Introduction à la théorie des graphes

(à compléter avec les exemples en cours/TD)

Les graphes sont un puissant outil de modélisation permettant d'étudier des ensembles d'objets liés par une relation binaire. Ils sont utilisés dans la plupart des domaines d'application : physique, chimie, informatique, statistique, sciences sociales...

On considère que l'apparition des graphes remonte à **Euler** qui en 1736 a étudié le fameux problèmes des ponts de Königsberg (actuelle ville de Kalinigrad) : pouvait-on se promener dans la ville en traversant une et une seule fois chacun des sept ponts de la ville ? La solution de ce problème a permis de définir la notion de *cycle eulérien* et donne lieu à un théorème désormais classique : c'est possible si chaque sommet du graphe qui modélise la ville est de degré pair (voir définitions plus loin). De nos jours, ce résultat est appliqué notamment dans l'industrie pour la conception de circuits électroniques.

De nombreux résultats sont apparus dans la seconde partie du XIXème siècle, notamment en raison des applications en électricité (lois de Kirschoff...).

Le mathématicien le plus connu pour la théorie des graphes est **Claude Berge** (1926-2002, c'est également un des membres fondateurs de l'Oulipo), à qui on doit une bonne partie du vocabulaire.

I Graphes orientés et graphes non orientés

Un **graphe non orienté** G = (X,U) est défini par :
- un ensemble X dénombrable de sommets
- une famille U d'arêtes u ={x,y} avec x et y des sommets

Une arête entre un sommet et lui-même est appelé une **boucle**.
Remarquons qu'il peut y avoir plusieurs arêtes entre deux sommets (d'où le terme de *famille* au lieu d'*ensemble*), on parle alors d'**arêtes multiples**. Un graphe est dit **simple** s'il n'a pas d'arêtes multiples ni de boucles.

Dans certains cas, on a besoin de définir une orientation des arêtes, on parle alors d'arcs, et on dit que le graphe est orienté :

Un **graphe orienté** G = (X,U) est défini par :
- un ensemble X dénombrable de sommets
- une famille U d'arcs u =(x,y) avec x et y des sommets

On dira d'un graphe orienté qu'il est **simple** s'il n'a ni boucles ni arcs multiples.

Pour alléger les notations, on note u = xy un arc de x à y ou une arête entre x et y (suivant que le graphe est orienté ou non).

II Voisins, degrés

Soit G = (X,U) un graphe simple orienté et x un sommet.

On appelle **demi-degré extérieur** de x le nombre $d^+(x)$ d'arcs issus de x.
On appelle **demi-degré intérieur** de x le nombre $d^-(x)$ d'arcs entrant en x.
Le **degré** de x est : $d(x) = d^+(x) + d^-(x)$.

Si xy est un arc, on dit que xy est **incident extérieurement** à x et **incident intérieurement** à y (une arête xy est **incidente** à x et y).
Ont dit que x est un **prédécesseur** de y et que y est un **successeur** de x.

On note $\Gamma^+(x)$ l'ensemble des successeurs de x et $\Gamma^-(x)$ l'ensemble des prédécesseurs de x.
L'ensemble des voisins de x est : $\Gamma(x) = \Gamma^+(x) \cup \Gamma^-(x)$.

On note $\delta^+(x)$ l'ensemble des arcs incidents extérieurement à x et $\delta^-(x)$ l'ensemble des arcs incidents intérieurement à x. L'ensemble des arcs incidents à x est alors : $\delta(x) = \delta^+(x) \cup \delta^-(x)$.

On a alors par définition : $d^+(x)= \mathrm{Card}(\delta^+(x))$
Pour un graphe simple : $d^+(x) = \mathrm{Card}(\Gamma^+(x))$

Exercice : démontrer le théorème suivant.

Théorème : Soit G = (X,U) un graphe non orienté. Alors le nombre de sommets de degré impair est pair.