une propagation, vitesse instantanée tandis que d'autres pensaient que celle-ci pouvait être mesurable. Encore au 17ème siècle, certains savants comme Kepler ou Descartes croyaient que la propagation était instantanée. Car en effet, celle-ci est bien mesurable et cette caractéristique essentielle n'aurait pas permis toutes les avancées technologiques d'aujourd'hui si elle n'avait pas été découverte, et ce, grâce à l'empilement des découvertes de certains physiciens. Ainsi, au fil de l'histoire, de nombreuses idées et intuitions virent le jour.

2.1.1 Premiers questionnements sur la lumière

Tout commence dans l'Antiquité, période durant laquelle les savants ont commencé à s'intéresser à la lumière et à sa propagation. La majorité de ceux-ci pensaient que la lumière ne se propageait pas mais était instantanée. Toutefois, d'autres savants, pensaient que la lumière avait une vitesse finie, c'est à dire une vitesse de propagation dans le vide. En effet, Empédocle, un ingénieur et philosophe grec du Vème siècle avant JC, élaborait une théorie dans laquelle la vision repose sur la rencontre de 2 feux : un issu des yeux et un autre issu de l'objet observé. De plus, il a admis que la lumière venant du Soleil traversait tout l'espace avant d'arriver à notre œil. Ainsi, il pensait que la lumière n'était pas instantanée et avait une vitesse de propagation finie (cad. qu'on peut mesurer). Cependant, cette intuition n'a pas fait de poids face à celle d'Aristote, admise à l'époque par la plupart des scientifiques et des savants. Aristote pensait que la lumière était une propriété d'un objet et non un mouve-

ment.

Il fallu attendre le XI^{ème} siècle pour que l'intuition d'Empédocle soit reprise par d'autres savants. Cette fois-ci, ce sont les savants perses Ibn Sina, Al Biruni, et enfin Alhazen qui se penchèrent sur la question. C'est surtout ce dernier qui a insisté sur l'intuition d'Empédocle car il fit référence à celle-ci dans ces différents traités d'optique. Alhazen est en effet le premier savant dans l'Histoire de la science à avoir découvert le phénomène de la réfraction. Il l'explique en plongeant un bâton dans l'eau ; et celui-ci nous paraît cassé quand on regarde le dessus de l'eau. Ce phénomène va le conduire à douter de l'instantanéité de la lumière. Il a ainsi une intuition : il pense que la lumière a une vitesse de propagation. Hélas, il ne pourra rien prouver et sa géniale intuition ne restera...qu'une intuition. Ainsi, sa théorie ne s'est pas fortement opposée à l'idée d'Aristote.

Ce débat sur la propagation de la vitesse de la lumière a ensuite été repris dans le monde chrétien au XIII^{ème} siècle avec tout d'abord Robert Grosseteste, un religieux anglais qui a pensé que la lumière était émise par l'œil. Il s'opposa ainsi aux grandes intuitions qui ont précédé son temps.

Au même siècle, un philosophe et savant anglais, Roger Bacon, repris l'idée d'Empédocle et s'opposa à celle d'Aristote. Il pensait que la lumière était à la fois émise, et reçue par l'œil. Dans son livre *Perspectiva*, il annonce son intuition : la lumière a une vitesse finie. Il pensait qu'avec l'instantanéité de la lumière (à laquelle il s'opposait), il y aurait un instant sans temps, car le temps n'existe pas sans mouvement ; et l'instant sans le temps est impossible. Il compara ceci à un point sans ligne (la ligne correspondant au temps dans sa comparaison). Le débat continua dans le monde chrétien avec John Peckham. Celui-ci pensait que la lumière était seulement reçue par l'œil et qu'elle avait une vitesse finie. Ainsi, nous pouvons remarquer que l'intuition ou l'idée de John Peckham était la plus proche de la découverte de Römer, qui a été réalisée plus tard, à la fin du XVII^{ème} siècle. Néanmoins, celle de Bacon, même si elle n'était pas prouvée, s'appuyait sur un argument solide s'opposant à l'instantanéité de la vitesse de la lumière.

2.1.2 L'expérience de Galilée

Malgré toutes ces intuitions et idées, qui présentaient la vitesse de la lumière comme étant finie, certains savants comme Kepler et Descartes, ont continué à croire en l'instantanéité de la lumière avant le XVII^{ème} siècle. Cela paraît étrange venant de Descartes, car ce physicien français avait déjà découvert les lois de la réfraction. Il n'était toutefois pas convaincu par la propagation de la lumière. Selon lui, "l'univers était empli d'une matière qui transmettait la "pression" engendrée par les corps lumineux. Les théories issues du cartésianisme vont attribuer à la lumière une nature purement cinétique : la lumière n'est pas un corps particulier qui se déplace mais c'est un mouvement spécifique au sein d'un milieu, appelé éther lumineux , qui emplit l'espace" (extrait de la page 4 de "INTRODUCTION A LA RELATIVITE RESTREINTE de Jean Hladik et Michel Chrysos)

Bien avant ces avancées scientifiques , Galilée, lui, pensait que la lumière avait une vitesse finie ; et avait déjà tenté de mesurer cette vitesse en 1610. C'est un des premiers savants à s'intéresser (grâce notamment à l'avènement de la science expérimentale) à cette caractéristique de la lumière et il chercha donc à calculer cette vitesse. Il relate son expérience dans le livre « Discours Et Démonstrations Mathématiques Concernant Deux Sciences Nouvelles ».

Pour résumer, il demanda à 2 personnes de se placer en haut de deux collines assez éloignés pour qu'ils effectuent des signaux lumineux à l'aide d'une lanterne en masquant et

démasquant ces dernières : l'un démasquant sa lanterne aussitôt qu'il apercevait le signal de l'autre lanterne. En effet, un décalage entre les 2 observations, du fait du temps d'aller et de retour de la lumière, pouvait alors indiquer que la vitesse était finie et permettre de la mesurer. Mais, le succès ne fut pas au rendez-vous : en effet, l'expérience était bien trop rapide pour pouvoir la mesurer avec les moyens de l'époque (et même encore aujourd'hui). Galilée en a donc conclu la même chose que Descartes : la lumière se propage de manière instantanée.

Cependant, dès janvier 1610, Galilée et Simon Marius ont découvert les quatre gros satellites de Jupiter, résultat qui sera déterminant pour la progression du calcul de la vitesse de la lumière. En effet, sans ceux-ci, Römer n'aurait jamais pu exposer sa théorie qui marquera l'histoire de la physique.

2.1.3 L'expérience de Cassini

En effet, bien que Cassini l'ait mentionné en 1er, c'est l'astronome danois Ole Römer qui découvrit la vitesse de la lumière. Précisons que Römer était un partisan de la propagation successive de la lumière. En 1672, alors qu'il est à Paris, il profite de son séjour pour avancer dans ses recherches en repartant de l'idée de Descartes et de la vérifier sur les satellites de Jupiter (d'où l'importance de la découverte de Galilée).

Rappelons quelle est cette idée : Descartes, qui, dans le cadre de sa théorie d'un éther mécanique croyait à la propagation instantanée, objecta que si la vitesse de la lumière était finie, comme Galilée avait tenté de le démontrer, alors les éclipses de lune se produiraient avec avance ou retard (car la distance Lune-Terre n'est pas constante). Or les éclipses se produisaient au moment prévu, donc la propagation était, selon lui, instantanée.

Avant de procéder à la démonstration, rappelons quelques définitions importantes :

-révolution : La révolution ou mouvement de révolution est, en mécanique céleste, un mouvement de translation périodique, circulaire ou elliptique. La période de révolution, aussi appelée période orbitale, est la durée mise par un astre pour accomplir une révolution complète autour d'un autre astre (par exemple une planète autour du Soleil ou un satellite autour d'une planète).

-Émersion : Réapparition d'un astre qui était éclipsé. L'immersion est donc le processus inverse.

Étudions désormais la démonstration de Römer (voir Figure 2.1) : On dessine tout d'abord le Soleil que l'on nomme S et Jupiter que l'on nomme J à l'opposé.

On dessine ensuite le mouvement réalisé par le satellite Io de Jupiter. Celui-ci va dans le sens trigonométrique. D'ailleurs selon Kepler, ce mouvement était régulier autour de l'axe. Mais il a ensuite été prouvé que celui-ci était irrégulier. En C, le satellite entre dans l'ombre de Jupiter et en sortira en D (émersion). On dessine ensuite le parcours de la Terre qui tourne en orbite autour du Soleil. On place ensuite les points E, F, G, H, K et L qui représentent différentes positions de la Terre dans le sens du mouvement autour du soleil (horaire) et qui sont donc des points où la distance avec Jupiter n'est pas la même.

On suppose ensuite que la Terre se trouve en K et qu'on observe une émersion du satellite en D. Puis, Römer a montré qu'après une révolution complète du satellite Io autour de Jupiter, soit à peu près 42,5 h plus tard ; la Terre se trouve désormais au point L lors du passage suivant du satellite au point D. Si la lumière met un certain temps à parcourir la distance KL, il est ainsi évident que l'émersion du satellite se fera un peu plus tard que si

la Terre avait été en K . De même de l'autre côté : la Terre se rapprochant de Jupiter, les immersions successives apparaîtront au contraire beaucoup plus rapidement à mesure que la Terre s'approche de Jupiter.

Römer a ainsi par cette démonstration, calculé un retard de 22 minutes entre le point H et le point E Comme son collègue Jean-Dominique Cassini à l'observatoire de Paris avant lui, Römer avait remarqué de curieux décalages dans la périodicité des éclipses de Io qui se produisait tantôt avec du retard tantôt avec de l'avance, selon que Jupiter était éloignée ou proche de la Terre au cours de son mouvement autour du Soleil.

« Il trouva d'abord qu'au bout d'une révolution de Io, le premier satellite, on n'observait pas de retard sensible, bien que la distance de la Terre à Jupiter ait varié de plus de 210 diamètres terrestre. Mais pour une variation de distance nettement plus grande, il trouva que 40 révolutions observés lors d'une quadrature étaient plus courtes que 40 autres observées lors de la quadrature suivante. Il en déduisit que quand Jupiter est en conjonction, sa lumière doit, pour nous parvenir, mettre 22 minutes de plus pour parcourir une distance supplémentaire par rapport à l'opposition, égale au diamètre de l'orbite terrestre. »

Cassini avait déjà envisagé que ce phénomène pouvait être dû à une vitesse finie pour la lumière avant de rejeter l'hypothèse, constatant qu'on ne voyait rien de similaire avec les autres lunes de Jupiter (on découvrira bien plus tard que le phénomène apparaît aussi sur les autres satellites, mais moins visiblement car ils sont moins rapides).

Römer ne fut pas arrêté pas cette constatation mais, connaissant les imprécisions sur les déterminations du rayon de la Terre qui se répercutaient sur les estimations des distances dans le Système solaire, ne donnera pas une valeur précise de la vitesse de propagation de la lumière dans le vide. Sa démonstration parut dans "Le journal des sçavans" du 9 décembre 1676 et il prouva ainsi la "propagation successive" de la lumière.

Mais c'est finalement le physicien, astronome et mathématicien hollandais Christian Huygens qui donna la première estimation de la vitesse de propagation de la lumière dans le vide dans son Traité de la Lumière : environ 200 000 km/s. La valeur admise actuellement, ou plus exactement fixée par définition est de 299.792,458 km/s dans le vide. Notons qu'elle est différente, et moins grande, dans les milieux matériels.

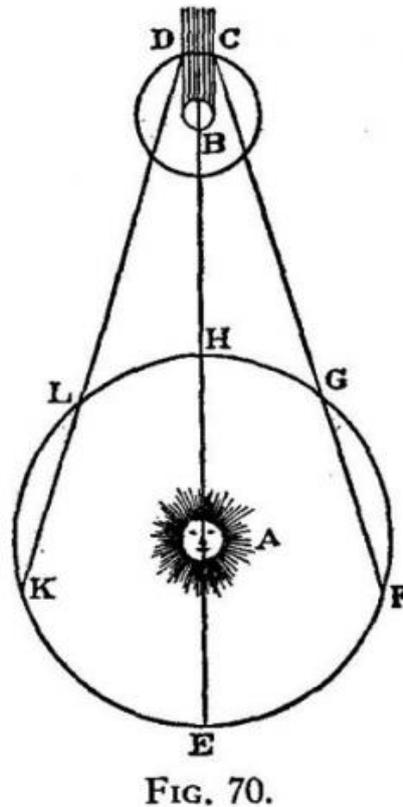


FIGURE 2.1 – Schéma de démonstration utilisé par Römer

2.1.4 Une autre expérience déterminante : celle de FIZEAU

D'autres physiciens ont tenté de mesurer la vitesse de la lumière, comme Hypolythe Fizeau en 1849, grâce au système optique suivant :

Celui-ci plaça sur une colline, à Suresnes, un morceau de craie chauffé à haute température par un chalumeau. Un faisceau de lumière se crée et pénètre latéralement dans le tube d'une lunette et est réfléchi vers Montmartre grâce à une lame de verre semi-réfléchissante inclinée à 45 degrés.

Le faisceau lumineux est ensuite focalisé sur la couronne d'une roue dentée possédant 720 dents à l'aide d'une lentille.

Il est ensuite repris par une lunette collimatrice.

A Montmartre, se trouvait une autre lunette incluant un miroir qui renvoyait le faisceau vers Suresnes.

La distance entre les deux lunettes était mesurée par triangulation et valait 8633 mètres.

La roue tourne à une certaine vitesse, hachant le faisceau lumineux qui la traverse en impulsions périodiques.

On observe 3 cas selon la vitesse de rotation de la roue :

-Si la vitesse de rotation de la roue est faible, le faisceau qui passait entre deux dents repassait dans le creux au retour. (A gauche de la figure ci-dessous)

-Si on augmente progressivement la vitesse de la roue, une dent commence à s'interposer sur le chemin du faisceaux et affaiblissait petit à petit la lumière jusqu'à l'interception totale du faisceau. (Au milieu de la figure)

-A exactement 12,6 tours par secondes, le temps que met la lumière pour parcourir la dis-

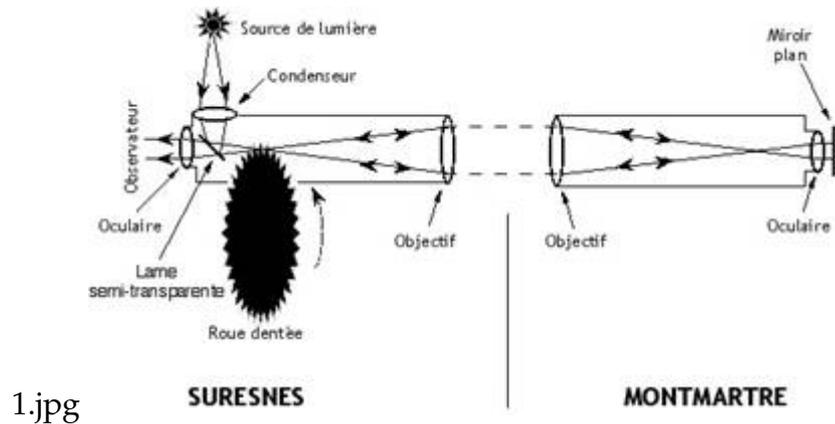


FIGURE 2.2 – Dispositif de Fizeau

tance Suresnes-Montmartre-Suresnes (17 km) correspond au temps de passage d’une échan-
crure de roue à la dent suivante.

Dans ce cas précis, le faisceau lumineux qui traverse la roue par une échancre à l’aller
est intercepté par une dent à son retour. La lumière est donc hachée. (A droite de la figure)

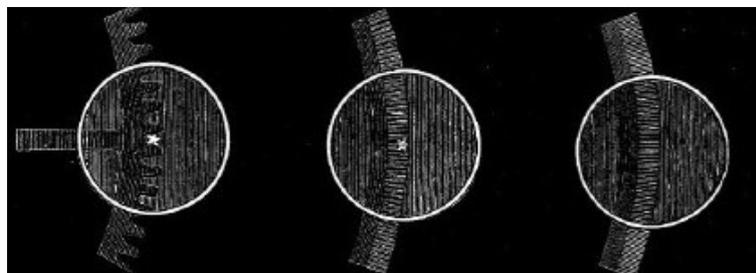


FIGURE 2.3 – Visualisation des 3 cas au niveau de la roue dentée

La démonstration mathématique de cette expérience est la suivante :

On pose :

$$c = \frac{2d}{t} \tag{2.1}$$

où t est le temps d’aller et retour de la lumière pour parcourir l’aller-retour sur la distance
 d à la vitesse inconnue c .

La roue dentée possède 720 dents et 720 creux de même taille, soit 1440 secteurs an-
gulaires identiques. Lorsque au retour du faisceau lumineux, la lumière est bloquée, cela
signifie que la roue a avancé d’un secteur, c’est à dire passant d’un creux à la dent suivante,
pendant le temps de trajet, soit $1/1440$ de tour.

Pour une fréquence de rotation f , en tours par seconde, il faut $1/f$ secondes par tour, et le
temps t' passé pour avancer de $1/1440$ de tour est

$$t' = \left(\frac{1}{1440}\right) \times \left(\frac{1}{f}\right) = \frac{1}{1440f} \tag{2.2}$$

Si on pose que $t = t'$, et sachant que $d = 8633$ et la vitesse de rotation de 12,6 tours par seconde, alors la vitesse c est :

$$\begin{aligned}c &= \frac{2d}{t'} \\c &= 2d \times 1440 f \\c &= 2 \times 8633 \times 1440 \times 12,6 \\c &= 313\,000 \text{ km/s}\end{aligned}$$

Hippolyte Fizeau a également réalisé cette expérience d'une autre façon. Il est parti de l'idée que si un milieu réfringent était en mouvement, on pouvait penser que l'éther lumineux serait entraîné par ce milieu. La vitesse de la lumière devait alors résulter de l'addition de la vitesse de la lumière dans l'éther et de celle de l'éther éventuellement entraîné.

Afin de mettre en évidence un entraînement de l'éther, Fizeau étudia l'influence de la vitesse V d'un courant d'eau sur la vitesse de la lumière. [...] De l'eau circule dans un tube coudé en verre dont les deux branches parallèles sont de même longueur. Deux rayons lumineux issus d'une même source ponctuelle S , donc en phase au départ, sont envoyés à l'aide d'une lame semi-transparente, à travers les deux branches du tube. Les trajets parcourus par les rayons sont de même longueur ; ils sont renvoyés par un miroir M , et ils viennent interférer en I en fin de parcours.

Lorsque l'eau est immobile, la vitesse de la lumière est égale à $c' = \frac{c}{n}$, où c est la vitesse de la lumière dans le vide et n , l'indice de l'eau. Si l'on suppose que l'éther lumineux est un milieu entraîné par le courant d'eau, la vitesse du rayon lumineux marqué par des flèches simples devrait être égale à $\frac{c}{n+V}$, et l'autre, marqué par des flèches doubles, à $\frac{c}{n-V}$. Les chemins optiques suivis par les deux rayons qui interfèrent sont donc différents, et l'on devrait observer un déplacement des franges d'interférence en fonction de la vitesse de l'eau.

Fizeau observa bien un déplacement des franges d'interférence, mais les résultats expérimentaux montrèrent que la vitesse de la lumière dans un courant d'eau allant dans un même sens que le rayon lumineux, est donnée par l'expression : $c^n = \frac{c}{n} + (1 - \frac{1}{n^2}) * V$

L'éther n'est donc pas complètement entraîné par l'eau puisque la formule d'addition des vitesses de la relativité galiléenne n'est pas vérifiée. On ne peut pas non plus en conclure que l'éther est immobile. A l'époque, Fizeau conclut prudemment que la loi trouvée exprime simplement « le changement de la vitesse de la lumière par l'effet du mouvement des corps » sans faire d'hypothèse sur l'origine de ce changement. Ce sera simplement cinquante ans plus tard que la théorie de la relativité restreinte permettra d'apporter une justification à la formule expérimentale de Fizeau.

2.1.5 Michelson-Morley

Présentation de l'expérience

Dans l'expérience de Fizeau, la vitesse de la lumière est mesurée dans le référentiel du laboratoire, or pour montrer l'existence de L'Éther il faudrait mesurer un déplacement par rapport à celui-ci. C'est précisément l'objectif de l'expérience de Michelson Morley, réalisée en 1887, qui est de déceler un vent d'éther, c'est-à-dire montrer le mouvement de la Terre dans l'éther. Il est supposé comme précédemment que c , la vitesse de la lumière est constante dans le référentiel de l'éther, mais pas dans le référentiel de la Terre. Donc dans le référentiel de la Terre, à partir d'un faisceau que l'on fait partir dans 2 directions perpendiculaires, les deux faisceaux ainsi créés ne parcourront pas la même distance dans le référentiel de L'Éther. Notons par ailleurs que si l'on suppose que l'éther est fixe par rapport au Soleil, la Terre ira à 30km/s dans l'éther.

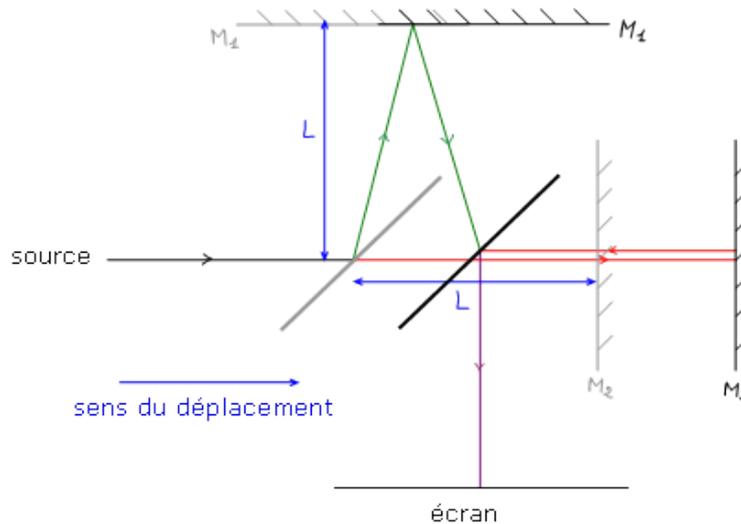


FIGURE 2.4 – Visualisation du trajet de la lumière dans le référentiel de l'éther

Visualisation de l'expérience dans le référentiel de l'éther

L'expérience de Michelson Morley est composée de deux miroirs, une lame semi-réfléchissante, un écran ainsi qu'une source lumineuse. La source lumineuse est séparée par la lame semi-réfléchissante en deux rayons perpendiculaires l'un par rapport à l'autre, ces deux faisceaux lumineux sont réfléchis par un miroir (le miroir 1 pour le rayon 1, etc..) et s'additionnent pour ne former qu'un seul rayon au niveau de la lame semi-réfléchissante. Il est alors possible de voir une figure d'interférence sur l'écran.

On va maintenant étudier dans le détail cette expérience, et les résultats obtenus par Michelson, ainsi que par ses successeurs qui ont repris son expérience avec toujours plus de précisions.

Étude du rayon 2

Tout le long de l'étude de l'expérience, on se placera dans le référentiel de l'éther

D'après le théorème de composition des vitesses, on a dans le référentiel de l'éther

$$c \times T_{1,a} = L + VT_{1,a}$$

Avec $V \times T_1$ la distance parcouru par la terre dans le référentiel de L'Éther

On a donc

$$T_{1,a} = \frac{L}{c - V}$$

Même principe que précédemment pour le retour, sauf que cette fois la Terre se déplace dans le sens contraire du rayon, donc le rayon va parcourir moins de distance dans le référentiel de l'éther. Ainsi

$$c \times T_{1,r} = L - V \times T_{1,r} \Leftrightarrow T_{1,r} = \frac{L}{c + V}$$

On a donc le temps total de parcours du faisceau 1

$$T_1 = T_{1,a} + T_{1,r} = \frac{L}{c - V} + \frac{L}{c + V}$$

$$T_1 = \frac{L(c+V)}{(c-V)(c+V)} + \frac{L(c-V)}{(c-V)(c+V)}$$

$$T_1 = \frac{2Lc}{c^2 - V^2} = \frac{2L}{c(1 - \frac{v^2}{c^2})}$$

Pour simplifier l'expression de T, on fait un développement limité en 0 car $\frac{V^2}{c^2} = \beta^2$ est très proche de 0

Or le DL en 0 est

$$\frac{1}{1 - \beta^2} \approx 1 + \beta^2$$

D'où

$$T_1 \approx \frac{2L}{c} \times (1 + \beta^2)$$

Étude du rayon 1

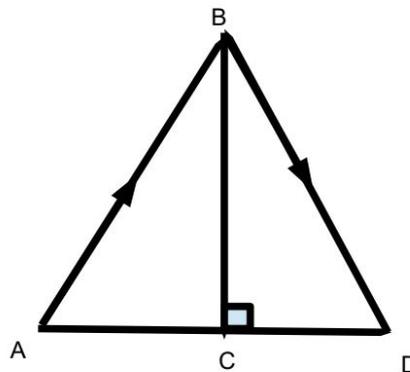


FIGURE 2.5 – trajet du rayon 1 dans le référentiel de l'éther

D'après le Théorème de Pythagore, dans le triangle ABC rectangle en C on a

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 \tag{2.3}$$

Avec AC la distance parcourue par la Terre dans le référentiel de l'éther, BC la distance entre la séparatrice et le miroir, et AB la distance parcourue par le rayon à la vitesse c pendant la durée T_1

Donc

$$\begin{aligned} AB &= T_{2,a} \times c \\ AC &= T_{2,a} \times V \\ BC &= L \end{aligned}$$

En remplaçant ces valeurs dans (3) On trouve :

$$(T_{2,a} \times c)^2 = (T_{2,a} \times V)^2 + L^2 \Leftrightarrow T_{2,a}^2(c^2 - v^2) = L^2$$

$$T_{2,a} = \frac{L}{\sqrt{c^2 - v^2}}$$

D'après le Théorème de Pythagore, dans le triangle BCD rectangle en C on obtient le même résultat que précédemment par symétrie : $T_{2,r} = T_{2,a}$

Et donc

$$T_2 = T_{2,a} + T_{2,r} = 2 \times \frac{L}{\sqrt{c^2 - v^2}}$$

$$T_2 = \frac{2L}{c \times \sqrt{1 - \beta^2}} \quad (2.4)$$

Comme pour le faisceau 1 on effectue un DL en 0 de T_2 , ainsi

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = 1 + \frac{1}{2}\beta^2$$

On remplace ce résultat dans l'équation(4)

$$T_2 = \frac{2L}{c} \times \left(1 + \frac{1}{2}\beta^2\right)$$

$$T_2 = \frac{L(2 + \beta^2)}{c}$$

On peut maintenant calculer le décalage entre les deux faisceau

$$\Delta T = T_1 - T_2$$

$$\Delta T = \frac{2L}{c} * (1 + \beta^2) - \frac{L(2 + \beta^2)}{c}$$

$$\Delta T = \frac{L}{c} \times (2 + 2\beta^2 - 2 - \beta^2)$$

$$\Delta T = \frac{L\beta^2}{c} = \frac{LV^2}{c^3}$$

Ainsi on a une différence de temps de parcours entre le chemin 1 et le chemin 2, ce qui entraîne un déphasage entre les 2 rayons.

Cette différence de temps de parcours entre un déphasage entre les deux rayons lorsqu'ils arrivent sur l'écran, se traduit par une succession de frange sombres et lumineuses sur l'écran. Néanmoins, l'appareil n'étant pas parfait, on ne peut pas affirmer que l'apparition de franges est dû au déplacement de la Terre dans l'éther.

Pour surmonter ce problème, Michelson et Morley vont faire tourner leur dispositif de 90° de telle sorte que si les franges sont dues à la vitesse de la Terre dans l'éther, les franges doivent se modifier.

Étude du déphasage

Pour éviter les vibrations lorsqu'ils tournent l'appareil, ils placent leur interféromètre sur un bassin de mercure.

Après avoir trouvé des résultats négatifs, ils ont réessayé 6 mois plus tard, car il se pouvait que pendant le moment de l'expérience, le mouvement de la Terre dans l'éther était trop faible pour le déceler. Mais comme 6 mois plus tard, la Terre allait globalement dans le sens inverse et que les résultats étaient toujours nuls, Michelson et Morley se retrouvèrent donc dans l'incapacité d'expliquer leurs résultats. Ainsi, ils conclurent simplement, après 7 ans d'expérimentation, que s'il y a un mouvement relatif entre la Terre et l'éther, il doit être très petit.

L'interprétation de ce résultat donna lieu à une débauche d'imagination. Georges Fitzgerald imagina que tous les corps se contractaient dans la direction de leur mouvement. Lorentz admit l'hypothèse de Fitzgerald afin de préserver sa théorie de l'éther. Par la suite, d'autres expériences suivirent pour vérifier l'hypothèse de Fitzgerald.

Finalement, l'expérience de Michelson et Morley constitue une preuve expérimentale que la vitesse de la lumière est dans le vide une constante, notée c , indépendante du mouvement de sa source. Sa vitesse ne s'additionne pas à celle de sa source contrairement à ce qu'exigerait la relativité galiléenne.

Après avoir expliqué les origines de la théorie de la relativité, étudions désormais dans une deuxième partie, les transformations de Lorentz-Poincaré qui marquent un tournant dans la physique de l'époque en remettant en cause la relativité galiléenne et la mécanique Newtonienne.

2.2 Les transformations de Lorentz-Poincaré

2.2.1 Relativité Galiléenne et électromagnétisme

La transformation galiléenne

Nous allons commencer par voir ce qu'est la transformation de Galilée, et nous verrons par la suite comment elle modifie les équations de Maxwell, remettant en cause la mécanique Newtonienne.

Une transformation galiléenne est une translation rectiligne uniforme d'un référentiel par rapport à un référentiel galiléen. Le référentiel en translation est donc lui aussi galiléen. Le temps est considéré comme absolu lors d'une telle transformation, et sera donc identique quel que soit le repère dans lequel on se place. Les deux repères coïncident à l'origine du temps, lorsque l'on a $t' = t = 0$. Si la vitesse de translation du repère R' par rapport au premier repère R est suffisamment faible devant la vitesse de la lumière, toute la mécanique Newtonienne reste valable. Cependant, si la vitesse s'approche trop de la vitesse de la lumière, cette transformation n'est plus valable et devient alors une transformation de Lorentz.

Champ électrique et champ magnétique dans R'

Les expériences vues précédemment remettent en cause la physique newtonienne, mais il y a aussi une théorie qui contredit les transformations de Galilée. Cette théorie, c'est l'électromagnétisme. Ainsi, dans cette partie nous allons déceler le lien entre la transformation de Lorentz-Poincaré et les équations de Maxwell (vu en module de P5). James C. MAXWELL (1831-1879) est un physicien écossais qui en 1873, synthétise les travaux expérimentaux de Gauss, Ampère, Oersted et Faraday en posant 4 équations couplant champs électriques et magnétiques. Ces 4 équations fondamentales de la physique sont des postulats, jamais remis en cause depuis. Rappelons ces équations :

$$\text{div } \vec{B} = 0 : \text{Equation de Maxwell-Thomson}$$

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} : \text{Equation de Maxwell-Gauss}$$

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \times \vec{j} + \epsilon_0 \times \mu_0 \times \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} : \text{Equation de Maxwell-Ampère}$$

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} : \text{Equation de Maxwell-Faraday}$$

Maxwell découvrit que ces équations prédisent qu'il existe une onde électromagnétique. Sa découverte fut que la lumière est bien une onde électromagnétique. Cela a permis de conclure que la lumière était isotrope (même valeur dans toutes les directions) et indépendante du référentiel dans lequel on mesure. Nous savons grâce à nos connaissances en mécanique du point (P2), que les lois de la mécanique classique sont invariantes lorsqu'on utilise la transformation de Galilée c'est à dire : lorsque il y a translation rectiligne uniforme d'un référentiel dans un autre. Montrons ce théorème :

$$\vec{OM} - \vec{O'M} = \vec{OO'} = \vec{V}_{R'_0/R_0} \times t$$

On dérive :

$$\vec{v}_{M/R_0} - \vec{v}_{M/R'_0} = \vec{V}_{R'_0/R_0} \Leftrightarrow \vec{v}_{M/R_0} = \vec{v}_{M/R'_0} + \vec{V}_{R'_0/R_0}$$

C'est la formule d'addition des vitesses. On re-dérive : $\frac{d\vec{v}_{M/R_0}}{dt} = \frac{d\vec{v}_{M/R'_0}}{dt} + \frac{d\vec{V}_{R'_0/R_0}}{dt}$ Comme

V est un vecteur constant : $\frac{d\vec{V}_{R'_0/R_0}}{dt} = 0$

$$m \times \overrightarrow{a_{M/R_0}} = m \times \overrightarrow{a_{M/R'_0}}$$

$$\overrightarrow{F_{R_0}} = \overrightarrow{F_{R'_0}}$$

Notre propriété est donc bien vérifiée.

Enfin, on pose également que : dans R_0 et R'_0 , la charge d'une particule est invariante et ce, quelque soit $\overrightarrow{V_{R'_0/R_0}}$

On rappelle que la force électrique s'écrit : $\overrightarrow{F}_e = q \times \overrightarrow{E}$; et la force magnétique : $\overrightarrow{F}_m = q \times \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B}$

La force de Lorentz s'écrit donc : $\overrightarrow{F}_L = \overrightarrow{F}_e + \overrightarrow{F}_m = q(\overrightarrow{E} + \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B})$

On utilise ensuite l'addition des vitesses en mécanique newtonienne : $\overrightarrow{v'} = \overrightarrow{v} - \overrightarrow{V}$

$$\overrightarrow{F}'_L = q(\overrightarrow{E}' + \overrightarrow{v'} \wedge \overrightarrow{B}')$$

On fait ensuite $\overrightarrow{F}'_L = \overrightarrow{F}_L$

$$q(\overrightarrow{E} + \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B}) = q(\overrightarrow{E}' + \overrightarrow{v'} \wedge \overrightarrow{B}') \iff \overrightarrow{E} + \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B} - \overrightarrow{E}' - \overrightarrow{v'} \wedge \overrightarrow{B}' = \overrightarrow{0}$$

$$\overrightarrow{E} - \overrightarrow{E}' + \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B} - (\overrightarrow{v} - \overrightarrow{V}) \wedge \overrightarrow{B}' = \overrightarrow{0}$$

$$\overrightarrow{E} - \overrightarrow{E}' + \overrightarrow{V} \wedge \overrightarrow{B} + (\overrightarrow{v} \wedge (\overrightarrow{B} - \overrightarrow{B}')) = \overrightarrow{0}$$

Ainsi, on en déduit que, dans le cas où $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$, on obtient :

$$\overrightarrow{E} = \overrightarrow{E}' - \overrightarrow{V} \wedge \overrightarrow{B}' \text{ et donc : } \overrightarrow{B} = \overrightarrow{B}'$$

Notons que la force de Lorentz n'est pas totalement invariante par changement de référentiel (mais ceci uniquement pour des vitesses \overrightarrow{v} proches de la vitesse de la lumière).

Opérateur ∇ dans R'

De la même manière que ci-dessus, on devrait normalement trouver les équations de Maxwell invariantes par la transformation de Galilée. Mais l'on va découvrir que ce n'est pas le cas. Avant de procéder à la démonstration, on doit tout d'abord savoir si les dérivées partielles ainsi que les opérateurs div et rot sont invariants par changement de référentiel galiléen (car nous allons en avoir besoin par la suite).

On va désormais calculer ce que deviennent les équations de Maxwell avec la transformation de Galilée. Pour ce faire, on va d'abord placer notre changement de variable, et regarder comment les opérateurs div et rot changent.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{R}^4 & \xrightarrow{g} & Q \\ \text{Pour cela posons} & \left(\begin{array}{c} x \\ y \\ z \\ t \end{array} \right) & \left(\begin{array}{c} x' = x - V_x t \\ y' = y - V_y t \\ z' = z - V_z t \\ t' = t \end{array} \right) & & \end{array}$$

Avec Q un champ vectoriel de \mathbb{R}^4 quelconque et $f = g \circ \varphi$

Ainsi

$$f(x, y, z, t) = g(x', y', z', t') = Q$$

Pour la suite des calculs, nous allons poser $A = (x, y, z, t)$ et $A' = (x', y', z', t')$ simplement pour réduire la longueur des calculs

On a donc

$$J_{f(A)} = J_{g(A')} \circ J_{\varphi(A)}$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(A) \quad \frac{\partial f}{\partial y}(A) \quad \frac{\partial f}{\partial z}(A) \quad \frac{\partial f}{\partial t}(A) \right) =$$

$$\left(\begin{array}{cccc} \frac{\partial g}{\partial x'}(A') & \frac{\partial g}{\partial y'}(A') & \frac{\partial g}{\partial z'}(A') & \frac{\partial g}{\partial t'}(A') \end{array} \right) \left(\begin{array}{cccc} \frac{\partial x'}{\partial x}(A) & \frac{\partial x'}{\partial y}(A) & \frac{\partial x'}{\partial z}(A) & \frac{\partial x'}{\partial t}(A) \\ \frac{\partial y'}{\partial x}(A) & \frac{\partial y'}{\partial y}(A) & \frac{\partial y'}{\partial z}(A) & \frac{\partial y'}{\partial t}(A) \\ \frac{\partial z'}{\partial x}(A) & \frac{\partial z'}{\partial y}(A) & \frac{\partial z'}{\partial z}(A) & \frac{\partial z'}{\partial t}(A) \\ \frac{\partial t'}{\partial x}(A) & \frac{\partial t'}{\partial y}(A) & \frac{\partial t'}{\partial z}(A) & \frac{\partial t'}{\partial t}(A) \end{array} \right)$$

On utilise ensuite la fameuse règle de la chaîne :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(A) = \frac{\partial g}{\partial x'}(A') \times \frac{\partial x'}{\partial x}(A) + \frac{\partial g}{\partial y'}(A') \times \frac{\partial y'}{\partial x}(A) + \frac{\partial g}{\partial z'}(A') \times \frac{\partial z'}{\partial x}(A) + \frac{\partial g}{\partial t'}(A') \times \frac{\partial t'}{\partial x}(A)$$

On appelle M la matrice carrée (4x4). On se propose de calculer les éléments de cette matrice

Les coordonnées (x',y',z',t') sont reliées aux coordonnées (x,y,z,t) par les transformations de Galilée. Dans le cas général on a la vitesse relative de \mathbb{R}' par rapport à \mathbb{R} qui est de la forme

$$\vec{V} = \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix}. \text{ Ainsi, comme exposée plus haut, la transformation est de la forme}$$

$$\begin{cases} x' = x - V_x t \\ y' = y - V_y t \\ z' = z - V_z t \\ t' = t \end{cases}$$

On en déduit

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -V_x \\ 0 & 1 & 0 & -V_y \\ 0 & 0 & 1 & -V_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi en effectuant le produit matriciel du membre de droite, et en remarquant que $\varphi(A) = A'$, on obtient quatre équations :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(A) = \frac{\partial g}{\partial x'}(\varphi(A)) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(A) = \frac{\partial g}{\partial y'}(\varphi(A)) \\ \frac{\partial f}{\partial z}(A) = \frac{\partial g}{\partial z'}(\varphi(A)) \\ \frac{\partial f}{\partial t}(A) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial x'} \\ \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial y'} \\ \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial Q}{\partial z'} \\ \frac{\partial Q}{\partial t} \end{cases}$$

Ainsi, comme les opérateurs div et rot utilisent les dérivées partielles, on en conclue que $div = div'$ et que $\vec{rot} = \vec{rot}'$

Attention cependant : $\frac{\partial f}{\partial t}(A) = -V_x \frac{\partial g}{\partial x'}(\varphi(A)) - V_y \frac{\partial g}{\partial y'}(\varphi(A)) - V_z \frac{\partial g}{\partial z'}(\varphi(A)) + \frac{\partial g}{\partial t'}(\varphi(A))$

Vu que $t = t'$, on obtient finalement :

$\frac{\partial Q}{\partial t} = -\vec{V}_{R'_0/R_0} \cdot \vec{\nabla}'(Q) + \frac{\partial Q}{\partial t'}$ avec $\vec{\nabla}' = \vec{grad}_{R'_0}(Q)$ Seule cette égalité là (par rapport au temps) est différente.

Résumons : on en déduit donc que dans le cadre des transformations de Galilée $\nabla = \nabla'$ et donc :

$$\begin{aligned} \nabla \bullet Q &= \nabla' \bullet Q \\ \nabla Q &= \nabla' Q \\ \nabla \wedge Q &= \nabla' \wedge Q \end{aligned}$$

On est maintenant en mesure de tester les équations de Maxwell.

Non invariance des équations de Maxwell dans R'

Pour l'équation de Maxwell-Thomson, puisque $div = div'$, on a :

$$\nabla' \cdot \vec{B}' = \nabla \cdot \vec{B}$$

Ainsi l'équation de Maxwell-Thomson est invariante par les transformations de Galilée

Pour l'équation de Maxwell-Faraday, on doit utiliser les formules suivantes pour la démonstration : $\vec{rot}(a \wedge b) = -(a \cdot \nabla)b$; $\frac{\partial}{\partial t} = -\vec{V} \cdot \vec{\nabla}' + \frac{\partial}{\partial t'}$ et $\vec{B} = \vec{B}'$

$$\begin{aligned} \vec{rot} \vec{E}' &= \vec{rot}(\vec{E} + (\vec{V} \wedge \vec{B}')) \\ &= \vec{rot} \vec{E} + \vec{rot}(\vec{V} \wedge \vec{B}') \\ &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} \\ &= \vec{B} \left(-\frac{\partial}{\partial t} - \vec{V} \cdot \vec{\nabla}' \right) \\ &= \vec{B} \left(-\frac{\partial}{\partial t'} \right) \\ &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t'} \\ &= -\frac{\partial \vec{B}'}{\partial t'} \end{aligned}$$

Donc cette équation est également invariante

Nous allons maintenant passer à l'équation de Maxwell-Gauss

$$\nabla \cdot \vec{E} = \nabla' \cdot \vec{E}' - \nabla' \cdot (\vec{V} \wedge \vec{B}')$$

Or

$$\nabla' \cdot (\vec{V} \wedge \vec{B}') = \vec{V} \nabla' \wedge \vec{B}' - \vec{B}' \nabla' \wedge \vec{V} = \vec{V} \nabla' \wedge \vec{B}'$$

Car \vec{V} est constant

Donc

$$\begin{aligned} \nabla' \cdot \vec{E}' &= \nabla \cdot \vec{E} - \vec{V} \nabla' \wedge \vec{B}' \\ \nabla' \cdot \vec{E}' &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} - \vec{V} \nabla' \wedge \vec{B}' \neq \frac{\rho}{\varepsilon_0} \end{aligned}$$

Donc l'équation de Maxwell Gauss n'est pas invariante par changement de référentiel

On peut donc conclure que les formules de l'électromagnétisme ne sont pas invariantes avec la transformation de Galilée, ce qui va amener à la théorie de la relativité telle qu'on la connaît; et qui justifiera cette non-invariance.

2.2.2 Remise en question des théories

L'accumulation de ces résultats, pratiques comme théoriques poussèrent les physiciens à revoir leurs modèles. Ainsi, plusieurs explications s'offrèrent aux physiciens.

Premièrement il était possible que les résultats des expériences de Michelson et de Morley soient erronés, et les équations de Maxwell également. Cette première explication à très vite été rejetée par les scientifiques de l'époque, en effet aucun physicien n'osaient contredire les théories de Maxwell, tant ces travaux ont été vérifiés expérimentalement par tous. De plus, l'extrême précision de l'expérience de Michelson-Morley, ainsi que des expériences du même type qui ont suivies, montrent que ces résultats ne sont pas le fruit d'erreurs expérimentales.

L'autre possibilité pour les physiciens de l'époque était de remettre en question le principe de relativité selon lequel les lois physiques doivent être invariantes dans tous référentiels inertiels. Néanmoins cette explication n'était pas non plus envisageable, car elle contredit une exigence fondamentale de la science. En effet la science étudie les phénomènes naturels, phénomènes régis par des lois physiques, lois supposées valides partout, tout le temps, elles doivent donc être universelles. Or, les théories s'appuient sur des résultats et des mesures expérimentales, mais lorsque l'on effectue des mesures, celles-ci sont liées à un système de référence. Ainsi les résultats expérimentaux sont attachés à ce système de référence, ils ne peuvent pas être définie de manière absolu. Ainsi, supposer que la nature est soumise à des lois physiques revient à dire que ces lois sont valables dans tous les référentiels.

Ainsi, il ne resta plus qu'une seule possibilité aux scientifiques : les transformations de Galilée sont inexactes. Néanmoins il est à noter que ces transformations sont toujours utilisées aujourd'hui, car elles sont simples et forment une très bonne approximation pour des vitesses qui restent faibles devant c .

2.2.3 Nouvelles hypothèses

Comme on peut l'imaginer, la théorie de la relativité restreinte n'est pas née en quelques mois, mais elle est le fruit du travail de nombreux scientifiques, tel que Lorentz, Poincaré, Minkowski et bien sûr Einstein. Ceux-ci se sont appuyés sur certains postulats dans leurs théories. Comme c'est à partir de ces postulats qu'ils ont déduit leurs résultats, ils nous paraissent important de les énoncer, car si ils ne sont pas acceptables, les conséquences que l'on en tire ne le sont pas non plus. On dit parfois que ces postulats valent les conséquences que l'on en déduit.

La première de ces hypothèses est l'homogénéité de l'espace-temps. Par espace-temps, on entend un espace quadri-dimensionnel, définissant des événements grâce à trois coordonnées spatiales et une coordonnée temporelle. Lorsqu'on postule l'homogénéité d'un tel espace, on postule que l'espace temps est invariant par translation, c'est à dire qu'il possède les mêmes propriétés en chaque point de l'espace et à n'importe quel instant. On peut donc en déduire que les origines des repères d'espace-temps sont arbitraires pour exprimer des propriétés physiques.

La seconde hypothèse est l'isotropie de l'espace. Pas isotropie, on veut dire que toutes les directions de l'espace sont équivalentes. Ainsi, si on crée un nouveau référentiel R' par rotation dans l'espace d'un référentiel R ; alors ces deux systèmes de références restent équivalents.

Le troisième (et avant dernier postulat) est le principe de relativité. Ce postulat existe sous plusieurs formes, nous avons donc choisi la forme que Poincaré a donné en 1904 : "[...] principe de relativité, d'après lequel des phénomènes physiques doivent être les mêmes, soit pour un observateur fixe, soit pour un observateur entraîné dans un mouvement de translation uniforme." Ainsi, ce postulat implique l'existence de référentiels équivalents, qui en relativité restreinte correspondent à des référentiels inertiels.

Le dernier postulat est un principe fondamentale de la physique : la causalité. Ce postulat peut être résumé ainsi : Soit A et B deux phénomènes, si A est la cause de B , alors A doit avoir lieu avant B dans n'importe quel référentiel.

Il existe un cinquième postulat, que Einstein avait utilisé mais qui n'est pas nécessaire : l'invariance de la vitesse de la lumière dans le vide. En effet il est possible de retrouver les transformations de Lorentz (analogue des transformations de Galilée) sans le postulat d'invariance de c . Cette démonstration sera vu un peu plus tard.

Enfin, pour en finir avec ces postulats et pour en venir aux nouvelles transformations, il est à noter que la relativité générale s'appuie elle, sur les mêmes hypothèses à l'exception de

l'homogénéité de l'espace temps (homogénéité perdue à cause de l'influence de la matière), ainsi que du principe de relativité qui sera étendu à tous les référentiels (inertiels ou non).

2.2.4 Présentation des transformations

A partir de ces hypothèses, les scientifiques de l'époque vont trouver une nouvelle transformation qui sera elle, en accord avec les résultats expérimentaux de l'époque.

La transformation

La transformation de Lorentz-Poincaré consiste en deux repères, R (O, x, y, z, t) et R' (O', x', y', z', t'), où l'on considère que R' est en translation uniforme à la vitesse V par rapport à R selon l'axe des x. A t=0, on considère un éclair de lumière instantané en O=O'. Une onde de lumière sphérique se propage alors dans l'espace à la vitesse c.

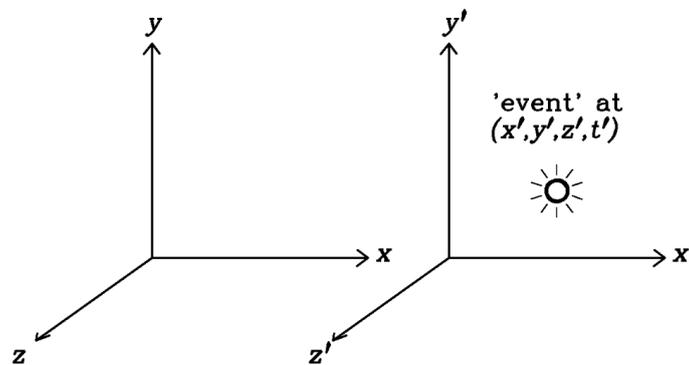


FIGURE 2.6 – Référentiels R et R' avec R' en translation uniforme par rapport à R à la vitesse V

Dans R, à t, on a alors :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \\ r = ct \end{cases}$$

Dans R', à t', on a :

$$\begin{cases} x'^2 + y'^2 + z'^2 = r'^2 \\ r' = ct' \end{cases}$$

Dans l'hypothèse où le temps est universel (mécanique classique), il y a une incohérence puisque $t = t'$ et donc $r = r'$. Cela est bien entendu impossible. R' étant en mouvement par rapport à R, ct et ct' ne peuvent pas être égaux. Ici on considère, puisque R' est en translation uniquement sur l'axe des x par rapport à R, que $y = y'$, et $z = z'$. On observe donc le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2 \\ x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2 \end{cases}$$

L'unique façon de rendre ce système cohérent est bien entendu d'abandonner les lois de la mécanique classique, et donc l'universalité du temps. C'est là tout le génie de cette transfor-

mation. On démontrera le résultat suivant :

$$\begin{cases} y = y' \\ z = z' \\ x = \gamma(x' + \beta ct') \\ ct = \gamma(\beta x' + ct') \end{cases}$$

avec

$$\begin{cases} \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ \beta = \frac{V}{c} \end{cases}$$

Pourquoi utiliser cette transformation ?

La transformation de Lorentz-Poincaré est la base de la relativité restreinte. L'abandon de l'universalité du temps implique de nombreuses conséquences telles que :

- La compression des distances
- La dilatation du temps
- La remise en cause de la notion de simultanéité
- La notion de causalité
- La limite de la vitesse par c

Nous aborderons tous ces aspects dans une prochaine partie du rapport.

Quelques précisions historiques

De telles équations ne sont pas tombées dans les oreilles de Poincaré et Lorentz d'un seul coup. Elles ont au contraire, été le fruit d'intuitions et de nombreuses corrections tout au long de leur élaboration. En effet, en 1887, Woldemar Voigt est le premier scientifique à publier un article dans lequel il remarque l'invariance de certaines équations de la mécanique classique sous des changements de variables spécifiques. S'il n'a pas beaucoup plus développé ses arguments, ceux-ci sont les fondements du travail de Hendik Lorentz. Plus tard, en 1889, G.F Fitzgerald publie à son tour un article dans lequel il formule pour la première fois l'hypothèse de contraction des longueurs avec la vitesse. Après cela, pendant plus de dix ans, Lorentz et Poincaré élaborent leur théorie sous la forme de la transformation qui porte aujourd'hui leur nom, se corrigeant mutuellement et affinant peu à peu leurs résultats. Ils publient finalement leurs travaux en 1905. La même année, Albert Einstein donne tous son sens à la transformation lorsqu'il publie sa théorie de la relativité restreinte en s'appuyant massivement sur les travaux de Lorentz et Poincaré.

Une démonstration de ces transformations est en annexe.

2.3 Des rotations hyperboliques aux transformations de Lorentz

Le but de cette partie est de démontrer les transformations de Lorentz en montrant que les coefficients sont des rotations hyperboliques.

On part de l'idée de la conservation de l'intervalle d'espace temps (pour plus d'information sur cette intervalle, voir le rapport de l'autre groupe) :

$$\Delta s^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 = \Delta s'^2$$

D'où :

$$c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 = c^2 \Delta t'^2 - \Delta x'^2$$

$$c^2 t^2 - x^2 = c^2 t'^2 - x'^2 \text{ (on prend le vecteur } \overrightarrow{OE})$$

Au départ, on avait posé (pour les transformations de Lorentz) :

$$ct = Act' + Bx'$$

$$x = Dx' + Ect'$$

$$(Act' + Bx')^2 - (Dx' + Ect')^2 = c^2t'^2 - x'^2$$

$$[(Act' + Bx') + (Dx' + Ect')][(Act' + Bx') - (Dx' + Ect')] = (ct')^2 - x'^2$$

$$[ct'(A + E) + x'(B + D)][ct'(A - E) + x'(B - D)] = (ct')^2 - x'^2$$

$$(ct')^2(A^2 - E^2) + x'^2(B^2 - D^2) + x'ct'[(AB - EB + AD - DE) + (AB - AD + EB - DE)] = (ct')^2 - x'^2$$

$$(ct')^2(A^2 - E^2) + x'^2(B^2 - D^2) + 2x'ct'(AB - DE) = (ct')^2 - x'^2$$

Par identification :

$$\begin{cases} A^2 - E^2 = 1 \\ B^2 - D^2 = -1 \\ AB - DE = 0 \end{cases}$$

Rappelons maintenant ce que sont le cosinus et le sinus hyperbolique : ce sont à chaque fois la partie paire de l'exponentielle.

$$\text{ch} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$iz \rightarrow \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos(z) = \text{ch}(iz)$$

$$\text{D'où} : \text{ch}(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, z \in \mathbb{R}$$

$$\text{sh}(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

En dérivant ces 2 expressions, on s'aperçoit que :

$$(\text{sh}(z))' = \text{ch}(z) \text{ et } (\text{ch}(z))' = \text{sh}(z)$$

Une des propriétés de la trigonométrie hyperbolique est que :

$$\text{ch}^2 - \text{sh}^2 = 1$$

Ainsi, par identification :

$$\begin{cases} \text{ch}^2 - \text{sh}^2 = 1 \\ \text{sh}^2 - \text{ch}^2 = -1 \\ AB - DE = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} A = \text{ch}(\theta) \\ E = \text{sh}(\theta) \end{cases} \text{ et } \begin{cases} B = \text{sh}(\phi) \\ D = \text{ch}(\phi) \end{cases}$$

Autre propriété de trigonométrie qui permet de vérifier la 3ème équation à l'aide des valeurs de A, B, E et D trouvées ci-dessus :

$$\text{ch}(\theta)\text{sh}(\phi) - \text{ch}(\phi)\text{sh}(\theta) = \text{sh}(\phi - \theta) = 0 \iff \phi = \theta$$

Ainsi, on obtient la matrice de rotation hyperbolique :

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \text{ch}(\theta) & \text{sh}(\theta) \\ \text{sh}(\theta) & \text{ch}(\theta) \end{pmatrix}$$

Dessin de 2 repères à faire

On pose ensuite $x' = 0$ pour connaître la relation entre θ et la vitesse

Equations paramétriques de O' : Coordonnées de O' dans R :

$$\begin{cases} ct = \text{ch}(\theta)ct' & (1) \\ x = \text{sh}(\theta)ct' = vt & (2) \end{cases}$$

$$\frac{(2)}{(1)} = \frac{vt}{ct} = \frac{\text{sh}(\theta)}{\text{ch}(\theta)}$$

$$\text{D'où} : \frac{v}{c} = \text{th}(\theta)$$

$$\text{On revient sur la propriété} : \text{ch}(\theta)^2 - \text{sh}(\theta)^2 = 1 \iff \text{ch}(\theta)^2 - \text{ch}(\theta)^2 \text{th}(\theta)^2 = 1$$

On factorise par $\text{ch}^2(\theta)$:

$$\text{ch}(\theta)^2(1 - \text{th}(\theta)^2) = 1$$

$$\text{ch}(\theta) = \frac{1}{\sqrt{1 - \text{th}(\theta)^2}} = \gamma$$

$$\text{Et} : \text{sh}(\theta) = \text{th}(\theta) \times \text{ch}(\theta) = \frac{v}{c} \times \gamma = \gamma\beta$$

On retrouve donc la matrice :

$$L = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta \\ \gamma\beta & \gamma \end{pmatrix} \text{ qui est égale à } R(\theta) = \begin{pmatrix} ch(\theta) & sh(\theta) \\ sh(\theta) & ch(\theta) \end{pmatrix}$$

et où θ est la rapidité.

Notons que si on trace $th(\theta)$ en fonction de θ , on remarque que $th(\theta)$ tend vers 1 en $+\infty$ (voir annexe B)

Faisons ainsi le lien avec $\frac{v}{c} = th(\theta)$: l'étude de la fonction montre donc que l'on ne peut pas dépasser 1 et donc, cela confirme que $v < c$

Conclusion et perspectives

- Ce rapport, associé à celui de l'autre groupe travaillant sur la relativité restreinte représente une première approche de la théorie de la relativité. A travers celui-ci nous avons vu diverses notions, comme les fonctions hyperboliques ou les quadrivecteurs, notions qui nous ont permis de voir plus loin que de simples formules de changement de référentiel. En effet nous avons tenté de rattacher ces notions à des exemples et des expériences concrètes.
- Cela nous a ainsi permis d'obtenir une autre vision du réel, qui paraît parfois paradoxale comme avec la contraction des longueurs et du temps par exemple, mais qui n'en est pas moins exacte. De plus, la théorie de la relativité restreinte est une théorie mythique de la physique dont la paternité est quasiment exclusivement rattachée à Einstein, or ce projet nous a permis de démystifier cette théorie emblématique dont de très nombreux scientifiques ont permis l'avènement, et également de mieux comprendre la démarche à la fois théorique et expérimentale des chercheurs. Pour finir sur l'apport de ce projet, nous voulions rajouter que nous avons pris énormément de plaisir à démontrer certaines formules emblématiques tel que $E = Mc^2$, même si cela n'a pas été toujours très simple pour nous.
- Il y aurait encore beaucoup à dire sur cette théorie, en effet il y a de nombreux exemples et plusieurs aspects théoriques que nous n'avons pas pu aborder à cause du nombre limité de page. Pour aller plus loin nous aurions pu par exemple parler des liens entre la relativité restreinte et la mécanique quantique, ou ouvrir vers la théorie de la relativité générale qui est comme son nom l'indique, la généralisation de la relativité restreinte. Néanmoins, pour voir toutes ces notions il faut tout d'abord avoir des bases solides en relativité, ainsi nos successeurs pour l'UE P6 ne pourront pas repartir de nos travaux selon nous, car ceux-ci sont très complexes et demande beaucoup de travail pour être seulement compris, même si nos travaux représentent un résumé de ce qui est nécessaire de maîtriser.

Bibliographie

- [1] HLADIK, Jean *Pour comprendre simplement la relativité* , Editeur,2005.
- [2] HLADIK, Jean Chrysos, Michel *Introduction à la relativité restreinte, cours et exercices corrigés* , DUNOD, 2007.
- [3] FABRE, Claude ANTOINE, Charles TREPS Nicolas *Introduction à la physique moderne : relativité et physique quantique* , DUNOD, 2015.
- [4] SEMAY, Claude SILVESTRE-BRAC, Bernard *Relativité restreinte : Bases et applications* , DUNOD, 2010.
- [5] LA RELATIVITÉ, MAIS C'EST TRÈS SIMPLE!, <http://sboisse.free.fr/science/physique/relativite.php> (Valide à la date du 11/02/2018)
- [6] RELATIVITÉ RESTREINTE, <https://www.futura-sciences.com/sciences/definitions/physique-relativite-restreinte-3571/> (Valide à la date du 11/02/2018)
- [7] RELATIVITÉ RESTREINTE, <http://sites.ostralo.net/relativite/> (Valide à la date du 17/02/2018)
- [8] L'EXPÉRIENCE DE MICHELSON ET MORLEY AVEC LA PHYSIQUE CLASSIQUE , http://www.astrosurf.com/miroir_grav/michelson.htm (Valide à la date du 17/02/2018)
- [9] L'EXPÉRIENCE DE MICHELSON ET MORLEY AVEC LA PHYSIQUE CLASSIQUE , https://fr.wikipedia.org/wiki/Exp%C3%A9rience_de_Michelson_et_Morley (Valide à la date du 17/02/2018)
- [10] EXPÉRIENCE DE FIZEAU , https://fr.wikipedia.org/wiki/Exp%C3%A9rience_de_Fizeau (Valide à la date du 10/02/2018)
- [11] L'EXPÉRIENCE DE FIZEAU , <http://expositions.obspm.fr/lumiere2005/experiencefizeau.html> (Valide à la date du 10/02/2018)
- [12] C SUR LA TABLE : MESURE HISTORIQUE DE LA VITESSE DE LA LUMIÈRE , <https://www.lcf.institutoptique.fr/Groupes-de-recherche/Lasers/Membres/Permanents/Gaelle-LUCAS-LECLIN/Mesure-de-c> (Valide à la date du 12/02/2018)
- [13] HISTOIRE DE LA MESURE DE LA VITESSE DE LA LUMIÈRE, http://oncle-dom.fr/sciences/astronomie/histoire/mesure_de_c/mesure_c.htm (Valide à la date du 20/02/2018)
- [14] LES DÉBUTS DE LA RELATIVITÉ RESTREINTE - RELATIVITÉ RESTREINTE (1/3), <http://culturesciencesphysique.ens-lyon.fr/ressource/debut-relativite-restreinte-1.xml> (Valide à la date du 20/02/2018)
- [15] HISTOIRE DE LA RELATIVITÉ RESTREINTE, https://fr.wikipedia.org/wiki/Histoire_de_la_relativite%27restreinte (Valide à la date du 20/02/2018)

- [16] COURS 1,2, http://www.lpthe.jussieu.fr/~dotsenko/LP388_cours_1_2.pdf (Valide à la date du 10/04/2018)
- [17] SANS TITRE, http://www.edu.upmc.fr/physique/bobin_04001/jlb-rel-3.pdf (Valide à la date du 10/04/2018)
- [18] TRANSFORMATIONS DE LORENTZ, https://fr.wikipedia.org/wiki/Transformations_de_Lorentz (Valide à la date du 10/04/2018)
- [19] LA MESURE DE LA VITESSE DE LA LUMIÈRE, <http://www.ac-nice.fr/clea/lunap/html/VitLum/VitLumActiv2.html> (Valide à la date du 16/02/2018)
- [20] OLYMPIADES DE PHYSIQUE 2004, http://www.odpf.org/images/archives_docs/11eme/memoires/gr-3/memoire.pdf (Valide à la date du 16/02/2018)
- [21] DÉTERMINATION DE LA VITESSE DE LA LUMIÈRE : OLE ROMER, JUPITER ET LE COUP DE "LA CERVELLE", <http://www.linternaute.com/actualite/societe/1348609-determination-de-la-vitesse-de-la-lumiere-ole-romer-jupiter-et-1> (Valide à la date du 16/02/2018)
- [22] OLYMPIADES DE PHYSIQUE 2004, http://www.odpf.org/images/archives_docs/11eme/memoires/gr-3/memoire.pdf (Valide à la date du 16/02/2018)
- [23] DE LA LOI DE DESCARTES AU PRINCIPE DE FERMAT, <http://pcsi-unautreregard.over-blog.com/article-3888874.html> (Valide à la date du 16/02/2018)
- [24] MESURE DE LA VITESSE DE LA LUMIÈRE, http://www.lerepairedessciences.fr/seconde/univers/chap1/texte_histoire_vitesse_lumiere.pdf (Valide à la date du 16/02/2018)
- [25] 49.RELATIVITÉ RESTREINTE, <http://www.sciences.ch/htmlfr/cosmologie/cosmorelativisteres01.php> (Valide à la date du 13/03/2018)
- [26] PARTIE II RELATIVITÉ RESTREINTE, <http://www.phys.ens.fr/cours/notes-de-cours/jmr/relativite.pdf> (Valide à la date du 14/04/2018)
- [27] GRAPHE DE LA FONCTION TANGENTE HYPERBOLIQUE SUR UNE PARTIE DE \mathbb{R} , https://fr.wikipedia.org/wiki/Tangente_hyperbolique#/media/File:Hyperbolic_Tangent.svg (Valide à la date du 15/05/2018)
- [28] SCHÉMA ILLUSTRANT L'EXPÉRIENCE DE FIZEAU http://expositions.obspm.fr/lumiere2005/images/exp_fizeau.jpg (Valide à la date du 10/02/2018)
- [29] SCHÉMA ILLUSTRANT LES TRANSFORMATIONS DE LORENTZ <https://www.cv.nrao.edu/course/ast534/LorentzTransform.html> (Valide à la date du 09/04/2018)
- [30] IMAGE DE COUVERTURE https://www.canal-u.tv/media/images/scavoies.magiciens.de.la.lumi.re_18096/experience.foucault.jpg (Valide à la date du 15/06/2018)
- [31] SCHÉMA DE DÉMONSTRATION UTILISÉ PAR RÖMER <http://astronomie-smartsmur.over-blog.com/article-4-09-calcul-de-la-vitesse-de-1> (Valide à la date du 16/05/2018)
- [32] EXPÉRIENCE DE ROEMER (PAR GUILLAUME OUTREQUIN), <https://www.youtube.com/watch?v=gSrbtTgH7JA> (Valide à la date du 16/02/2018)
- [33] HISTOIRE DES MESURES DE LA VITESSE DE LA LUMIÈRE (PARTIE 1) PRÉSENTÉ PAR JAMY GOURMAUD EXTRAIT DU FILM DOCUMENTAIRE HISTOIRE DES MESURES DE LA VITESSE

DE LA LUMIÈRE RÉALISÉ PAR GEORGES LE PIOUFFLE UNE PRODUCTION DU MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE ET DE LA RECHERCHE ET DE RIFF INTERNATIONAL PRODUCTION (2006) https://www.youtube.com/watch?v=GFvy1_EevwU (Valide à la date du 16/02/2018)

- [34] ROMER ET LA VITESSE DE LA LUMIERE (PAR LA CHAINE YOUTUBE UNIVERSITÉ PARIS-SUD), <https://www.youtube.com/watch?v=go2rb9RKLxM> (Valide à la date du 16/02/2018)

Annexe A

Autre démonstration des transformations de Lorentz

Cette démonstration se rapproche plus de l'approche historique qu'ont eu les scientifiques que la démonstration avec les fonctions hyperbolique. par ailleurs cette démonstration est plus longue.

On rappelle les conditions de départ. La vitesse de la lumière est c et est invariante dans tout référentiel. On observe un évènement dans R et R' , deux repères galiléens tels que R' se déplace à la vitesse V constante dans la direction x par rapport à R (voir schéma ci-avant).

Cherchons une transformation linéaire telle que :

$$\begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} = M(V) \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}$$

Avec M une matrice 2×2 telle que O et O' coïncident en $t = t' = 0$. On va donc avoir une relation de la forme

$$x' = ax + bt$$

Si l'on observe le mouvement de O' dans R , on trouvera

$$x_{O'} = Vt$$

Mais comme ce point est fixe dans R' ,

$$x'_{O'} = 0$$

Et donc

$$aVt + bt = 0$$

En simplifiant par t on obtient :

$$aV + b = 0$$

Et donc

$$b = -aV$$

Notre relation de départ devient donc :

$$x' = ax + bt = ax - aVt = a(V)(x - Vt)$$

Cherchons à présent $a(V)$. Pour cela nous allons utiliser une astuce de Jean-Marc LEVY LEBLOND qui consiste à remarquer que $a(V)$ est pair, c'est à dire $a(V) = a(-V)$. Pour ce faire,

on inverse le sens des x . Le repère R' se déplace donc maintenant dans la direction $-x$ à la vitesse $-V$. Posons $X = -x$ et $X' = -x'$. D'après les relations trouvées ci-dessus, on devrait avoir :

$$X' = a(-V)[X - (-V)t]$$

C'est à dire :

$$X' = a(-V)[X + Vt]$$

Et donc, en repassant avec x et x' :

$$-x' = a(-V)[-x + Vt]$$

Et donc en multipliant par -1 on obtient :

$$x' = a(-V)[x - Vt]$$

L'unique solution pour rendre cette expression cohérente avec nos premiers résultats est donc que $a(V) = a(-V)$.

Continuons. A présent on revient avec nos x dans le bon sens mais on considère le mouvement de R par rapport à R' . R se déplace donc à la vitesse $-\vec{V}$ par rapport à R' . La lecture inverse nous donne donc la relation :

$$x = a(-V)[x' - (-V)t']$$

Ce qui équivaut à :

$$x = a(V)[x' + Vt']$$

Cette formule a d'intéressant le fait de faire apparaître t' .

Considérons maintenant en $t = t' = 0$, un flash lumineux libérant un photon et regardons-le se propager. Dans R , se coordonnées seront $x = ct$ et dans R' , $x' = ct'$. Remplaçons ces nouveaux x et x' dans les relations que nous avons déjà trouvées.

$$\begin{cases} ct' = a(V)[ct - Vt] = a(V)[c - V]t \\ ct = a(V)[ct' + Vt'] = a(V)[c + V]t' \end{cases}$$

En multipliant ces deux formules on obtient :

$$c^2 tt' = a^2(V)(c - V)(c + V)tt'$$

Et donc :

$$a^2(V)(c^2 - V^2) = c^2$$

D'où :

$$a^2(V) = \frac{c^2}{c^2 - V^2}$$

Ce qui nous donne :

$$a^2(V) = \frac{1}{1 - \frac{V^2}{c^2}} = \frac{1}{1 - \beta^2} = \gamma^2$$

On a donc :

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

On a ici gardé le signe $+$ en passant à la racine car pour des vitesses petites devant c : $\gamma \approx 1$; et de cette façon : nos premières relations redonnent les transformations classiques de Galilée $x' = x - Vt$.

On a donc pour le moment

$$\begin{cases} x = \gamma(x' + Vt') \\ x' = \gamma(x - Vt) \end{cases}$$

ce qui nous donne :

$$t' = \frac{x - \gamma x'}{\gamma V}$$

C'est à dire :

$$t' = \frac{x - \gamma^2(x - Vt)}{\gamma V}$$

Et donc :

$$t' = \frac{1 - \gamma^2}{\gamma V} x + \gamma t$$

Or :

$$\gamma^2 = \frac{1}{1 - \beta^2}$$

Donc :

$$1 - \gamma^2 = 1 - \frac{1}{1 - \beta^2} = \frac{-\beta^2}{1 - \beta^2} = -\beta^2 \gamma^2$$

Ainsi t' devient :

$$t' = \frac{-\beta^2 \gamma^2}{\gamma V} x + \gamma t = \frac{-\beta^2 \gamma}{V} x + \gamma t = \frac{-V}{c^2} \gamma x + \gamma t$$

Donc :

$$t' = \gamma \left(\frac{-V}{c^2} x + t \right)$$

Et par extension, en multipliant par c :

$$ct' = \gamma(-\beta x + ct)$$

Soit l'expression que nous devons retrouver (cf. 2.4.1).

Annexe B

Fonction Tangente Hyperbolique

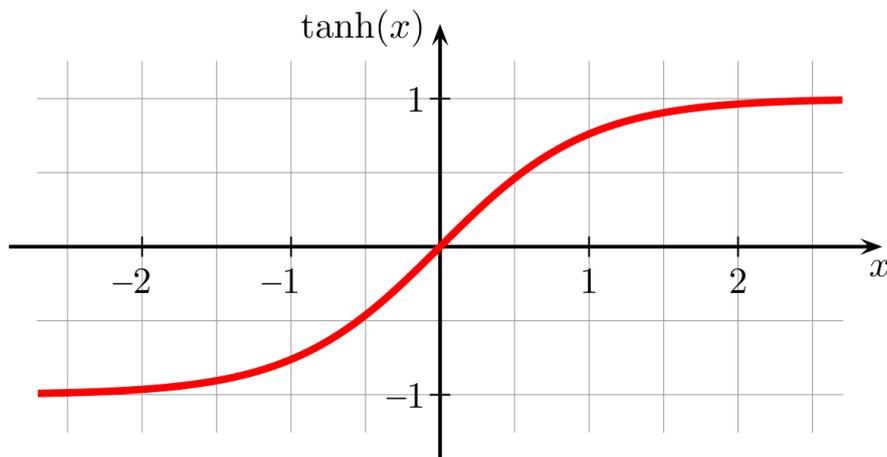


FIGURE B.1 – fonction Tangente hyperbolique

Faisons ainsi le lien avec $\frac{v}{c} = th(\theta)$: l'étude de la fonction montre donc que l'on ne peut pas dépasser 1 et donc, cela confirme que $v < c$, il n'est donc pas physiquement possible de dépasser la vitesse de la lumière