

Systemes d'Informations Géographiques - Graphes

Institut National des Sciences Appliquées - Rouen
Département Architecture des Systèmes d'Information
michel.mainguenaud@insa-rouen.fr

Graphe et Spatialisation

- La topologie est intrinsèque au modèle
- La localisation (géométrie du réseau) par
 - Géoréférencement des noeuds
 - Géoréférencement des arcs/arêtes
- Opérateurs sur les graphes pour l'analyse
 - Isthmes
 - Cliques, ...

Eléments de fragilité

- Articulation :
 - Noeud de passage obligé. Sa suppression entraine l'augmentation du nombre de composantes connexes
- Isthmes :
 - Arête de passage obligé. Sa suppression entraine l'augmentation du nombre de composantes connexes
- Coupe :
 - Ensemble d'arcs qui, retirés, supprime le chemin d'une source à une destination

Différents réseaux

- Optimal
 - Réalise le meilleur compromis entre un objectif (e.g., desservir un territoire) et un ensemble de contraintes (e.g., budgétaire) : Maximisation d'une utilité
- Idéal
 - Etablir, sans contrainte, un réseau visant à une évaluation (modèle absolu)
- Référence (version affaiblie de l'idéal)
 - Répondre le mieux aux attentes (relier de manière aussi directe que possible des noeuds)
 - Respecter des critères (nombre fini de noeuds)

Anamorphose

- Distribuer les noeuds du réseau sur un espace à deux dimensions de sorte que le positionnement spatial relatif reflète leurs éloignements relatifs vis à vis de la fonction de coût
 - Topologie conservée
 - Distance euclidienne = distance-réseau
 - Pas de solution exacte en général ($2 \times n$ coordonnées pour $n \times (n - 1)$ distances).
- Anamorphose unipolaire : se fait relativement à un sommet de référence

Applications cibles

- Gestion de flottes
 - Bus, taxi, ...
- Gestion de réseaux
 - eaux, électricité, gaz, ...
- ... Tout ce qui modélise naturellement par des graphes (ensemble de noeuds et un ensemble de liaisons orientées ou non).
- ... Tout ce qui se manipule au travers d'un langage de règles (système expert, ...)

Conséquences

- Modèle :
 - Basé sur la théorie des graphes
 - Graphe à plat ou avec plusieurs niveaux d'abstraction
- Opérateurs
 - Basés essentiellement sur la récursivité (fermeture transitive) modélisés par des règles
 - Rôle important des fonctions d'agrégats
- Visualisation
 - Ensemble de résultats sous contrainte d'agrégats (ambiguïté de visualisation)

Outils

- Logique :
 - Propositions
 - Prédicats
 - Floue,
 - Ordre supérieur, ...
- Monde fermé :
 - Seuls les faits positifs sont enregistrés dans la base de données (extension avec Datalog^{neg})

Concepts de la logique

- Valeurs booléennes Vrai, Faux
- Tiers-exclus
- Connecteurs logiques : Non(\neg), ET(\wedge), OU (\vee)
 - Seul le couple (non, et) ou (non, ou) est suffisant
- Connecteurs dérivés :
 - $A \Rightarrow B \Leftrightarrow \neg A \vee B$, ...
- Un système de parenthèses pour gérer la priorité des connecteurs : {...}, (...)

Langage de règles

- Calcul des propositions
 - Proposition (expression booléenne)
 - Vrai, Faux, $N = 0, \dots$
 - Notation symbolique
 - $P = 7$ est un nombre premier
 - $Q = (N = 0)$
 - Formule
 - Une proposition
 - Formules liées entre elles par des connecteurs logiques
 - $P \Rightarrow Q \Leftrightarrow Q \vee \neg P$

Concepts (2)

- Axiome
 - Proposition atomique admise a priori et non démontrable
- Théorème
 - Proposition démontrable à partir d'axiomes et/ou d'autres théorèmes par un raisonnement formel valide
- Règle d'inférence
 - Schéma de raisonnement valide permettant de construire de nouvelles propositions à partir de prémisses (ex : modus ponens)
 - Exemple modus ponens :
 - Si A Alors B \wedge A \rightarrow B

Formule

- Définition récursive

- Toute proposition est une Formule Bien Formée (FBF)
- Si F est une FBF alors $\neg F$ est une FBF
- Si F est une FBF alors (F) est une FBF
- Si F_1 et F_2 sont des FBF alors $F_1 \wedge F_2$ est une FBF (resp. \vee, \dots)

Formes particulières

- Forme Normale Conjonctive (FNC)
 - Des ET de OU
- Forme Normale Disjonctive (FND)
 - Des OU de ET
- Propriété :
 - Tout FBF admet une FNC et une FND qui lui est logiquement équivalente
 - Il existe un algorithme pour les déterminer

Calcul des propositions

- Interprétation d'une formule
 - Attribution d'une valeur (Vrai, Faux) à chaque symbole de proposition dans la formule
 - $(P \wedge (\neg Q)) \Rightarrow ((\neg P) \vee R)$
 - $P : \text{Vrai}, Q : \text{Faux}, R : \text{Faux}$
 - $\neg Q : \text{Vrai}$
 - $P \wedge \neg Q : \text{Vrai}$
 - $\neg P \vee R : \text{Faux}$
 - Donc Formule : Faux
- Un raisonnement logique ($I \Rightarrow$) est valide ssi sa conclusion est la conséquence logique de ses prémisses.

Interprétation

P	Q	$\neg P$	P et Q	P ou Q	$P \Rightarrow Q$	$P = Q$
VRAI	VRAI	FAUX	VRAI	VRAI	VRAI	VRAI
VRAI	FAUX	FAUX	FAUX	VRAI	FAUX	FAUX
FAUX	VRAI	VRAI	FAUX	VRAI	VRAI	FAUX
FAUX	FAUX	VRAI	FAUX	FAUX	VRAI	VRAI

Lois du calcul

- Idempotence
 - $P \wedge P \Leftrightarrow P$
 - $P \vee P \Leftrightarrow P$
- Associativité
 - $(P \wedge Q) \wedge R \Leftrightarrow P \wedge (Q \wedge R)$
 - $(P \vee Q) \vee R \Leftrightarrow P \vee (Q \vee R)$
- Commutativité
 - $P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P$
 - $P \wedge Q \Leftrightarrow Q \wedge P$
- Distributivité
 - $P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$
 - $P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$

Lois (2)

- Identité
 - $P \vee \text{Faux} \Leftrightarrow P$ $P \vee \text{Vrai} \Leftrightarrow \text{Vrai}$
 - $P \wedge \text{Vrai} \Leftrightarrow P$ $P \wedge \text{Faux} \Leftrightarrow \text{Faux}$
- Complémentarité
 - $\neg \text{Vrai} \Leftrightarrow \text{Faux}$
 - $\neg \text{Faux} \Leftrightarrow \text{Vrai}$
 - $P \vee \neg P \Leftrightarrow \text{Vrai}$
 - $P \wedge \neg P \Leftrightarrow \text{Faux}$
- Involution
 - $\neg \neg P \Leftrightarrow P$
- Lois de Morgan
 - $\neg (P \vee Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$
 - $\neg (P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q$

Lois ⁽³⁾

- Propriétés des formules
 - Valide (tautologie) : vraie pour toute interprétation
 - Satisfaisable : vraie pour au moins une interprétation
 - Contradictoire : fausse pour toute interprétation
- Satisfaisable :
 - Table de vérité : chacune des propositions prend la valeur Vrai ou Faux

Table de Vérité

- Formule :
 - $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow ((\neg P) \Rightarrow (\neg Q))$
 - Satisfaisable ?

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$\neg P$	$\neg Q$	$\neg P \Rightarrow \neg Q$	F
VRAI	VRAI	VRAI	FAUX	FAUX	VRAI	VRAI
VRAI	FAUX	FAUX	FAUX	VRAI	VRAI	VRAI
FAUX	VRAI	VRAI	VRAI	FAUX	FAUX	FAUX
FAUX	FAUX	VRAI	VRAI	VRAI	VRAI	VRAI

Preuve par réfutation

- Méthode 1 :
 - a) Supposer que la formule est fausse
 - b) Tenter d'engendrer une contradiction
 - c) Conclure (valide, invalide)
- Méthode 2 :
 - Construire une formule avec la négation de la partie droite
 - Montrer qu'il y a contradiction

Exemple (1)

$$((\neg P) \vee (\neg Q)) \Rightarrow (\neg (P \wedge Q))$$

F

$$((\neg P) \vee (\neg Q)) \Rightarrow (\neg (P \wedge Q))$$

-----V-----

F

-----F-----

$$((\neg P) \vee (\neg Q)) \Rightarrow (\neg (P \wedge Q))$$

-----V-----

F

-----V-----

$$((\neg P) \vee (\neg Q)) \Rightarrow (\neg (P \wedge Q))$$

-----V-----

$$((\neg P) \vee (\neg Q)) \Rightarrow (\neg (P \wedge Q))$$

V V

-----F-----F-----

-----F-----

donc valide

Exemple ⁽²⁾

- A et Si A alors B $\models B$ est il valide ?
 - $(A \wedge A \Rightarrow B) \models B$
 - $A \wedge (A \Rightarrow B) \wedge \neg B$ doit être fausse
 - $A \wedge (\neg A \vee B) \wedge \neg B$
 - $\{(A \wedge \neg A) \vee (A \wedge B)\} \wedge \neg B$
 - $A \wedge B \wedge \neg B$
 - Contradiction donc formule vraie

Logique des Prédicats

- Termes

- Variables : x, y, \dots
- Constantes : a, b, c, \dots
- Fonctions de termes : f, g, \dots

- Formules

- Atomiques : Prédicats de termes : $P(x, y)$
- Reliées : conjonction, disjonction, négation
- Quantifiée : $\forall x \exists y (P(x,y))$

Sémantique

- Interprétation sur un domaine de discours D
- Toute formule possède une valeur de vérité sur le domaine D
- Un modèle de formule est un domaine où la formule est vraie
- Certaines formules n'ont pas de modèle (non satisfaisable)
- Une formule fermée n'a pas de variable libre

Propriétés

- La logique des propositions est décidable : Il existe une séquence finie montrant si une proposition est valide ou contradictoire
- La logique des prédicats est indécidable
- La logique des prédicats est semi-décidable (il existe une séquence finie montrant si un prédicat est valide)
- La logique des prédicats réduite aux clauses de Horn est décidable.

Manipulations

- Toute formule fermée peut être mise sous forme de clauses (plus de quantificateurs)
 - Elimination des implications
 - Réduction de la portée des négations
 - Mise sous forme conjonctive (et de ou)
 - Elimination des quantificateurs (\rightarrow skolem : constante ou fonction)
 - Mise sous forme de clauses

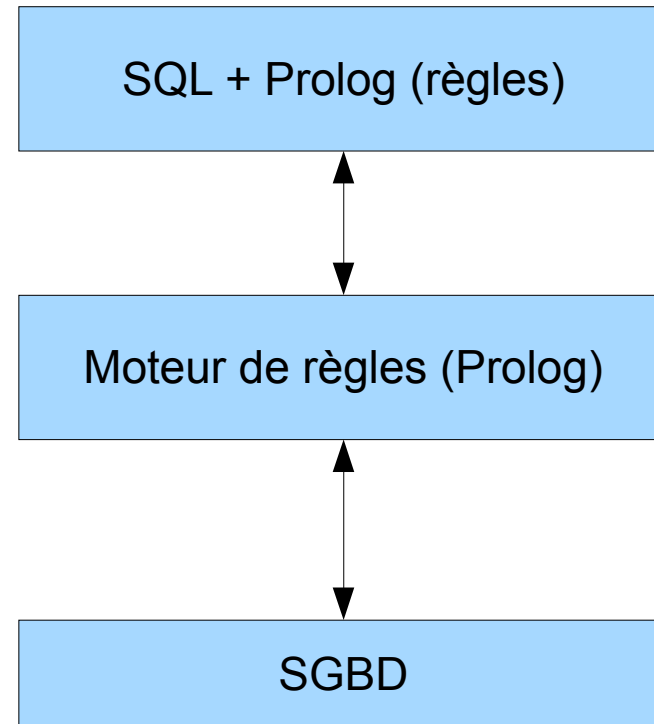
Clauses de Horn

- Clause avec au plus un terme positif (ex Prolog)
 - $H1 \wedge H2 \wedge \dots \wedge Hn \Rightarrow C$
 - $\neg(H1 \wedge H2 \wedge \dots \wedge Hn) \vee C$
 - $\neg H1 \vee \neg H2 \vee \dots \vee \neg Hn \vee C$
- Base de fait :
 - $\text{age}(P_1, 16)$
 - $\text{age}(P_2, 20)$
- Base de Règles
 - $\text{majeur}(X) \text{ :- } \text{age}(X, Y) \text{ superieur}(Y, 18)$
- Question :
 - $\text{majeur}(P_1)$

Architecture

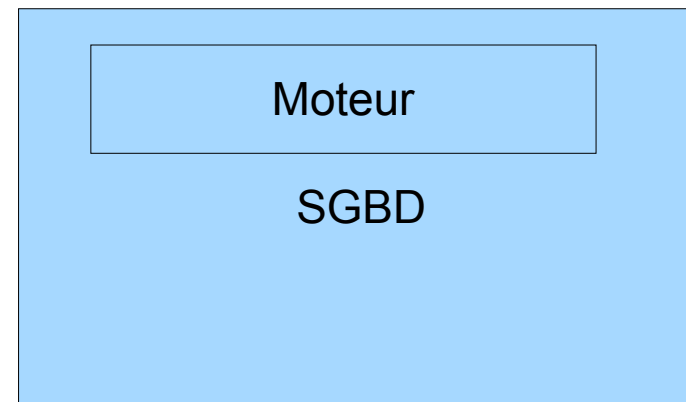
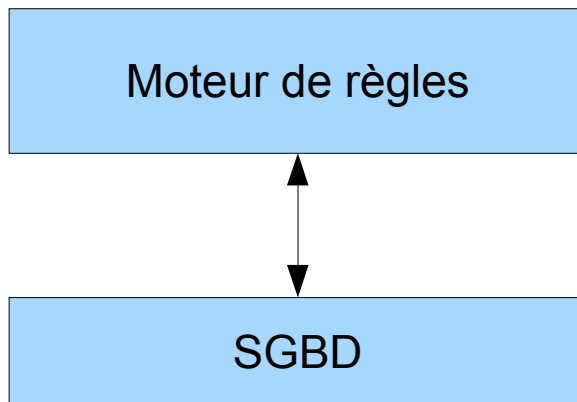
- Couplage faible

- Approche tuple à tuple dans le raisonnement
- Sous-exploitation du SGBD
- Problème de performances



Architecture (2)

- Couplage fort / intégration
 - Approche ensembliste (Datalog)
 - Moteur de règles hors ou dans du SGBD



Vocabulaire

- Base de données extensionnelle (Extensional DB)
 - Ensemble des faits connus (tuples)
- Base de données intensionnelle (Intensional DB)
 - Ensemble des faits déduits
- Clause
 - Tête (head) : prédicat intensionnel
 - Corps (body) : prédicat(s) intensionnel(s) et/ou extensionnel(s)

Vocabulaire ⁽²⁾

- Point fixe (fixed point)
 - Application répétée de l'ensemble des règles jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de faits (déduits) nouveaux.
 - Un fait est vrai s'il appartient au point fixe.
- But (Goal)
 - équivalent à une requête en BD traditionnelles
- Règle (Rule)
 - Vue dans les BD traditionnelles
- Fait (Ground clause / Fact)
 - Tuple dans les BD traditionnelles

Outil : Base de données déductive

- Des grands espoirs
 - Milieu des années 1980
 - Bases de données conventionnelles
 - Gros volume de données
 - Faible puissance des opérateurs
 - Systèmes expert
 - Faible volume de données
 - Langage de règle
- ... aux grands désespoirs
 - Nivellement par le bas
 - Datalog

Gestion de transport ⁽²⁾

- Aller de Nice à Paris éventuellement en passant par des grandes villes
- Règles :
 - Aller (x, y, Caractéristique) :-
LIAISONS (x, y)
 - Aller (x, y, Caractéristique) :-
LIAISONS (x, z)
VILLES (z, Caractéristique)
Aller (z, y, Caractéristique)
- Requête : R1 <- Aller (Paris, Nice, Grande)