Projet Physique

Ala-eddine BENHARRAT, Yahia ATMANI

19 juin 2017

Organisation du travail

L'enseignement de P6 s'est déroulé sur un créneau de 1h30 le mardi matin de 8h00 à 9h30 avec notre professeur.

Les deux premières semaines ont été consacré à une documentation générale sur le principe de moindre action. Nous avons ainsi pu découvrir les grandes lignes du principe de moindre action.
Par la suite, le travail était organisé de la manière suivante : d'une semaine à l'autre, Mr Duval donnait à un groupe un sujet sur lequel il devait se documenter. La semaine suivante, ce groupe devait alors faire un exposé sur le sujet en question. Les autres groupes devaient être attentifs pour comprendre le raisonnement mis en place. En effet, Mr Duval pouvait décider de nous évaluer sur un point particulier.
Nous avons commencé à rédiger ce rapport en mai. En effet, il a fallu organiser toutes les notions vues en classe.

Table des matières

Introduction

L'optimisation est une notion omniprésente dans notre vie quotidienne. On cherche à acquérir le maximum (de biens, de connaissances, etc.) en dépensant le minimum (de temps, d'énergie, etc.). Notre vie quotidienne est faite de la recherche de ces maximums et minimums. Ces notions de maximums et de minimums ont une place centrale en physique. Elles ont conduit à l'apparition d'une nouvelle branche de la physique mathématique au XVIIe siècle : le calcul des variations. Le calcul des variations est un outil fondamental en physique où l'on va chercher à minimiser l'action comme nous le verrons dans la suite. Notre exposé s'articulera donc en 3 parties. Nous allons tout d'abord commencé avec le problème du brachistochrone puis sa résolution en utilisant l'optique géométrique. Dans un second temps, nous verrons le principe de moindre action et l'équation d'Euler-Lagrange. Enfin, nous finirons en appliquant l'équation d'Euler-Lagrange sur différents exemples.

Chapitre 1

Problèmes de moindre temps

Le problème du déplacement en un minimum de temps est un problème ancien. Très tôt, les Hommes ont cherché à comprendre la nature de la lumière. Dès le IIIe siècle av. J.C, les grecs ont admis que la lumière se propage de façon rectiligne et Euclide énonça la loi de la réfléxion. Elle stipule qu'un rayon lumineux est réflechi par une surface de telle sorte que l'angle fait par la normale et le rayon incident est le même que celui entre la normale et le rayon réflechi. Au 1er siècle ap. J.C, Héron d'Alexandrie affirme que « la lumière suit le chemin le plus court ». Cet énoncé est en fait ambigu. Il convient de préciser par rapport à quoi le chemin est-il le plus court. L'énoncé exact auquel pensait Héron d'Alexandrie est « la lumière suit le chemin le plus court en distance ». Ce qui est faux comme nous le verrons dans la suite. Curieusement, même si la lumière a très tôt attiré l'attention, ce n'est pas d'elle qu'est venue la question du déplacement en un minimum de temps. Le problème qui était posé est le suivant : c'est celui d'une bille lâché d'un point A dans le champ de pesanteur et que l'on veut faire aller en un minimum de temps en un point B, d'altitude inférieure mais pas sur la verticale de A. Pour cela, on oblige la bille à suivre sans frottement une trajectoire donnée. La question est de savoir quelle est cette trajectoire qui minimise le temps de parcours.

En 1610, Galilée alors professeur à l'université de Padoue pensait avoir trouvé la solution. Pour lui, la courbe recherchée était un arc de cercle. Galilée compara (sûrement en contruisant lui-même les objets) le temps mis par une bille pour aller d'un point A en un point B suivant une droite et suivant un arc de cercle. Il en conclut ainsi que l'arc de cercle est solution du problème. Ce qui est faux comme nous allons le voir dans la suite. A sa décharge, Galilée était influencé par les connaissances de son époque. En effet, les seules courbes vraiment connues à cette époque étaient la droite, le cercle, la parabole et certaines coniques. Il faut attendre près d'un siècle après cette erreur de Galilée pour voir le problème du déplacement en minimum de temps résolu. Bizarrement, c'est grâce à l'étude de la lumière que sa solution sera établie.

1.1 Le principe de Fermat

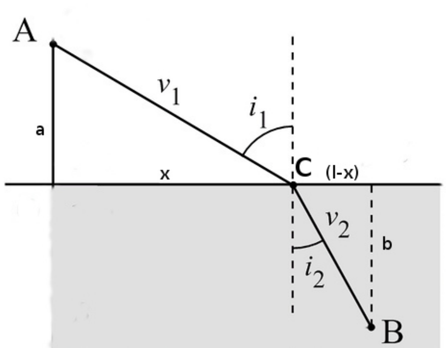
Pierre de Fermat était un magistrat, mathématicien mais aussi physicien français. Il est né dans la première décennie du XVIIe siècle à Montauban et mort le 12 janvier 1665 à Castres. Fermat était passionnée par les mathématiques. Il a contribué au développement du calcul infinitésimal, de la théorie des probabilités, de la théorie des nombres et posé certains problèmes qui ont mis plusieurs siècles avant d'être résolus (on peut citer le grand théorème de Fermat par exemple). En physique, l'oeuvre de Fermat est beaucoup moins importante. On lui doit le principe qui porte son nom.

Principe de Fermat : Le trajet parcouru par la lumière entre deux points est toujours celui qui optimise le temps de parcours.
Pour Fermat, il n'y a en fait qu'un seul chemin possible.
Avec cette intuition géniale, Fermat réussit à retrouver la loi de Snell-Descartes.
Démontrons ce résultat.
Soit une droite séparant deux milieux homogène différénts. La vitesse de la lumière dans le premier milieu est v_1 et elle vaut v_2 dans le second milieu. Soit un point A situé dans le premier milieu et soit un point B situé dans le second milieu. La question qui se pose alors est quel trajet va emprunter la lumière pour aller de A vers B.

D'après la loi de Snell-Descartes sur la réfraction, la lumière va passer par un point C tel que :

$$n_1 sin(i_1) = n_2 sin(i_2) \text{ avec } n_1{=}\tfrac{c}{v_1},\ n_2{=}\tfrac{c}{v_2}\ .$$

Retrouvons ce résultat grâce au principe de fermat :



Soit t_1 le temps pour parcourir la distance AC , t_2 le temps pour parcourir la distance CM.

Minimiser le temps de parcours de A vers B revient à trouver x tel que $f(x) = t_1 + t_2$ soit minimum.

Or

$$t_1 = \frac{AC}{v_1} = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{v_1} \quad et \quad t_2 = \frac{CB}{v_2} = \frac{\sqrt{b^2 + (l - x)^2}}{v_2}$$

Donc :

$$f(x) = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{b^2 + (l-x)^2}}{v_2}$$

La focntion f est définie et dérivable sur son ensemble de définition $[0; l]$, on a donc :

$$f'(x) = \frac{x}{v_1\sqrt{a^2 + x^2}} + \frac{x - l}{v_2\sqrt{b^2 + (l-x)^2}}$$

Pour $x = 0$ f est négative et pour $x = l$ f est positive, il existe donc une valeur x tel que $f'(x) = 0$, pour cette valeur, la fonction f atteint son minimum d'après l'etude de signe de la dérivée, on a alors :

$$f'(x) = 0 \implies \frac{x}{v_1\sqrt{a^2 + x^2}} + \frac{x - l}{v_2\sqrt{b^2 + (l-x)^2}} = 0$$

Or

$$sin(i_1) = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} \text{ et } sin(i_2) = \frac{l - x}{\sqrt{b^2 + (l-x)^2}}$$

D'ou

$$\frac{1}{v_1} sin(i_1) - \frac{1}{v_2} sin(i_2) = 0 \implies \frac{1}{v_1} sin(i_1) = \frac{1}{v_2} sin(i_2)$$

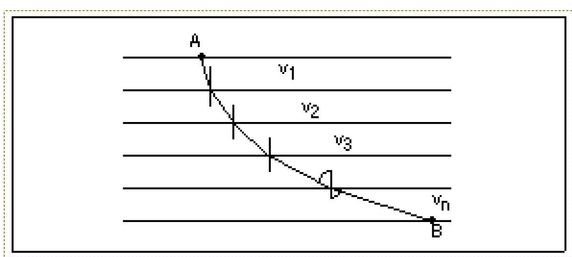
En multipliant par c, la vitesse de la lumière dans le vide, on retouve bien :

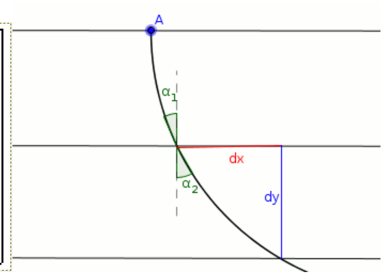
$$n_1 sin(i_1) = n_2 sin(i_2)$$

Ainsi, Fermat retouve la loi de Snell-Descartes. Ce principe a été énoncé de manière quasi-philosophique. « La nature agit toujours par les voies les plus courtes et les plus simples » comme le dit Fermat lui-même. Ce qui peut-être troublant si l'on ne croit pas en Dieu. En effet, par nature on peut ici entendre Dieu. Dieu est dans la nature. On reconnaît la philosophie de Spinoza. Le principe de Fermat implique que la nature est active, qu'elle est « consciente ».
On peut également se demander pourquoi c'est le temps qui doit être minimisé et non la distance par exemple. Est-ce le hasard ou la volonté d'une puissance supérieure ? Ce sont questions qui troublèrent certaines personnes comme Descartes. Par ailleurs, ce principe de moindre temps posa un autre problème philosophique aux cartésiens. Ils ne pouvaient admettre que les extrémités du trajet de la lumière soient connues et surtout le point d'arrivée. Cela impliquait l'existence d'une cause finale. Ce qui est en désaccord avec le principe de causalité. Un effet ne peut précéder la cause qui l'engendre. Quoiqu'il en soit et malgré toutes ces critiques, Fermat venait de poser les bases d'une nouvelle physique.

1.2 La résolution du brachistochrone

Les travaux de Fermat donnèrent des idées à Jean Bernoulli. En 1696, il propose un problème à la communauté scientifique : le problème du brachistochrone. Le mot brachistochrone vient du grec « brakhistos » qui signifie le plus court et « chronos » qui signifie temps. C'est en fait le problème qu'avait essayé de résoudre Galilée et sur lequel il s'était trompé. Jean Bernoulli n'a pas proposé ce problème à la communauté scientifique de manière anodine. La communauté scientifique vit des querelles comme toute autre communauté. A cette époque, une querelle opposait Leibniz(1646-1716) à Newton (1643-1727). Les deux prétendaient avoir trouvés le calcul différentiel. Newton avait dû le développer pour les besoins de sa théorie de la gravitation. Seulement, ses publications ne sont intervenues qu'en 1713 soit 30 ans après celles de Leibniz. Jean Bernoulli qui était un fervent défenseur de Leibniz posa alors le problème du brachistochrone pour mettre Newton au défi. Finalement, Newton trouva la solution au problème et Bernoulli dû s'incliner en disant : « nous reconnaissons le lion par sa griffe ». Indépendamment de Newton, Jean Bernoulli, Leibniz, Jacques Bernoulli et de L'Hopital trouvèrent la solution au problème. Toutes ces solutions étaient différentes. Elles s'appuyaient sur la géométrie et elles n'étaient pas généralisables. Parmi toutes ces démonstrations, celle de Jean Bernoulli est sûrement la plus élégante. Elle s'appuie sur le principe de Fermat. Voyons comme Jean Bernoulli a-t-il résolu le problème du brachistochrone.





Jean Bernoulli commence par supposer que le milieu dans lequel se propage la bille est constitué d'une infinité de couches horizontales et très fines. La bille est alors assimilée dans chaque couche à un rayon lumineux. D'après le principe de Fermat le chemin suivi dans chaque couche est donc un segment. Notons α_i l'angle fait par notre rayon et la normale dans chaque petite bande et v_i la vitesse dans chacune de ces bandes. D'après la loi de Snell-Descartes, on obtient

$$\frac{\sin(\alpha_1)}{v_1} = \frac{\sin(\alpha_2)}{v_2} = \frac{\sin(\alpha_3)}{v_3} = \ldots\ldots\ldots\ldots = \frac{\sin(\alpha_n)}{v_n} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Ce qui nous donne pour toute altitude y : $\frac{\sin(\alpha(y))}{v(y)} = \kappa$, où κ est une constante. Jusque-là, Bernoulli fait uniquement appel à des notions d'optique géométrique en omettant complétement le caractère mécanique du problème. Mais il revient à la mécanique pour exprimer la vitesse de la bille. A cette époque, on savait grâce à Galilée qu'un corps en chute libre uniquement soumis à la gravitation avait pour vitesse $v = \sqrt{2gy}$, où g est l'accélération de la gravitation. C'est en fait le théorème de l'énergie mécanique. Bernoulli obtient ainsi (dans la suite, on note $\alpha(y) = \alpha$) :

$$\frac{\sin(\alpha)}{\sqrt{y}} = \kappa\sqrt{2g} \implies \frac{y}{\sin^2(\alpha)} = \frac{1}{2g\kappa} = R$$

Or, $\frac{1}{sin^2(\alpha)} = \frac{\cos^2(\alpha)+\sin^2(\alpha)}{sin^2(\alpha)} = 1 + \cot^2(\alpha)$. Grâce au schéma on voit que $\frac{dx}{dy} = tan(\alpha)$. Donc $\frac{dy}{dx} = y' = \cot(\alpha)$. D'où :

$$\frac{1}{\sin^2(\alpha)} = 1 + (y')^2 \implies y(1 + y'^2) = R$$

Il restait à Bernoulli de résoudre cette équation différentielle. Il est important de noter qu'à cette époque, toutes les méthodes actuelles que nous connaissons n'existaient pas encore. Il a donc fallu improviser. Néanmoins, les fonctions trigonométriques étaient assez bien connues. C'est ce qui a permis à Bernoulli de résoudre l'équation différentielle précédente. Bernoulli posa le changement de variable sui vant :

$$y' = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

Il introduisit donc un angle θ. N'étant pas capable de justifier ce changement de variable, nous allons en utiliser un autre qui nous conduira au même résultat. Voyons tout de même la méthode de Bernoulli. Pour déterminer y :

$$y = \frac{R}{1+y'^2} = \frac{R}{1+\tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} = R\times\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = R\times(\frac{\cos(\theta)+1}{2}) = \frac{R}{2}\times(cos(\theta)+1)$$

Pour x :

$$y' = \frac{dy}{dx} = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{dy}{d\theta} \times \frac{d\theta}{dx} = -\frac{R}{2} \times \sin(\theta) \times \frac{d\theta}{dx}$$

$$dx = -\frac{R}{2} \times \frac{1}{y'} \times \sin(\theta)\, d\theta = -\frac{R}{2} \times \frac{\sin(\theta)}{\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)} d\theta = -\frac{R}{2} \times \frac{2\times\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\times\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$dx = -R\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) d\theta = -R\left(\frac{\cos(\theta)+1}{2}\right) d\theta$$

En intégrant, par rapport à θ, on obtient :

$$x = -\frac{R}{2} \times (\theta + \sin(\theta)) + K$$

On obtient donc les équations suivantes :

$$\begin{cases} x = -\frac{R}{2} \times (\theta + \sin(\theta)) + K \\ y = \frac{R}{2} \times (cos(\theta) + 1) \end{cases}$$

Voyons comment il est possible de résoudre ce problème avec un autre changement de variable qui lui se justifie.
L'équation que l'on veut résoudre est : $y(1 + y'^2) = R$. On a donc :

$$0 \leq y = \frac{R}{1 + y'^2} \leq R$$

Il est donc naturelle de poser : $y = R \times \sin^2(\frac{\theta}{2})$. L'avantage de cette méthode est que l'on obtient y directement. En linéarisant $\sin(\theta)$, on obtient :

$$y = \frac{R}{2} \times (1 - \cos(\theta))$$

Déterminons maintenant x. Pour cela nous avons besoin de y'.

$$y = R \times \sin^2(\frac{\theta}{2}) = \frac{R}{1 + y'^2} \Longrightarrow 1 + y'^2 = \frac{1}{\sin^2(\frac{\theta}{2})} \Longrightarrow y'^2 = \frac{1 - \sin^2(\frac{\theta}{2})}{\sin^2(\frac{\theta}{2})} \Longrightarrow y'^2 = \frac{\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sin^2(\frac{\theta}{2})} \Longrightarrow y' = \frac{1}{\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

On en déduit :

$$\frac{dx}{dy} = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \Longrightarrow dx = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) dy$$

Or,

$$dy = \frac{dy}{d\theta} d\theta = R \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) d\theta$$

On obtient :

$$dx = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \times R \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) d\theta \Longrightarrow \frac{dx}{d\theta} = R \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = R\left(\frac{1 - \cos(\theta)}{2}\right)$$

On en déduit :

$$x = \frac{R}{2} \times (\theta - \sin(\theta))$$

Les équations paramétriques de cette courbe sont donc :

$$\begin{cases} x = \frac{R}{2} \times (\theta - \sin(\theta)) \\ y = \frac{R}{2} \times (1 - cos(\theta)) \end{cases}$$

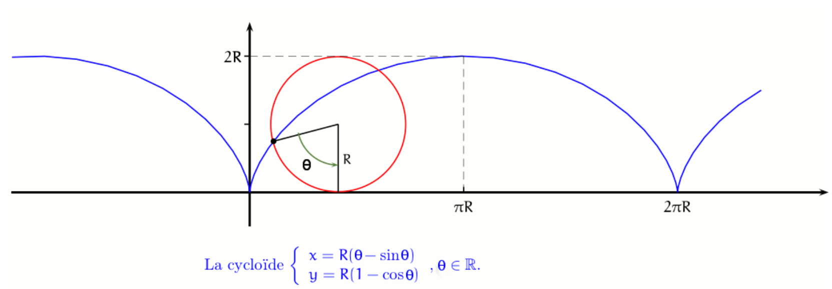
Cette courbe est une cycloïde. On remarque que les équations que nous avons obtenu avec le second changement de variable ne sont pas les mêmes qu'avec le premier. Ces équations sont en fait équivalentes. Pour passer d'une expression à l'autre, il suffit de poser le changement de variable $\theta = \pi - \theta'$.
Jean Bernoulli résout ainsi à partir de principes liés à l'optique géométrique le problème de la brachistochrone. Il vient sans le savoir de poser les bases d'une nouvelle branche de la physique et des mathématiques : le calcul des variations. Cette manière de résoudre le problème est tout de même troublante. En effet, les

objets mécaniques n'ont à priori aucun lien avec la lumière. Pourtant en créant ce pont entre l'optique et la mécanique, Bernoulli va donner des idées à d'autres esprits. Ce qui conduira à l'élaboration de la mécanique quantique.
Il est aussi intéressant de noter qu'il y'a dans cette démonstration les prémices du calcul différentiel. En effet, l'idée de stratifier le milieu de propagation en une infinité de bande très fine rapelle la notion de limite. Cette démonstration est donc très importante à plus d'un titre.
Avant de continuer cette histoire qui nous mènera directement au principe de moindre action, nous allons essayer d'étudier la cycloïde plus en détail. Elle possède en effet de nombreuses propriétés.

1.3 La cycloïde

La cycloïde a pour la première fois était étudiée par Charles Bouvelle en 1501. Galilée l'étudia aussi en 1599. Elle n'était pas connue des Grecs mais pourtant son nom vient du Grec. Cycloïde vient de « kuklos » qui veut dire cercle, roue. Ce nom lui a été donné par Galilée. Géométriquement, cette courbe est la courbe décrite par un point d'un cercle de rayon R roulant sans glisser sur une droite (D). Comme nous l'avons vu précédemment, les équations paramétriques de la cycloïde sont :

$$\begin{cases} x(\theta) = R\left(\theta - \sin\left(\theta\right)\right) \\ y\left(\theta\right) = R\left(1 - \cos\left(\theta\right)\right) \end{cases}$$



Calculons sa longueur. Pour cela on utilise l'abcisse curiviligne.

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{x'\left(\theta\right)^2 + y'\left(\theta\right)^2} d\theta$$

$x'\left(\theta\right)^2 + y'\left(\theta\right)^2 = R^2\left(1 - \cos\left(\theta\right)\right)^2 + R^2\sin^2\left(\theta\right) = R^2(2 - 2\cos\left(\theta\right)) = 2R^2(1 - \cos\left(\theta\right)) = 4R^2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$. On obtient donc par parité de $4R^2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$:
$L = 2 \times \int_0^{\pi} 2R\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) d\theta = 4R \times \left[-2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]_0^{\pi} = 8R$.
La longueur de la cycloïde est donc égale à 8 fois le rayon du cercle qui la génère.
Calculons maintenant l'aire sous une arche de cycloïde. En M5, nous avons vu que l'aire délimitée par une courbe γ est :
$A = \frac{1}{2} \times \int_{\gamma} \left(-y\left(\theta\right)x'\left(\theta\right) + x\left(\theta\right)y'\left(\theta\right)\right) d\theta$, où $x\left(\theta\right)$ et $y\left(\theta\right)$ sont les équations paramétriques de la courbe. Appliquons ce résultat à la cycloïde.

$-y(\theta)\,x'(\theta) + x(\theta)\,y'(\theta) = R^2(\cos(\theta) - 1) \times (1 - \cos(\theta)) + R^2(\theta - \sin(\theta)) \times (\sin(\theta)) = R^2\left(2\cos(\theta) - 1 - \cos^2(\theta) + \theta\sin(\theta) - \sin^2(\theta)\right)$.
On obtient donc :

$$A = R^2 \int_0^{2\pi} (\cos(\theta) - 1)\,d\theta + \frac{R^2}{2}\int_0^{2\pi} \theta\sin(\theta)\,d\theta = R^2 \times (-2\pi) + \frac{R^2}{2} \times (-2\pi) = -3\pi R^2$$

En prenant la valeur absolue, on a que l'aire de la cycloïde vaut $3\pi R^2$.
Pour finir, la cycloïde possède une propriété remarquable. Elle est tautochrone. Ce qui veut dire que peu importe la hauteur à partir de laquelle vous lâchez un objet, la durée qu'il mettra pour arriver en bas de la cycloïde est la même. Démontrons ce résultat.
Il suffit de montrer que le temps de parcours ne dépend pas de la hauteur. Pour un déplacement infinitésimal, le temps infinitésimal est donné par :

$$dt = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{\sqrt{2gy}}$$

$dx = x'(\theta)\,d\theta = R(1 - \cos(\theta))d\theta$.
$dy = y'(\theta)\,d\theta = R\sin(\theta))d\theta$.
On en déduit : $dx^2 + dy^2 = R^2(1 - 2\cos(\theta) + \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta))d\theta^2 = 2R^2(1 - \cos(\theta))\,d\theta^2$.
Ce qui donne pour dt :

$$dt = \frac{\sqrt{2R^2(1 - \cos(\theta))}}{\sqrt{2gR(1 - \cos(\theta))}}d\theta = \sqrt{\frac{R}{g}}d\theta$$

En intégrant entre $[0;\pi]$, on a :

$$T = \sqrt{\frac{R}{g}} \times \pi$$

Chapitre 2

Le principe de moindre action

2.1 Le principe de moindre action

Le principe de Fermat combiné à la résolution du brachistochrone a donné des idées à d'autres personnes et plus précisément à Maupertuis.
Avec Fermat puis avec Jean Bernoulli, le principe de moindre temps qui paraissait au départ philosophique était devenu un principe mathématique. Il semblait que toutes les considérations philosophiques et spirituelles ne soient plus présentes. Malgré la réussite du principe de moindre temps, les cartésiens continuèrent à vivement critiquer ce principe qui pour eux était moral plus que physique. Au XVIIe siècle, la philosophie cartésienne était très présente. La philosophie développé par Descartes a sans aucun doute était influencé par le contexte religieux de l'époque.
L'Eglise occupait une place très importante dans la société. Tout ce qui n'était pas en accord avec la Bible était faux et toute personne qui s'opposait à la Bible était qualifiée d'hérétique. Dès 1512, le Ve concile du Latran décida dde soumettre la parution des livres imprimés à l'autorité de l'Eglise. C'est dans ce contexte que né Descartes. En 1600, alors qu'il n'a que 4 ans Giordano Bruno est brûlé vif pour avoir la thèse héliocentrique. Tous ces évènements ont fortement marqué Descartes. C'est pourquoi la philosophie cartésienne était pour la séparation de la foi et de la science. Pour Descartes, on peut se passer de la foi religieux pour accéder à la vérité. Il est important de noter que Descartes croyait en Dieu. Seulement, pour lui spiritualité et science devaient êtres indépendantes.
Ceci explique donc le scepticisme des cartésiens au sujet du principe de moindre temps qui malgré le fait qu'il avait fait ses preuves conservait tout de même des racines spirituelles. Par ailleurs, l'absence de théorie expliquant le comportement de la lumière ne permettait pas de définitivement conclure sur le pirncipe de Fermat. La théorie de la gravitation de Newton publiée en 1687 n'a pas arrangée les choses. Elle ne faisait appel à aucun principe de minimisation d'une quelconque quantité dans les phénomènes naturelles. Newton réussit même à

retrouver les lois de Kepler. Ce qui donna encore plus de force à sa théorie et rabaissa encore plus le principe de Fermat qui semblait pour certains être le fruit du hasard. L'année 1715 marqua le début du siècle des Lumières. L'objectif étant de dépasser l'obscurantisme lié à l'Eglise notamment mais aussi de promouvoir les connaissances de tous types. De cette envie va naître l'Encyclopédie des Lumières qui permettra de vulgariser le savoir.
C'est dans ce contexte et plus précisément en 1744 que Maupertuis va définitivement modifier la physique. Alors que certains comme les cartésiens voulaient séparer foi et science, Maupertuis présente un principe totalement spirituel : le principe de moindre action. Pour Maupertuis, lorsqu'un objet se déplace, il ne suit ni le trajet de moindre temps, ni celui de moindre distance mais il suit le trajet qui minimise une quantité qu'il appelle l'action. A l'instar du principe de Fermat, ce principe dit que la nature fait des économies. C'est un principe d'économie naturelle. Voilà comment Maupertuis justifie cela :
« En méditant profondément sur cette matière, j'ai pensé que la lumière , lorsqu'elle passe d'un milieu dans un autre, abandonnant déjà le chemin le plus court, qui est celui de la ligne droite, pouvait bien ne pas suivre celui du temps le plus prompt ; en effet, quelle préférence devait - il y avoir ici du temps sur l'espace ? La lumière ne pouvant aller à la fois par le chemin le plus court et par le temps le plus prompt, pourquoi irait - elle par un de ces chemins plutôt que par l'autre ? Aussi ne suit - elle auc un des deux ; elle prend une route qui a un avantage plus réel : le chemin qu'elle tient est celui par lequel la quantité d'action est la moindre. Il faut maintenant expliquer ce que j'entends par quantité d'action. Lorsqu'un corps est porté d'un point à un autre, il faut pour cela une certaine action : cette action dépend de la vitesse qu'a le corps et de l'espace qu'il parcourt ; mais elle n'est ni la vitesse ni l'espace pris séparément. La quantité d'action est d'autant plus grande que la vitesse du corps est plus grande, et que le chemin qu'il parcourt est plus long, elle est proportionnelle à la somme des espaces multipliés chacun par la vitesse avec laquelle le corps les parcourt. »
Au départ Maupertuis ne définit l'action que pour des rayons lumineux. Il la définit de la manière suivante :

$$S = \sum_i l_i v_i$$

Néanmoins, Maupertuis voulait aussi que son principe soit en accord avec la théorie de Newton. C'est pourquoi il transforma l'action en la multipliant par la masse :

$$S = \sum_i m_i l_i v_i$$

Ce que voulait exprimer Maupertuis était en fait une sorte de somme infinie. C'est pourquoi l'action peut aussi s'écrire :

$$S = \int_A^B mvdl$$

On peut exprimer mv avec l'énergie mécanique et potentielle. Si E est l'énergie mécanique et V l'énergie potentielle, on a $mv = \sqrt{2m\,(E-V)}$. On obtient ainsi pour l'action :

$$S = \int_A^B \sqrt{2m\,(E-V)}dl$$

Revenons au principe de Fermat. La quantité qui devait être minimisée était le temps qui s'écrit :

$$T = \int_A^B \frac{n(x,y,z)}{c}dl$$

On voit qu'il y a un lien entre ces deux quantités. Ce lien sera établi par Hamilton au XIX^e siècle et cela conduira à l'élaboration de la mécanique quantique. Le principe de moindre action a donc d'une certaine manière contribué à l'élaboration de la mécanique quantique.

Par la suite, Lagrange et Euler donneront l'expression suivante de l'action :

$$S = \int_{t_0}^{t_1} (T-V)dt$$

où T est l'énergie cinétique et V l'énergie potentielle. Le génie de ces deux mathématiciens est d'avoir mis le signe moins dans l'expression de l'action.

Maupertuis qualifia son principe de *« si sage, si digne de l'Être suprême. »*
En fait, Maupertuis se place dans la lignée des philosophes comme Leibniz ou Diderot pour qui il y a une certaine perfection dans le Monde. Pour Leibniz : *« Dieu possède dans son entendement tous les mondes possibles et concevables mais chosit le meilleur des mondes possibles en fonction des biens et des maux »*.
Ainsi, pour décrire la physique Maupertuis fait appel à sa spiritualité.
Ce principe fait l'effet d'une bombe dans la communauté scientifique. Alors que certains n'avaient pas encore digéré le principe de Fermat, Maupertuis renchérit en posant l'existence d'une quantité mystérieuse qu'il appelle action et qui doit être minimisée. C'est de la volonté d'unifier l'optique et la mécanique qu'est né le principe de moindre action. En effet, Maupertuis voulait à la fois un principe dans la continuité du principe de Fermat mais aussi un principe en accord avec la théorie de la gravitation de Newton dont il était un fervent partisan. Comme nous le verrons dans la suite la seconde loi de Newton se retrouve à partir du principe de moindre action. Pourtant, il est important de noter que les deux approches sont totalement différentes. Dans l'approche newtonienne, on fait un bilan des forces et de proche en proche, de manière infinitésimale, on étudie la trajectoire de notre objet. C'est d'ailleurs pour cela que Newton a eu besoin du calcul infinitésimal pour sa théorie. Avec le principe de moindre action, c'est totalement différent. Il faut seulement connaître le point de départ et d'arrivée. Ce qu'il se passe entre les deux nous est totalement indifférent. Mais pourtant les deux approches sont totalement équivalentes.
Il est important de noter que ce principe totalement révolutionnaire a été très

troublant pour de nombreux mathématiciens. On peut citer l'exemple de Poisson qui qualifia ce principe d'inutile. Il est vrai qu'à cette époque il était difficile de comprendre l'utilité de ce principe étant donné le grand succès de la théorie newtonienne.
Nous avons donc défini l'action et nous savons d'après Maupertuis qu'il faut qu'elle soit minimale. La question est de savoir comment trouver le trajet qui minimise cette action. Pour cela, nous allons avoir besoin de méthodes mathématiques.

2.2 Equation d'Euler-Lagrange

Depuis la fin du XVIIe siècle, de nombreux problèmes physiques faisaient intervenir une intégrale à rendre extrémale. Néanmoins, chaque problème possédait sa propre résolution. Il n'existait pas de méthode globale.
L'action telle que nous l'avons définie précédemment est en fait une fonctionnelle. C'est « une fonction de fonction ». L'action est donc une application qui va de l'espace des fonctions que l'on note E dans l'ensemble des réels. Elle prend une courbe en entrée et nous renvoie un réel. Le principe de moindre action nous dit que le chemin qu'empruntra un objet est celui pour lequel l'action est la plus faible. La question est comment savoir quelle est ce chemin qui minimise l'action ? Il n'est pas possible de tester tous les chemins car il y en a une infinité. Devant ce problème d'ordre mathématique, Euler décida de trouver une méthode générale pour résoudre les problèmes consistant à rendre certaines grandeurs extrémales. Il aboutit à l'équation d'Euler-Lagrange.

Enoncé : Soit $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Soit $u \epsilon C([a;b])$. Soit $J : C([a;b]) \to \mathbb{R}$ définit par $J(u) = \int_{x_a}^{x_b} F(u(x), u'(x), x)\, dx$. Une condition nécessaire pour que J soit stationnaire est que l'on est :

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial u'}\right) = 0$$

Preuve : Pour démontrer ce résultat, nous alons utiliser une analogie avec les fonctions à valeurs réelles que l'on manipule habituellement. Pour simplifier le problème, on se place dans le cas où les extrémités a et b sont fixées.
Tout d'avord, demandons-nous quelle est la condition pour que soit extrémale ?
Pour les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on dit que f est stationnaire lorsque $f'(x) = 0$ ou encor. e que $df = 0$. Pour les fonctionnelles, on dira que J est stationnaire lorsque $\delta J = 0$.
Nous allons donc calculer $J(u + \delta u) \simeq J(u) + \delta J$. Ici, δu est une courbe qui dépend de x. Si u est une courbe rendant J stationnaire alors pour une variation infiniment petite δu de u, $u + \delta u$ est infiniment proche de u. Par conséquent, la variation δJ de la fonctionnelle sera nulle. Il est important de noter pour la

suite que chaque variation $u + \delta u$ se fait à x fixée. On remarque qu'il y a une infinité de possibilité pour δu, à condition de respecter $\delta u\left(x_a\right) = \delta u\left(x_b\right) = 0$ car les extrémités sont fixées. Calculons donc $J\left(u + \delta u\right)$:

$$J\left(u+\delta u\right) \simeq J\left(u\right) + \delta J = \int_{x_a}^{x_b} F\left(u\left(x\right)+\delta u, u'\left(x\right)+\delta u', x\right) dx$$

Il faut développer $F\left(u\left(x\right)+\delta u, u'\left(x\right)+\delta u', x\right)$:

$$F\left(u\left(x\right)+\delta u, u'\left(x\right)+\delta u', x\right) \simeq F\left(u\left(x\right), u'\left(x\right), x\right) + \delta F$$

$$\delta F = \frac{\partial F}{\partial u}\delta u + \frac{\partial F}{\partial u'}\delta u'$$

x n'apparaît dans la différentielle de F car la variation infinitésimale de u se fait à x fixé. On en déduit donc :

$$\delta J = \int_{x_a}^{x_b} (\frac{\partial F}{\partial u}\delta u + \frac{\partial F}{\partial u'}\delta u')dx$$

Par analogie avec les fonctions d'une seule variable réelle, on aimerait avoir une dépendance en δu seulement. En effet, pour ces fonctions là, $df = f'(x)dx$. L'astuce est de faire une IPP.

$$\delta J = \int_{x_a}^{x_b} (\frac{\partial F}{\partial u}\delta u + \frac{\partial F}{\partial u'}\delta u')dx = \int_{x_a}^{x_b} (\frac{\partial F}{\partial u}\delta u)dx + \int_{x_a}^{x_b} (\frac{\partial F}{\partial u'}\delta u')dx$$

$$\int_{x_a}^{x_b} (\frac{\partial F}{\partial u'}\delta u')dx = \left[\frac{\partial F}{\partial u'}\delta u\right]_{x_a}^{x_b} - \int_{x_a}^{x_b} \frac{d}{dx}(\frac{\partial F}{\partial u'})\delta u dx$$

Il est important de noter que jusqu'à présent, nous avons considéré F comme une fonction de 3 variables : u, u' et x. Dans l'intégrale, F doit être considérée comme une fonction de x seule. Finalement :

$$\delta J = \int_{x_a}^{x_b} \frac{\partial F}{\partial u}\delta u dx - \int_{x_a}^{x_b} \frac{d}{dx}(\frac{\partial F}{\partial u'})\delta u dx$$

Le terme $\left[\frac{\partial F}{\partial u'}\delta u\right]_{x_a}^{x_b}$ s'annule car les extrémités sont fixées. On peut tout réunir sous la même intégrale. Ce qui donne :

$$\delta J = \int_{x_a}^{x_b} (\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx}(\frac{\partial F}{\partial u'})\delta u dx$$

Or, on veut que J soit stationnaire. Donc il faut que $\delta J = 0$. δJ doit être nul pour toute variation δu. La seule possibilité est donc que le terme dans l'intégrale s'annule. On peut aussi raisonner par l'absurde pour le montrer.
Supposons que le terme dans l'intégrale ne s'annule pas. On pourrait donc trouver x_o tel que $\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx}(\frac{\partial F}{\partial u'})$ soit du même signe que δu. $\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx}(\frac{\partial F}{\partial u'})$ serait

donc strictement positif et par conséquent δJ aussi. Ce qui est absurde. On en déduit donc :

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx}(\frac{\partial F}{\partial u'}) = 0$$

Cette équation est l'équation d'Euler-Lagrange. Grâce à cette équation, nous disposons désormais d'un outil pour résoudre tous les problèmes portant sur la minimisation de fonctionnelle, à condition que l'énoncé précédent soit satisfait.

Chapitre 3

Applications de l'équation d'Euler-Lagrange

3.1 La seconde loi de Newton

Énoncé original : « Les changements qui arrivent dans le mouvement sont proportionnels à la force motrice ; et se font dans la ligne droite dans laquelle cette force a été imprimée. »
De nos jours cette loi est nomée Principe fondamental de la dynamique (PFD) et s'énonce de la manière suivante :

Dans un référentiel galiléen, la somme vectorielle des force extérieures exercées sur un système ponctuel est égale à la dérivée du vecteur quantité de mouvement de ce système par rapport au temps : $\sum \overrightarrow{F_{ext}} = \frac{d\overrightarrow{p}}{dt}$
Dans le cas ou la masse est constante, on a : $\sum \overrightarrow{F_{ext}} = m\overrightarrow{a}$

Retrouvons cette loi (pour un mouvement unidimentionnel) :

Dans la mécanique classique, l'action peut-être définie comme étant la différence entre l'énergie cinétique et l'énergie potentielle, on a alors :

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{1}{2}mx'^2 - U(x)\right] dt \quad U(x) \textit{ représente le potentiel}$$

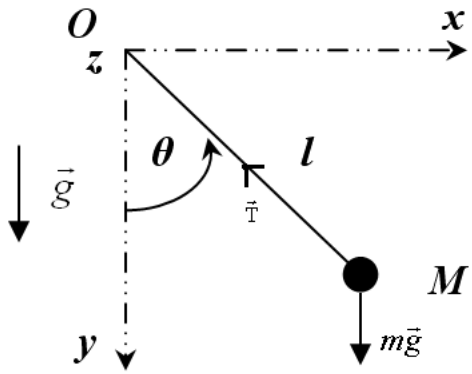
On a alors le lagrangien :

$$F(y, y', t) = \frac{1}{2}mx'^2 - U(x)$$

Or $\frac{\partial F}{\partial x} = -U'(x) \qquad et \qquad \frac{\partial F}{\partial y'} = mx'$
D'ou : $\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dt}(\frac{\partial F}{\partial y'}) = 0 \implies -U'(x) - mx'' = 0 \implies mx'' = -U'(x)$
$-U'(x)$ représente les forces.
On retrouve bien la loi de Newton.

3.2 Pendule simple.

Situation : Considérons un pendule simple pouvant osciller dans un plan (xy), et on suppose qu'il subit son poids selon l'axe y. Le pendule correspond à une masse m suspendue par un fil (ou une tige de masse nulle) de longueur l. La position du pendule par rapport à la verticale ést repérée par l'angle θ.



Bilan des forces :
$\overrightarrow{P} = mg\overrightarrow{y} = mgcos(\theta)\vec{e_r} - mgsin(\theta)e_\theta$
$\overrightarrow{T} = T\vec{e_r} = Tsin(\theta)\vec{x} + Tcos(\theta)\vec{y}$
On a : $\vec{a} = -ml\theta'^2\vec{e_r} + ml\theta''\vec{e_\theta}$
On applique le PFD et on obtient :

$$ml\theta'' = -mgsin(\theta) \quad \Longrightarrow \quad \theta'' + \frac{g}{l}sin(\theta) = 0$$

Appliquons Euler-Lagrange et retrouvons ce résultat :

D'abord remarquons que $x = lsin(\theta)$, $y = lcos(\theta)$ et $v = l\theta'$. Comme vue dans l'exemple précédent, en mécanique classique le lagrangien est la différence entre l'enrgie cinétique et l'enrgie potentielle, d'ou $F(\theta, \theta', t) = \frac{1}{2}m(l\theta')^2 + mglcos(\theta)$.
On a alors

$$\frac{\partial F}{\partial \theta} = -mglsin(\theta) \qquad et \qquad \frac{\partial F}{\partial \theta'} = ml^2\theta' \Longrightarrow \frac{d}{dt}(\frac{\partial F}{\partial \theta'}) = ml^2\theta''$$

d'où

$$\frac{\partial F}{\partial \theta} - \frac{d}{dt}(\frac{\partial F}{\partial \theta'}) = -mglsin(\theta) - ml^2\theta'' = 0$$

On bien $\theta'' + \frac{g}{l}sin(\theta) = 0$

3.3 Le brachistochrone

Le problème du brachistochrone que nous avons résolu dans la première partie par un raisonnement mêlant optique et mécanique se résout désormais de

manière simple avec l'équation d'Euler-Lagrange. Rappelons le problème.
Une bille est lâché d'un point A dans le champ de pesanteur et l'on veut la faire aller en un minimum de temps en un point B, d'altitude inférieure mais pas sur la verticale de A. Pour cela, on oblige la bille à suivre sans frottement une trajectoire donnée. La question est de savoir quelle est la trajectoire qui minimise le temps de parcours. Pour cela il faut exprimer le temps de parcours.

$$dt = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{v(y)}$$

Avec le conservation de l'énergie mécanique, on a : $v(y) = \sqrt{2gy}$. Donc :

$$dt = \frac{\sqrt{dx^2(1 + y'^2)}}{\sqrt{2gy}} = \frac{1}{\sqrt{2g}} \times \sqrt{\frac{1 + y'^2}{y}} dx$$

On obtient donc que le temps mis par l'objet pour aller de A en B est :

$$T = \frac{1}{\sqrt{2g}} \times \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{\frac{1 + y'^2}{y}} dx$$

On peut utiliser directement Euler-Lagrange pour résoudre le problème mais les calculs seront longs et fastidieux. Néanmoins, on remarque que la fonction $F = \sqrt{\frac{1+y'^2}{y}}$ ne dépend pas explicitement de x. Pour ce genre de fonction, il existe un corollaire de l'équation d'Euler-Lagrange.

Identité de Beltrami : Si $\frac{\partial F(x,y,y')}{\partial x} = 0$ alors pour toute solution $x \to y(x)$ de l'équation d'Euler-Lagrange, on a que la fonction $F(y, y') - y' \frac{\partial F(y,y')}{\partial y}$ est constante.

Preuve : Il suffit de dériver la fonction précédente par rapport à x.

$$\frac{d}{dx}(F - y' \frac{\partial F}{\partial y'}) = \frac{dF}{dx} - y'' \frac{\partial F}{\partial y} - y' \frac{d}{dx}(\frac{\partial F}{\partial y'}) = \frac{\partial F}{\partial y'} \frac{dy'}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial F}{\partial x} - y'' \frac{\partial F}{\partial y} - y' \frac{d}{dx}(\frac{\partial F}{\partial y'})$$

Puisque que F ne dépend pas de x, on a :

$$\frac{d}{dx}(F - y' \frac{\partial F}{\partial y}) = y' \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}(\frac{\partial F}{\partial y'}) \right)$$

F vérifie l'équation d'Euler-Lagrange. Donc :

$$\frac{d}{dx}(F - y' \frac{\partial F}{\partial y'}) = 0$$

L'identité de Beltrami est donc vraie. C'est en fait la conservation de l'énergie. Appliquons cette conséquence de l'équation d'Euler-Lagrange au problème du brachistochrone.

$F = \sqrt{\frac{1+y'^2}{y}}$ $\qquad \frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{y(1+y'^2)}}$.

$$F - y'\frac{\partial F}{\partial y'} = \sqrt{\frac{1+y'^2}{y}} - \frac{y'^2}{\sqrt{y\left(1+y'^2\right)}} = C$$

$$\frac{1+y'^2-y'^2}{\sqrt{y\left(1+y'^2\right)}} = \frac{1}{\sqrt{y\left(1+y'^2\right)}} = C$$

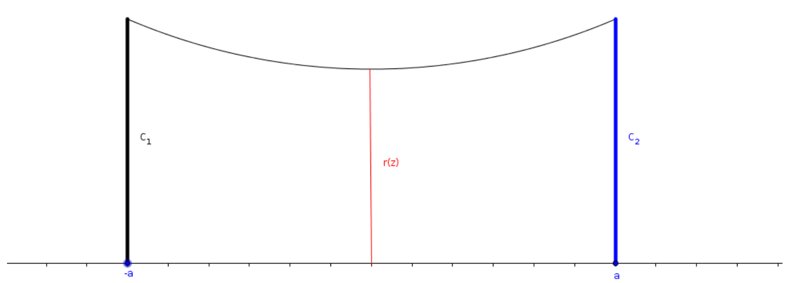
On retrouve bien l'équation caractéristique de la cycloïde qui est :

$$y(1+y'^2) = constante$$

Ainsi, grâce à l'équation d'Euler-Lagrange, le problème du brachistochrone se résout de manière assez simple.

3.4 La caténoide

Situation : Quelle est la surface d'aire minimale qui relie deux cercles parallèles, de même rayon, et centrés sur un même axe ?
Résolution :



Comme nous pouvons le voir sur la figure, on a :
Une petite variation dz provoque une variation dr de r, et localement , le périmètre du cercle de rayon $r(z)$ vaut $2\pi r(z)$. $r(z)$ vérifie les conditions suivantes : $r(-a) = r(a) = R$, ou R est le rayon des 2 cercles.

L'aire latérale vaut alors :

$$A(r) = \int_s 2\pi r(z)\times\sqrt{dz^2+dr^2} = \int_s 2\pi r(z)\times\sqrt{1+(\frac{dr}{dz})^2}dz = \int 2\pi r(z)\times\sqrt{1+r'(z)^2}dz$$

On a donc le lagrangien $F(r,r',z) = 2\pi r \times \sqrt{1+r'^2}$, on utilise l'identité de Beltrami présenté dans l'exemple précédent :

$$F - r'\frac{\partial F}{\partial r'} = 2\pi k \quad \Longrightarrow 2\pi r \times \sqrt{1+r'^2} - 2\pi r' r\frac{r'}{\sqrt{1+r'^2}} = 2\pi k$$

Ce qui nous donne :

$$\frac{r}{\sqrt{1+r'^2}} = k$$

On a donc obtenu l'équation de la surface, qui représente ici une équation d'une caténoide.

On adapte un peu cette équation :

$$r = k\sqrt{1+r'^2}$$

$$(\frac{r}{k})^2 = 1 + r'^2$$

$$(\frac{r}{k})^2 - 1 = r'^2$$

$$\frac{1}{(\frac{r}{k})^2-1} = (\frac{dz}{dr})^2$$

$$\frac{1}{\sqrt{(\frac{r}{k})^2-1}} = \frac{dz}{dr}$$

On pose le changement de variable $u = \frac{r}{k}$, on a alors :

$$\frac{k}{\sqrt{u^2-1}}du = dz$$

Maintenant on intègre :

$$\int_0^{u(z)} \frac{k}{\sqrt{u^2-1}}du = \int_0^z dz$$

$$k \times argcosh(u(z)) = z$$

$$u(z) = cosh(\frac{z}{k})$$

Finalement :

$$r(z) = kcosh(\frac{z}{k})$$

C'est la fonction donnant la courbe formée entre les deux cercles pour que la surface soit extrémale.
La valeur de k peut être trouvé grâce aux conditions aux limites.

Conclusion

Pour conclure, nous pouvons dire que ce projet nous a permis d'apprendre de nombreuses choses. En effet, nous avons acquis des connaissances à la fois historiques, mathématiques mais aussi philosophiques. Par ailleurs, nous avons pu prendre conscience du fait qu'une découverte n'a pas toujours d'explication. Ce qui est le cas du principe de moindre action. L'intuition ainsi que la spiritualité joue un rôle très important dans le vie d'un scientifique.
De plus, nous avons vu à quel point une découverte peu tout changer dans un domaine. Le principe de moindre action a totalement révolutionné la physique et créer des ponts entre différentes branches de la physique comme la mécanique et l'optique.
Aujourd'hui encore, le principe de moindre action est très utilisé dans tous les domaines de la physique, de l'électromagnétisme à la théorie quantique des champs en passant par la relativité générale.

Bibliographie

https://fr.wikipedia.org/wiki/Principe_de_moindre_action
http://www.math.sciences.univ-nantes.fr/~herau/Docs/Her08-slides-moindreaction.pdf
http://www-liphy.ujf-grenoble.fr/pagesperso/bahram/Math/chap_CalculVariation.pdf
http://www.daniel-huilier.fr/Enseignement/Histoire_Sciences/extraitDiscoursGalilee.pdf
http://sciences-physiques-moodle.ac-orleans-tours.fr/moodle/pluginfile.php/2162/mod_resource/content/0/go
http://www-liphy.ujf-grenoble.fr/pagesperso/bahram/Math/chap_CalculVariation.pdf

http://www.lptl.jussieu.fr/files/Cours_Meca.pdf
https://www.normalesup.org/~glafon/eiffel12/deuxvar.pdf
https://www.youtube.com/watch?annotation_id=annotation_4091602165&feature=iv&src_vid=MIeYz6aMI
http://www-irem.univ-fcomte.fr/download/irem/document/ressources/math-phys/refraction/fermat.pdf
http://www.persee.fr/doc/rhs_0151-4105_1998_num_51_2_1329
http://patrick.vaudon.pagesperso-orange.fr/1pmafermat.pdf
http://www.nanotechinnov.com/wp-content/uploads/2014/07/Kopper-Principes-Variationnel-Mecanique-analytique-Lagrange-Corde-Vibrante-poly2012_X2011.pdf

http://rpauchet.chez.com/lapageTIPE/TIPEkevin/TIPEbrach/brach.htm
http://www.deleze.name/marcel/sec2/cours/CalculIntegral/cycloide.pdf
http://la-philosophie.com/philosophie-leibniz
http://sos.philosophie.free.fr/leibniz.php#section7
http://softs.polytechnique.fr/departements/physique/colloques/pdf/2007/Robine_Florence_X-ENS-UPS2007.pdf
http://www.cosmovisions.com/Leibniz02.htm
https://books.google.fr/books?id=y4GXGToeqw4C&pg=PA42&lpg=PA42&dq=d%C3%A9bat+philosophie+
https://www.youtube.com/watch?v=z26VS1m3-TI https://www.youtube.com/watch?v=pZ-eZ3fbgmU