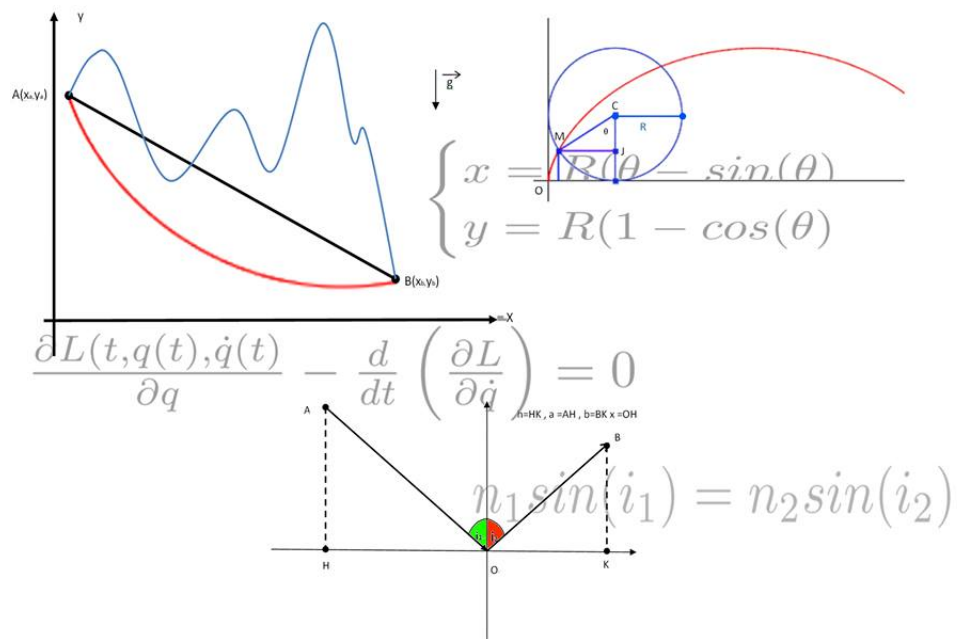


## Principe de Moindre Action en Physique et en Mathématiques : calcul de variations



Etudiants :  
Aëla COATMEUR  
Samra YOUSOUF  
Chi ZHANG

Enseignant responsable :  
Guillaume DUVAL



Date remise du rapport : 18/06/2017

Référence du projet : STPI/P6/2017-36

Intitulé du projet : PRINCIPE DE MOINDRE ACTION EN PHYSIQUES ET EN MATHÉMATIQUES : CALCULS DE VARIATIONS

Type de projet : théorique, historique et philosophique

Objectifs du projet : Le but du projet est de permettre une compréhension du principe de moindre action, et de ces applications, mais également de faire le lien entre la physique et les outils mathématiques utilisés en physique.

1

# Table des matières

<b>I</b>	<b>Méthodologie / organisation du travail</b>	<b>6</b>
<b>II</b>	<b>Travail réalisé et résultats</b>	<b>6</b>
<b>1</b>	<b>Histoire des mesures de la vitesse de la lumière</b>	<b>6</b>
1.1	Galilée . . . . .	6
1.2	Kepler, Cassini et Römer . . . . .	7
1.3	Bradley et l'aberration de la lumière : . . . . .	8
1.4	Une course à la précision : . . . . .	9
<b>2</b>	<b>Principe de moindre de temps</b>	<b>12</b>
2.1	Principe de Fermat . . . . .	12
2.2	Lois de Snell-Descartes . . . . .	12
2.2.1	Lois de la Réflexion : . . . . .	12
2.2.2	Lois de la Réfraction . . . . .	14
<b>3</b>	<b>Le défi de la courbe brachistochrone</b>	<b>16</b>
3.1	Qu'est ce qu'une cycloïde? . . . . .	16
3.2	Isochronisme de la cycloïde . . . . .	16
3.3	La résolution du défi par Jean Bernouilli . . . . .	17
<b>4</b>	<b>Équations d'Euler-Lagrange</b>	<b>19</b>
4.1	Euler et Lagrange . . . . .	19
4.2	Théorème . . . . .	19
4.2.1	Le Théorème dans $\mathbb{R}$ . . . . .	19
4.2.2	Preuve . . . . .	19
4.2.3	Conservation de l'énergie : cas où $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$ . . . . .	21
4.3	Applications . . . . .	21
4.3.1	Longueur minimale d'une courbe dans $\mathbb{R}^2$ . . . . .	21
4.3.2	Courbe Brachistochrone . . . . .	22
4.3.3	Démonstration du PFD par Euler-Lagrange . . . . .	23
<b>5</b>	<b>Étude du pendule simple</b>	<b>23</b>
5.1	Bilan des forces : . . . . .	24
5.2	Classification des trajectoires en fonction de la valeur de l'énergie . . . . .	24

# Introduction

Notre projet Physique porte sur le Principe de Moindre Action. Ce principe énonce qu'il existe une certaine quantité, l'action, que les lois de la nature vont chercher à minimiser (ou maximiser). Ce principe intervient dans toutes les branches de la physique. La connaissance de l'action permet la déduction de toute la dynamique du système à l'aide de ce principe.

Au cours de ce projet, nous avons cherché à étudier les applications du principe de moindre action en minimisant des temps de parcours. Nous nous sommes tout d'abord intéressés aux méthodes de détermination de la vitesse de la lumière ainsi qu'à l'évolution au cours des siècles des incertitudes liées à la détermination de celle-ci. Puis nous avons étudié l'application du Principe de Moindre Action à l'optique géométrique, à travers les lois de Snell-Descartes. Nous avons ensuite étudié les courbes minimisant un temps de parcours entre deux points, plus particulièrement la cycloïde et la courbe brachistochrone. Enfin, nous nous sommes consacrés à l'étude du pendule simple.

## Première partie

# Méthodologie / organisation du travail

Chaque mardi, de 8h à 9h30, nous avons une séance de projet avec notre professeur. Nous nous retrouvions dans les salles de projet du bâtiment Dumont-Durville. Au début du semestre M. Duval a décidé de mettre en commun les étudiants des deux projets sous sa tutelle, puis de les séparer en trois groupes : le premier était constitué d’Alice, Simon et Antoine, le second d’Ala-Eddine et Yahia, et le dernier de Aëla, Chi et Samra. Chaque semaine, un élève ou un groupe devait faire un exposé sur des théorèmes et leurs démonstrations en rapport avec le Principe de Moindre Action, par exemple les lois de Snell-Descartes et le théorème d’Euler-Lagrange, ou sur une de ses applications comme la minimisation d’un temps de parcours avec la cycloïde. Au cours de ces exposés, les autres élèves devaient être attentifs pour être capable de retransmettre ce qu’ils avaient compris à la fin de la séance ou au début de la séance suivante. A chaque fin de séance M. Duval donnait le sujet du ou des prochains exposés, et souvent qui devrait le faire. A la fin du semestre, chaque groupe dû rendre des rapports « blancs » pour vérifier notre avancement dans l’écriture de ceux-ci et nous dire ce qu’il fallait corriger. Pour la soutenance, chacun des groupes se vit assigné une partie du grand exposé général que nous présenterons. Pour faciliter la transmission de l’information entre les groupes, un « groupe de discussion Facebook » fut créé. A propos de l’organisation de notre groupe, à partir du mois d’avril nous nous retrouvions tous les mercredis à 18h15 à la bibliothèque pour mettre en commun ce que chacune avait fait concernant les exposés à préparer et l’écriture du rapport. Samra occupait le poste de chef de groupe : elle déterminait ce qu’il fallait faire chaque semaine et dirigeait la rédaction du rapport. Chi s’occupait principalement de la création des dessins et d’une bonne partie des démonstrations, notamment leurs relectures. Aëla était responsable entre autres des parties concernant l’histoire des mesures et le pendule simple, et de la correction des fautes d’orthographe. L’échange de documents et d’informations se faisait majoritairement pendant les rendez-vous à la bibliothèque et à travers une « discussion de groupe ».

## Deuxième partie

# Travail réalisé et résultats

## 1 Histoire des mesures de la vitesse de la lumière

La propagation de la lumière est l’un des exemples les plus évidents du principe de moindre action : elle emprunte toujours le chemin le moins coûteux en temps. Cela n’aurait pourtant aucun sens si la lumière se propageait instantanément, comme le croyait tous les scientifiques jusqu’au X<sup>ème</sup> siècle. Le savant arabe Alhazen fut la première personne connue à s’être interrogée sur la finitude de la lumière. Il ne parvint cependant pas à prouver que celle-ci a une vitesse finie. Il fut par ailleurs l’auteur du premier traité d’optique, dans lequel il expliqua le phénomène de réfraction. A partir de là, les hommes n’ont eu de cesse d’essayer de déterminer si oui ou non la lumière a une vitesse finie, et quelle est-elle. Nous allons nous intéresser à quelques théories et expériences qui ont mené à la découverte de la finitude de la lumière, ainsi qu’aux estimations de sa vitesse. Elle est aujourd’hui fixée à 299 792.458 km/s. La précision de cette valeur fut le résultat du travail de nombreux scientifiques que ce sujet a passionné ces derniers siècles.

### 1.1 Galilée

Peu avant l’année 1638, Galilée tenta de mesurer la vitesse de la lumière sur Terre avec un collaborateur. Chacun sur une colline, séparés l’un de l’autre par 1800 mètres, portant une lanterne

initialement cachée : l'un devait découvrir sa lanterne et le second faire de même dès qu'il apercevait la lumière de la lanterne de l'autre. En mesurant le temps écoulé entre le moment où la première personne découvre sa lanterne et le moment où elle observe celle de son compagnon, Galilée essaya de mesurer un décalage entre ces deux instants. Ce décalage correspond au temps mis par la lumière pour faire l'aller-retour. Cela pouvait alors indiquer que la vitesse de la lumière était finie, et permettre de la déterminer par la formule  $v = \frac{1800 \cdot 2}{\Delta t}$  avec  $v$  la célérité de la lumière, et  $\Delta t$  le décalage. Mais Galilée a eu beau refaire l'expérience plusieurs fois, il lui fut impossible d'obtenir une valeur de la vitesse de la lumière. En effet, cette dernière ne met que quelques millièmes de secondes à parcourir 3600 mètres. Et même en augmentant la distance entre les deux personnes, l'incertitude liée au temps de réaction des deux personnes (pouvant être estimé à 2 secondes minimum par personne) est trop importante par rapport aux millièmes de secondes pris par la lumière pour parcourir cette distance. Malgré cela, Galilée aida indirectement à la mesure de la vitesse de la lumière en perfectionnant la lunette d'astronomie, en 1609. Elle lui permit de découvrir que la planète Jupiter a quatre satellites qui gravitent autour d'elle.

## 1.2 Kepler, Cassini et Römer

Les travaux de Johannes Kepler (1571-1630) permirent de comprendre la mécanique du système solaire, en déterminant la position des planètes du système solaire à chaque instant. On peut citer notamment la loi des orbites (dans le référentiel héliocentrique, la trajectoire du centre d'inertie d'une planète du système solaire est une ellipse dont le centre du Soleil est un des foyers), la loi des aires (les segments de droite reliant le centre du Soleil à celui de la planète, balayent des aires égales pendant des durées égales) et la loi des périodes ( $\frac{T^2}{a^3} = \text{constante}$ ) avec  $T$  la période de révolution et  $a$  la demi longueur du grand axe de l'ellipse.

Ces travaux permirent au directeur de l'observatoire de Paris, Jean Dominique Cassini (1625-1712), de publier en 1671 des tables permettant de connaître les jours et les horaires des éclipses des satellites de Jupiter.

C'est là qu'intervint l'astronome danois Olaus Römer (1644-1710). Il démontra que la vitesse de la lumière est bien finie et l'expliqua publiquement le 7 décembre 1676. Comme son collègue Cassini avant lui, Römer avait remarqué de curieux décalages dans la périodicité des éclipses de Io qui se produisaient tantôt avec du retard tantôt avec une avance, selon que Jupiter était éloignée ou proche de la Terre au cours de leurs mouvements autour du Soleil. Cassini avait déjà envisagé que ce phénomène pouvait être dû à une vitesse finie pour la lumière avant de rejeter l'hypothèse, constatant qu'on ne voyait rien de similaire avec les autres lunes de Jupiter. En raison des imprécisions sur les déterminations du rayon de la Terre se répercutant sur les estimations des distances dans le système solaire, Römer refusa d'accepter ce contre-argument. Or, si la variation de distance entre la Terre et Jupiter modifie le temps mis par la lumière pour parcourir la distance entre les deux planètes, cela signifie que la lumière n'a pas une propagation instantanée.

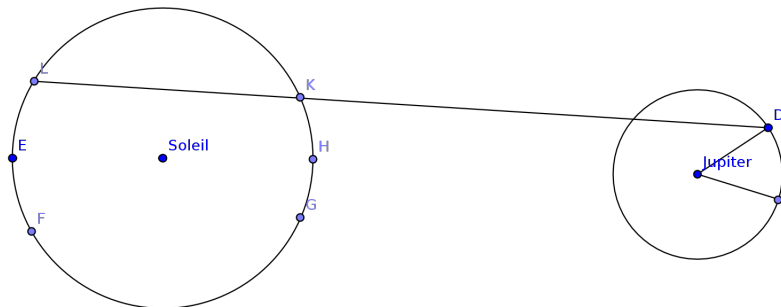


FIGURE 1 –

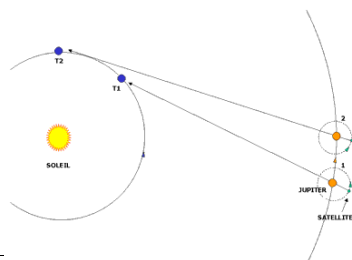


FIGURE 2 –

Voici l'explication de Römer quant aux retards et avances d'Io. A 12 tours de la Terre autour du Soleil correspond 1 tour de Jupiter : on considère donc que Jupiter est fixe pour cette démonstration. Nous observons depuis la Terre, les instants où le satellite entre ou sort du cône d'ombre de la planète. En C, le satellite entre dans l'ombre de Jupiter pour en sortir en D. Soient E, F, G, H, K et L pris sur la trajectoire de la Terre, dans le sens du mouvement, à diverses distances de Jupiter. Supposons que la Terre se trouve en K, et que l'on observe l'immersion du satellite en D. Après une révolution du satellite autour de Jupiter, soit à peu près 42h et demi plus tard, la Terre se trouve au point L lors du passage suivant du satellite au point D. Si la lumière met un certain temps à parcourir la distance KL, il est évident que l'observation du satellite au point L, se fera un peu plus tard que si la Terre était restée au point K. De même, de l'autre côté la Terre se rapprochant alors de Jupiter, les immersions successives apparaîtront au contraire de plus en plus en avance.

C'est finalement le physicien, astronome et mathématicien hollandais Christian Huygens qui en donna la première estimation dans son *Traité de la Lumière* : environ 200.000 km/s. La valeur admise actuellement, ou plus exactement fixée par définition est de 299.792,458 km/s dans le vide.

### 1.3 Bradley et l'aberration de la lumière :

En 1727, l'astronome britannique James Bradley (1693-1762) clôt le débat en confirmant que la lumière a une vitesse de propagation proche de 300 000 km/s, grâce au phénomène de l'aberration de la lumière, qu'il découvrit en observant les variations de la position apparente de l'étoile  $\gamma$  *Draconis* de la constellation du Dragon. Les étoiles ont un mouvement elliptique apparent, résultant de l'effet combiné du mouvement de l'observateur et de la vitesse de la lumière. Grâce à l'étude du phénomène d'aberration de la lumière, il a été possible d'estimer plus précisément la vitesse entre l'étoile et la Terre, de manière cohérente avec la première estimation faite par Römer une cinquantaine d'années auparavant. À l'époque, les incertitudes sur la taille du système solaire ne permettaient pas de connaître avec précision la taille de l'orbite de la Terre, et par suite sa vitesse de déplacement le long de son orbite. Cela empêchait une mesure précise de la vitesse de la lumière.

Prenons d'abord un exemple. Soient un objet tombant à la verticale et une voiture se déplaçant à l'horizontale vers l'objet, dans le référentiel terrestre. La figure 3 représente ce que voit l'automobiliste.



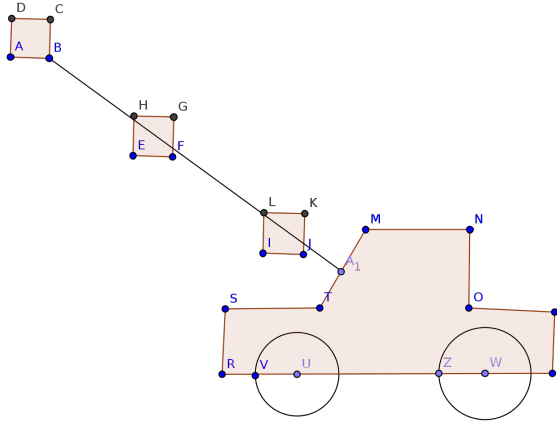


FIGURE 3 –

En fonction du référentiel choisi, le mouvement n'est pas le même. Ici, le mouvement de l'objet n'est pas le même dans le référentiel terrestre et dans le référentiel de la voiture. Il en est de même pour une étoile. L'observateur situé sur la Terre n'a pas l'impression de bouger dans le référentiel géocentrique, mais il bouge pourtant dans le référentiel héliocentrique. Ainsi lorsque l'on observe une étoile, elle n'est pas là où on la voit mais légèrement à côté. La figure 4 représente l'écart entre la position réelle de l'étoile et la position observée. En  $t_0$ , la lunette astronomique est orientée vers la position réelle de l'étoile. Cependant le temps que la lumière arrive jusqu'à l'oeil de l'observateur, ce dernier est arrivé en  $t_1$  et la lunette ne pointe plus vers l'étoile. Soit  $a$  l'angle formé par les points  $t_0$ , réelle et  $t_1$ . On a :  $\tan(a) = \frac{v(t_1 - t_0)}{c(t_1 - t_0)}$  et  $a = \arctan\left(\frac{v}{c}\right)$ .

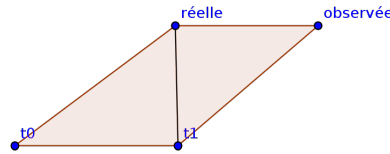


FIGURE 4 –

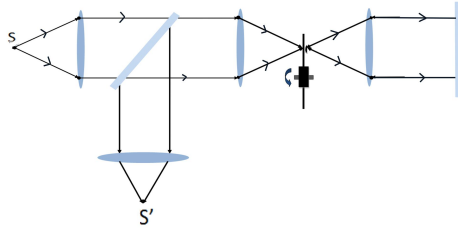
Une autre formulation serait : on considère deux référentiels  $R$  et  $R'$  en translation l'un par rapport à l'autre ( leurs axes restent parallèles). On note  $v$  la vitesse relative. Si la lumière entre dans le plan  $Oxy$  de  $R$  en formant un angle  $\theta$  avec  $Ox$ , la vitesse de la lumière a pour composantes  $\begin{pmatrix} -c * \cos(\theta) \\ -c * \sin(\theta) \end{pmatrix}$ . Dans le référentiel  $R'$  on aurait :  $\begin{pmatrix} -c * \cos(\theta) - v \\ -c * \sin(\theta) \end{pmatrix}$ . Soit  $\theta'$  tel que  $\tan(\theta') = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta) + v/c}$ . Si l'étoile est au zénith ( $\theta = \frac{\pi}{2}$ ) alors  $\tan(\theta') = \frac{v}{c}$ .

#### 1.4 Une course à la précision :

Intéressons nous maintenant à François Arago. Il a montré en 1805 que la vitesse de la lumière est la même pour tous les astres, contrairement à ce que l'on pensait avant. Pour cela, il testa la déviation de différentes lumières artificielles ou provenant de différents astres avec ou sans prisme. Il utilisa un prisme d'angle  $45'$  dont la dispersion était suffisamment petite pour pouvoir travailler en lumière blanche. Il constata que la déviation de leur lumière par le prisme est toujours égale à  $25'$ , avec des écarts de 5 secondes de degré au plus. Il en déduit que les variations entre les différents angles de déviation ne dépassent pas  $1/480^\circ$ . L'existence de grandes variations de la vitesse de la lumière d'une étoile à l'autre fut donc fortement mise en doute. Il en conclut que l'existence de grandes variations de la vitesse de la lumière d'une étoile à l'autre est très probablement fausse.

Arago décida alors en 1810, de faire de nouvelles mesures avec un prisme de plus grand angle signifiant une plus grande dispersion. Il choisit donc cette fois-ci un prisme achromatique, c'est-à-dire de dispersion négligeable. Dans sa dernière série d'observations, Arago plaça une série de deux prismes achromatiques collés ensemble devant la moitié de l'objectif d'une lunette. Il plaça cette lunette de telle sorte que les étoiles soient observées à leur passage au méridien. Cette fois encore, aucune différence significative n'est trouvée d'une étoile à l'autre. Il en conclut que la vitesse de la lumière ne semble pas dépendre des propriétés de l'étoile émettrice.

Alors qu'il dirigeait l'observatoire de Paris depuis 1846, Arago poussa ses deux protégés, Hippolyte Fizeau (1819-1856) et Léon Foucault (1819-1868), à trouver une machine permettant de mesurer la vitesse de la lumière sur Terre. Fizeau y arriva en premier, en 1849. A l'aide une roue crantée il mesura la vitesse de la lumière comme atteignant les 315 300 km/s, mais il était conscient du manque de précision de sa machine. Cela lui valla tout de même les félicitations de l'Académie des Sciences et la légion d'honneur.



Dans cette méthode, une source  $S'$  de lumière émet des rayons lumineux focalisés par une lentille convergente. On place une roue dentée dans le plan focal image de cette lentille, tel que le foyer image soit situé entre deux dents consécutives. Une seconde lentille convergente est placée tel que son foyer objet soit confondu avec le foyer image de la première lentille. Les rayons lumineux sortent alors parallèlement à l'axe optique et se réfléchissent un miroir situé à quelques kilomètres.

Ils repassent alors à travers les deux lentilles et entre les dents de la roue, puis rejoignent un miroir semi-réfléchissant incliné de  $45^\circ$  par rapport à l'axe optique. Ce miroir permet de réfléchir une partie de la lumière provenant de  $S'$  vers la roue, tout en laissant une partie de la lumière lorsqu'elle se déplace dans l'autre sens. La lumière traversant le miroir est focalisée par une troisième lentille en un point  $S$  pour mieux visualiser si la lumière a été arrêtée par la roue ou non. On fait lors tourner la roue de plus en vite, jusqu'à ce que l'observateur ne voit plus de lumière. Cela signifie que pendant que la lumière faisait son aller-retour entre la roue et le miroir, la roue a tourné suffisamment (de la largeur d'une dent), pour empêcher la lumière de passer. La connaissance de la distance totale parcourue par la lumière et de la vitesse de rotation de la roue nécessaire à ce que la lumière, lors de son retour, soit bloquée par une dent de la roue, permet de déterminer la vitesse de la lumière. Foucault quant à lui, préféra utiliser une machine plus précise grâce à un jeu de miroirs pivotants. Il mesura ainsi en 1862 une vitesse s'élevant à  $298\,000 \pm 500$  km/s.

La méthode de la roue crantée fut améliorée par Alfred Cornu (1841-1902). Son dernier résultat, en 1902, s'éleva à  $299\,800 \pm 8$  km/s, ce qui est très proche de la valeur que nous utilisons avec une précision bien loin des 500km/s 40 ans plus tôt. Alfred Michelson (1852-1931) décida quant à lui d'améliorer la méthode du miroir tournant. Il remplaça le miroir par un prisme à 8 faces et obtint en 1927 une vitesse de  $299\,796 \pm 4$  km/s. Il imagina de faire l'expérience dans le vide. Pour cela il entreprit en 1930, de faire construire près de Pasadena, un tube en acier d'un mile de long pour y faire une ultime expérience. Il mourut en 1931 sans en voir les résultats. Malgré des erreurs de mesures dues à des effets géologiques et des problèmes de construction du tube, les résultats finaux,  $299\,774 \pm 11$  km/s, étaient en accord avec les mesures électro-optiques de l'époque.

Avec la découverte que la lumière se propage comme une onde, à la fin du 19ème siècle, vint l'idée de créer des machines mesurant des fréquences et longueurs d'onde. De là, sa célérité pouvait être retrouvée par la formule :  $v = f * \lambda$ . Par exemple, Evenson mesura en 1973 la fréquence et la longueur d'onde d'un laser helium-néon, donnant une vitesse de propagation de  $299\,792\,458.70 \pm 1.10$  m/s.

En 1983, la 17ème conférence générale des poids et des mesures stoppa la course à la précision et fixa la vitesse propagation de la lumière à  $299\,792.458$  km/s exactement. Un mètre est donc la distance parcourue par la lumière en  $1/299\,792\,458$ s. Cela permit de redéfinir le mètre pour qu'il soit universel. En effet avant 1960 le mètre n'était défini que par une barre de platine, située à Sèvres, qui servait de référence. Cette barre se déformait ce qui rendait le mètre trop imprécis par rapport à la précision de la mesure de la vitesse de la lumière. De plus il n'y avait qu'un mètre-étalon, rendant difficile l'accès à la longueur exacte du mètre.

## 2 Principe de moindre de temps

Le principe de Fermat est l'application la plus intuitive du principe de moindre action où l'action, la quantité à minimiser, est le temps.

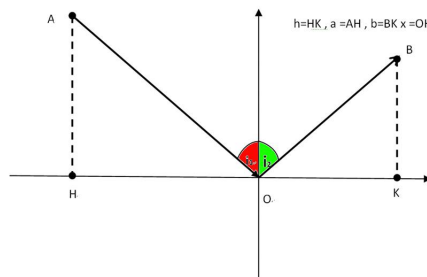
### 2.1 Principe de Fermat

Pierre de Fermat, célèbre mathématicien français du XVII<sup>e</sup> siècle, est reconnu comme étant, avec Descartes, l'instigateur de la géométrie analytique (*partie de la géométrie qui représente les objets par des équations et des inéquations*). Il est considéré comme étant le fondateur de la théorie moderne des nombres (*branche des mathématiques qui étudie les nombres entiers naturels et relatifs*) (cf petit théorème de Fermat - équation de Pell-Fermat - dernier théorème de Fermat - Nombre de Fermat). Le principe qui porte son nom, aussi appelé Principe de moindre temps, peut s'énoncer comme suit : «la lumière se propage entre 2 points en suivant la trajectoire qui minimise le temps de parcours.» Ce principe permet de retrouver les relations angulaires des loi de Snell-Descartes pour la réflexion et la réfraction.

### 2.2 Lois de Snell-Descartes

Les lois de Snell-Descartes décrivent le comportement de la lumière à l'interface de deux milieux. Elles ont été découvertes par les deux scientifiques de manières indépendantes : en 1621 par le mathématicien-physicien néerlandais Willebrod Snell (1580 - 1626) et en 1637 par le mathématicien français René Descartes (1596-1650) et publiées dans son traité *La Dioptrique*.

#### 2.2.1 Lois de la Réflexion :



1. Le rayon réfléchi, le rayon incident et la normale sont contenus dans le plan d'incidence
2.  $i_1 = -i_2$

**Démonstration analytique de la loi de la réflexion** On note  $h = HK$ ,  $a = AH$ ,  $b = BK$ ,  $x = HO$  et  $d(x)$  la longueur du trajet en passant par le point O (point variable du miroir).

On suppose a, b et h non nuls. Par Pythagore on trouve :  $d(x) = \sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{b^2 + (h-x)^2}$ . Cette fonction est continue dérivable sur  $[0; h]$ . La distance  $d(x)$  est minimale lorsque  $d'(x) = 0$ .

$$\text{Or } d'(x) = \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} + \frac{-2h+2x}{2\sqrt{b^2+(h-x)^2}}.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
 d'(x) = 0 &\iff \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} + \frac{x-h}{\sqrt{b^2+(h-x)^2}} = 0 \\
 &\iff x\sqrt{b^2+(h-x)^2} = (h-x)\sqrt{a^2+x^2} > 0 \\
 &\iff x^2(b^2+(h-x)^2) = (h-x)^2(a^2+x^2) \\
 &\iff x^2b^2 + x^2(h-x)^2 = a^2(h-x)^2 + x^2(h-x)^2 \\
 &\iff x^2b^2 - a^2(h^2 - 2xh + x^2) = 0 \\
 &\iff (b^2 - a^2)x^2 + 2ha^2x - a^2h^2 = 0
 \end{aligned}$$

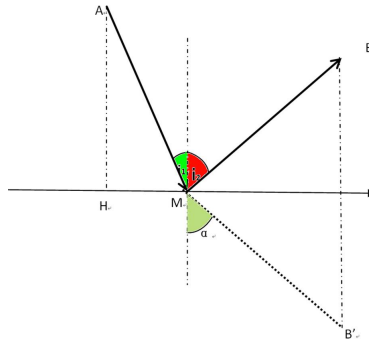
On obtient un polynôme de degré 2. On cherche à déterminer ses racines.  $\Delta = (2ha^2)^2 - 4(b^2 - a^2)(-a^2h^2) = (2ahb)^2$  Les racines sont donc  $x_1 = \frac{ah}{a+b}$  et  $x_2 = \frac{ah}{a-b}$ . Parmi ces deux résultats, un seul a un sens physique quelles que soient les valeurs de a et de b. Par la suite, on prendra la racine  $x_1 = \frac{ah}{b+a}$ .

$$d(x) = \sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{b^2 + (h-x)^2} \text{ et } d'(x) = 0 \text{ pour } x = \frac{ah}{a+b}$$

On a alors  $\frac{x}{a} = \frac{h}{a+b} = \frac{h-x}{b}$  soit  $\tan(i_1) = \tan(i_2)$  et  $i_1 = i_2$

Le trajet le plus court est obtenu lorsque  $x = \frac{ah}{a+b}$  et les angles que font les rayons lumineux avec la normale au miroir sont égaux.

### Démonstration géométrique de loi de la réflexion

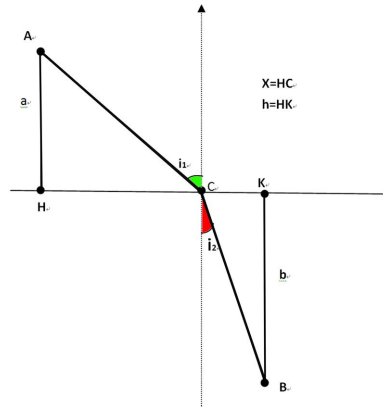


Soit O un point quelconque du miroir sur lequel la lumière est réfléchi, soit B' le symétrique de B par rapport à l'axe du miroir.

Montrons que la durée de parcours est minimale si et seulement si les angles  $i_1$  et  $i_2$  représentés sur le schéma sont égaux.

Pour cela on remarque tout d'abord qu'ici la durée minimale correspond à la distance minimale. Ainsi t minimal équivaut à  $AO + OB'$  minimal. Or cette somme est minimale lorsque A, O et B' sont alignés c'est-à-dire quand  $\alpha = i_1$ . Comme B' est le symétrique de B  $\alpha = i_2$ . On a bien  $i_1 = i_2$ .

### 2.2.2 Lois de la Réfraction



1. Le rayon réfléchi, le rayon incident et la normale sont contenus dans le plan d'incidence
2. Les rayon incident et réfracté sont situés de part et d'autre de la normale.
3.  $n_1 \sin(i_1) = n_2 \sin(i_2)$  avec  $n_i$  l'indice de réfraction du milieu défini par  $n_i = \frac{c}{v_i}$  où  $c$  est la vitesse de la lumière dans le vide et  $v_i$  la vitesse de la lumière dans le milieu  $i$ .

**Démonstration analytique** soit  $f(x)$  le temps mis par la lumière pour aller du point A au point B.  $f(x) = t_1 + t_2$ , avec  $t_i$  le temps mis pour traverser le milieu  $i$ .

Ainsi  $f(x) = \frac{AC}{v_1} + \frac{CB}{v_2}$  où  $v_i$  présente la vitesse de la lumière dans le milieu  $i$ . Par Pythagore nous avons :  $f(x) = \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{b^2+(h-x)^2}}{v_2}$  avec  $f$  définie, dérivable sur  $[0; h]$

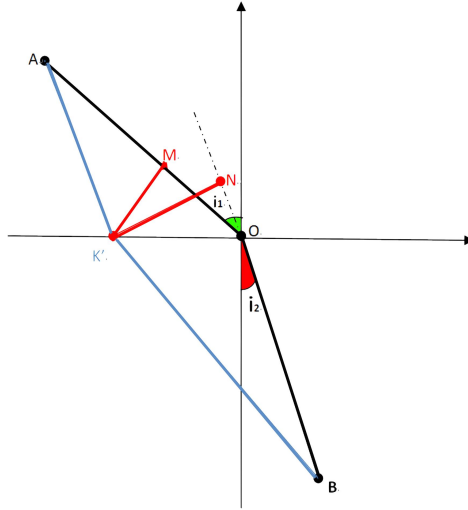
Pour trouver en quelle valeur de  $x$  le temps est minimal il nous suffit de chercher le minimum de la fonction  $f$ . On étudie la dérivée de  $f$  :

$$f'(x) = \frac{x}{v_1 \sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{(h-x)}{v_2 \sqrt{b^2 + (h-x)^2}}$$

Comme  $f'$  continue sur  $[0; h]$ ,  $f'(0) < 0$  et  $f'(h) > 0$ ,  $f$  s'annule au moins une fois.

$$f'(x) = 0 \iff \frac{x}{v_1 \sqrt{a^2+x^2}} - \frac{(h-x)}{v_2 \sqrt{b^2+(h-x)^2}} = 0 \iff \frac{1}{v_1} \frac{HC}{AC} - \frac{1}{v_2} \frac{CK}{CB} = 0 \iff \frac{\sin(i_1)}{v_1} - \frac{\sin(i_2)}{v_2} = 0 \iff n_1 \sin(i_1) = n_2 \sin(i_2)$$

**Démonstration géométrique**



On prend O tel que  $n_1 \sin(i_1) = n_2 \sin(i_2)$

On veut montrer que :  $\frac{AO}{v_1} + \frac{BO}{v_2} \leq \frac{AK'}{v_1} + \frac{BK'}{v_2}$

$\widehat{i_2} + \widehat{NOK'} = 90^\circ$  et  $\widehat{NK'O} + \widehat{NOK'} = 90^\circ \implies \widehat{NK'O} = \widehat{i_2}$

$\widehat{i_1} + \widehat{MOK'} = 90^\circ$  et  $\widehat{MK'O} + \widehat{MOK'} = 90^\circ \implies \widehat{MK'O} = \widehat{i_1}$

D'où  $NO = \sin(i_2) * K'O$  et  $MO = \sin(i_1) * K'O$

Or  $BO = BN - ON$  et  $AO = AM + OM$

Donc  $\frac{AO}{v_1} + \frac{BO}{v_2} = \frac{BN}{v_2} - \frac{ON}{v_2} + \frac{AM}{v_1} + \frac{OM}{v_1} = \frac{BN}{v_2} + \frac{AM}{v_1} + K'O \left( \frac{\sin(i_1)}{v_1} - \frac{\sin(i_2)}{v_2} \right) = \frac{BN}{v_2} + \frac{AM}{v_1}$

En effet  $v_i = \frac{c}{n_i}$  et donc  $n_1 \sin(i_1) = n_2 \sin(i_2) \iff \frac{c \sin(i_1)}{v_1} = \frac{c \sin(i_2)}{v_2}$

De plus  $AM \leq AK'$  et  $BN \leq BK'$  d'où  $\frac{AO}{v_1} + \frac{BO}{v_2} = \frac{AM}{v_1} + \frac{BN}{v_2} \leq \frac{AK'}{v_1} + \frac{BK'}{v_2}$

Donc le chemin AOB prend le moins de temps.

Nous venons de montrer qu'en partant du principe de Fermat il était possible de retrouver les deux lois de Snell-Descartes, analytiquement et géométriquement.

## Petit Plus

— petit théorème de Fermat : si p est un nombre premier et a est un entier non divisible par p alors

$$a^p - 1 \equiv 0 \pmod{p}$$

— équation de Pell-Fermat :  $ax^2 + 1 = y^2$  avec  $(x; y)$  entiers admet une infinité de solutions

— Dernier théorème de Fermat / grand théorème de Fermat / théorème de Fermat-Wiles : Il n'existe pas de nombres entiers non nuls x, y et z tels que  $x^n + y^n = z^n$  dès que  $n \geq 3$

— nombre de Fermat  $F_n = 2^{2^n} + 1$  pour  $n=0,1,2,3,4$  ce nombre est un nombre premier, cependant à ce jour on ne sait toujours pas si il existe un nombre fini ou non de nombres de Fermat premiers.

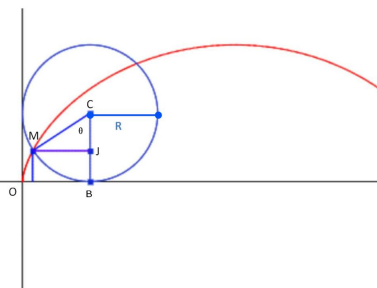
### 3 Le défi de la courbe brachistochrone

Le défi de la courbe brachistochrone a été posé par Bernoulli en 1696 à la communauté scientifique. Le but de ce défi est de trouver la trajectoire d'un objet qui passe d'un point A à un point B en ne subissant que la gravité, tel que le temps de parcours soit minimal. La trajectoire solution est la cycloïde. Plusieurs scientifiques ont apporté la solution à ce problème en utilisant des outils différents ( Leibniz, Le marquis de L'Hospital ou encore Newton ). Mais la démonstration qui va nous intéresser ici est celle de Jean Bernoulli, car elle fait intervenir le principe de moindre temps.

#### 3.1 Qu'est ce qu'une cycloïde ?

Tout d'abord voyons ce qu'est une cycloïde. Il s'agit de la courbe plane qui décrit la trajectoire d'un point fixé d'un cercle ( de rayon R) qui roule, sans glisser, le long d'une droite. Nous allons montrer que les équations paramétriques de cette courbe sont les suivantes :

$$\begin{cases} x = R \times (\theta - \sin(\theta)) \\ y = R(1 - \cos(\theta)) \end{cases} \quad \theta \in [0; 2\pi]$$



Pour cela prenons un point M quelconque sur la cycloïde. On remarque que  $\begin{cases} OB = BM = R \times \theta \\ CJ = R \times \cos(\theta) \\ MJ = R \times \sin(\theta) \end{cases}$

Ainsi nous retrouvons les coordonnées du point  $M(x, y)$  de la sorte :

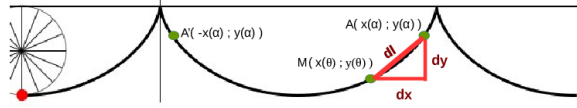
$$\begin{aligned} x &= BM - MJ = R \times \theta - R \times \sin(\theta) \\ y &= BC - CJ = R - R \times \cos(\theta) \end{aligned}$$

On retombe bien sur  $\begin{cases} x = R(\theta - \sin(\theta)) \\ y = R(1 - \cos(\theta)) \end{cases}$

#### 3.2 Isochronisme de la cycloïde

La cycloïde est une courbe qui n'a cessé d'intriguer la communauté scientifique de par ses nombreuses et fascinantes propriétés. Elle a notamment été étudiée par Roberval ( qui démontre que l'aire de la cycloïde est égale à 3 fois l'aire du cercle), Torricelli , mais aussi par Christopher Wren qui démontre que le périmètre de la cycloïde est le même que celui du carré circonscrit au cercle. La propriété qui nous intéresse ici est l'isochronisme de la cycloïde.





La cycloïde est une courbe isochrone au sens de Huygens, c'est-à-dire que pour tout point de départ A de cette courbe, la durée  $T(A)$  pour que le point revienne à sa position initiale est constante. Cette propriété est l'une des, nombreuses et étonnantes, propriétés de la cycloïde. Elle a été découverte par le mathématicien-physicien néerlandais Huygens en 1673.

Nous allons dans cette partie redémontrer l'isochronisme de la cycloïde.

Soit A un point de départ et  $\alpha$  l'angle lui correspondant, montrons que la période T reste toujours la même quelque soit le point de départ.

Posons :  $dx = x'(\theta) \cdot d\theta$  où  $x'(\theta) = r(1 - \cos(\theta))$  et  $dy = y'(\theta) \cdot d\theta$  où  $y'(\theta) = r \sin(\theta)$

$$dx^2 + dy^2 = (x'^2 + y'^2) d\theta^2 = (r^2(1 - \cos(\theta))^2 + r^2 \sin^2(\theta)) d\theta^2 = 2r^2(1 - \cos(\theta)) d\theta^2 = (2r \sin(\frac{\theta}{2}) d\theta)^2$$

On a d'une part  $v_M = \sqrt{2g(y_M - y_A)}$  et d'autre part  $v = \frac{dl}{dt} = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dt} = \frac{2r \sin(\frac{\theta}{2}) d\theta}{dt}$

$$\text{Ainsi } \sqrt{2g(y_M - y_A)} = \frac{2r \sin(\frac{\theta}{2})}{dt} d\theta \iff dt = \frac{2r \sin(\frac{\theta}{2})}{\sqrt{2g(y_M - y_A)}} d\theta = \frac{2r \sin(\frac{\theta}{2})}{\sqrt{2gr(\cos(\alpha) - \cos(\theta))}} d\theta = \sqrt{\frac{r}{g}} \frac{\sqrt{2} \sin(\frac{\theta}{2})}{\sqrt{\cos(\alpha) - \cos(\theta)}} d\theta$$

Sachant que  $\cos(\theta) = 2\cos^2(\frac{\theta}{2}) - 1$  on a donc  $dt = \sqrt{\frac{r}{g}} \frac{\sqrt{2} \sin(\frac{\theta}{2})}{\sqrt{\cos^2(\frac{\alpha}{2}) - \cos^2(\frac{\theta}{2})}} d\theta$

Une période T correspond au temps mis par le point M pour faire un aller-retour de A à A'. Or ce trajet peut être découpé en 4 de même durée : de A à S (0; R), de S à A', de A' à S et de S à A.

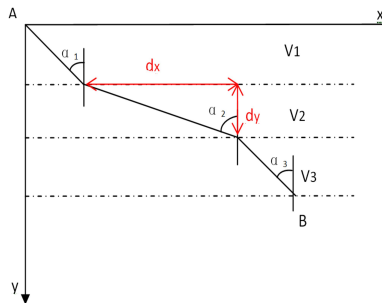
$$\text{Ainsi } T = 4 \sqrt{\frac{r}{g}} \int_{\theta=\alpha}^{\pi} \frac{\sin(\frac{\theta}{2})}{\sqrt{\cos^2(\frac{\alpha}{2}) - \cos^2(\frac{\theta}{2})}} d\theta. \text{ On pose alors } u = \frac{\cos(\frac{\theta}{2})}{\cos(\frac{\alpha}{2})} \Rightarrow \frac{du}{d\theta} = -\frac{\sin(\frac{\theta}{2})}{2\cos(\frac{\alpha}{2})}$$

$$T = 4 \sqrt{\frac{r}{g}} \times \int_1^0 -2 \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} du = 8 \sqrt{\frac{r}{g}} \times \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} du = 8 \sqrt{\frac{r}{g}} [\arcsin(u)]_0^1 = 8 \sqrt{\frac{r}{g}} \frac{\pi}{2}$$

On a donc  $T = 4\pi \sqrt{\frac{r}{g}}$  qui ne dépend pas de  $\alpha$ . La cycloïde est bien une courbe isochrone.

### 3.3 La résolution du défi par Jean Bernoulli

Jean (Johann) Bernoulli propose une résolution du problème en 1696 en se servant du principe de moindre temps. Il découpe le milieu traversé en une infinité de couches. On considère que pour chaque milieu i on ait :  $\frac{\sin(\alpha_i)}{v_i} = C = \frac{1}{v_{max}}$ .



Le théorème de l'énergie mécanique  $\frac{1}{2}mv^2 = mgy$  nous permet d'avoir  $v_{max} = \sqrt{2gy_{max}}$ .

$$\text{Or } \sin(\alpha) = \frac{dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin(\alpha)}{v} = \frac{1}{\sqrt{2gy}} \frac{dx}{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} = \sqrt{2gC}$$

On pose  $\frac{dy}{dx} = y'(x)$

$$\Leftrightarrow y(1 + y'(x)^2) = \frac{1}{2gC^2} = R$$

On pose  $y'(x) = \tan\left(\frac{\theta(x)}{2}\right)$

$$\text{Ainsi } y(x) = \frac{R}{1 + \tan^2\left(\frac{\theta(x)}{2}\right)} = R \cos^2\left(\frac{\theta(x)}{2}\right) = \frac{R}{2}(1 + \cos(\theta(x))) \left(1 + \tan^2(\theta) = \frac{1}{\cos^2(\theta)}\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\theta} \frac{d\theta}{dx} \text{ d'où } \frac{dx}{d\theta} = \frac{dy}{d\theta} * \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{-\frac{R}{2} \sin(\theta)}{\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \frac{-\frac{R}{2} * 2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)} = -R \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = -R \left(\frac{1 + \cos(\theta)}{2}\right) = -\frac{R}{2} - \frac{\cos(\theta)}{2}$$

En intégrant on obtient :  $x(\theta) = -\frac{R}{2}(\theta + \sin(\theta)) + k$  avec  $k$  une constante.

Posons  $\theta' = \pi - \theta$ ,  $x = -\frac{R}{2}(\pi - \theta' + \sin(\pi - \theta')) + k = \frac{R}{2}(\theta' - \sin(\theta')) + k'$  où  $k = -\frac{R\pi}{2}$

On a retrouvé bien les équations d'une cycloïde :  $x = \frac{R}{2}(\theta' - \sin(\theta'))$  et  $y = \frac{R}{2}(1 - \cos(\theta'))$

## 4 Équations d'Euler-Lagrange

En mécanique newtonienne on étudie ce qui se passe à une position et un temps donné, en prenant en compte les forces appliquées et l'accélération. Cela permet de construire la trajectoire du système, petit intervalle de temps par petit intervalle de temps. Pour l'application du principe de moindre action, on considère le trajet dans son intégralité et le principe nous dit que la trajectoire choisie par la nature est celle qui minimise l'Action :  $\int L(t; q_1(t); \dot{q}_1(t); \dots; q_n(t); \dot{q}_n(t)) .dt$  où  $L$  est le lagrangien. En mécanique lagrangienne  $L = E_c - E_p$  et dépend de chaque paramètre  $q_i$  du système. Le lagrangien est donc un outil compact et difficile à manipuler. Ainsi les équations d'Euler-Lagrange donnent des conditions sur chaque paramètre du système pour minimiser l'Action. Cela permet de transformer le lagrangien en un système d'équations différentielles.

### 4.1 Euler et Lagrange

Leonhard Euler né en 1707 à Bâle (Suisse) et mort à 76 ans le 18 septembre 1783, fit d'importantes découvertes dans des domaines aussi variés que le calcul infinitésimal et la théorie des graphes. Il introduit également une grande partie de la terminologie et de la notation des mathématiques modernes, en particulier pour l'analyse mathématique, comme la notion de fonction mathématique. Il est aussi connu pour ses travaux en mécanique, en dynamique des fluides, en optique et en astronomie.

Le comte Joseph Lagrange, né en 1763, et mort en 1836, est un général d'Empire puis homme politique français. Il a fait de nombreuses contributions importantes en mathématiques, la physique, l'astronomie et d'autres domaines. Ses réalisations comprennent le fameux théorème de Lagrange de la valeur moyenne mais également la création de la mécanique de Lagrange.

### 4.2 Théorème

#### 4.2.1 Le Théorème dans $\mathbb{R}$

Soit  $L: (t; x; z) \in \mathbb{R}^3 \rightarrow L(t; y; z) \in \mathbb{R}$

$E = \{q \in C^1([a; b], \mathbb{R}) \mid q(a) = \alpha_1 \text{ et } q(b) = \alpha_2\}$  avec  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  deux réels fixés

$E_0 = \{\varphi \in C^2([a; b]; \mathbb{R}) \mid \varphi(a) = \varphi(b) = 0\}$

Soit  $J = \int_{t=a}^b L(t; q(t); \dot{q}(t)) .dt$

Le théorème d'Euler-Lagrange nous dit que pour que la fonctionnelle  $J$  ait un extremum en  $q$  il est nécessaire d'avoir  $\forall t \in [a; b]$

$$\frac{\partial L}{\partial q}(t; q(t); \dot{q}(t)) - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(t; q(t); \dot{q}(t)) \right) = 0$$

#### 4.2.2 Preuve

Pour démontrer ce théorème, nous avons besoin du lemme suivant.

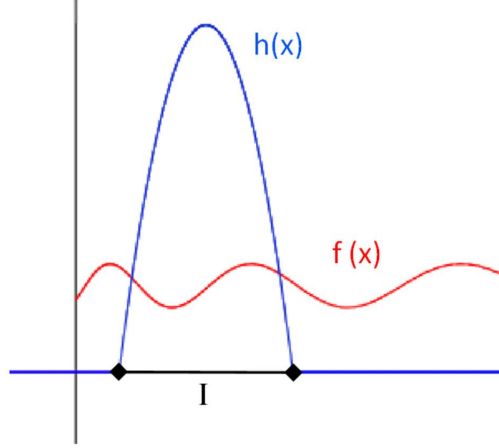
**Lemme** Soit  $f: C^0([a; b], \mathbb{R})$ , si  $\forall h \in C^1([a; b], \mathbb{R})$  tel que  $h(a) = h(b) = 0$ , on a  $\int_a^b f(t) \times h(t) .dt = 0$  alors  $f = \tilde{0}$ .

La démonstration du théorème d'Euler-Lagrange débute donc par la démonstration du lemme ci-dessus.

**Démonstration - lemme** Cette démonstration se fait par l'absurde, nous allons émettre une hypothèse et nous montrerons que celle-ci amène forcément à quelque chose d'absurde.

Supposons qu'il existe  $x_0 \in ]a; b[$  tel que  $f(x_0) > 0$  alors, par continuité de la fonction  $f$ , il existe un intervalle  $I$ , où  $I \subset ]a; b[$ , tel que  $\forall x \in I$  on a  $f(x) > 0$ .

Prenons  $h : \begin{cases} h(x) > 0 & \text{si } x \in I \\ h(x) = 0 & \text{sinon} \end{cases}$



On a donc  $\begin{cases} f(x) \times h(x) > 0 & \text{si } x \in I \\ f(x) \times h(x) = 0 & \text{sinon} \end{cases}$ . Ainsi  $\int_a^b f(t) \times g(t) . dt = \int_I f(t) \times g(t) . dt > 0$

Ceci est absurde car nous avons posé  $\int_a^b f(t)h(t).dt = 0$ . Notre hypothèse de départ, à savoir  $\exists x_0 \notin ]a; b[$  tel que  $f(x_0) > 0$ , est donc fautive. Ainsi  $\forall x \in ]a; b[$ ,  $f(x) \leq 0$ .

En reprenant le même schéma pour  $f(x_0) < 0$ , on retombe sur la même absurdité. Ainsi  $\forall x \in ]a; b[$ ,  $f(x) \geq 0$ .

Ainsi on doit avoir pour  $\forall x \in ]a; b[$ ,  $f(x) \geq 0$  et  $f(x) \leq 0$ . On a donc forcément  $f(x) = 0$ . Le lemme est donc démontré.

### Démonstration du Théorème

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{L(X, Y + \varepsilon B, Z + \varepsilon C) - L(X, Y, Z)}{\varepsilon} = dL(X, Y, Z).(O, B, C) = \frac{\partial L}{\partial Y} B + \frac{\partial L}{\partial Z} C$$

Pour la démonstration du théorème nous supposons que  $J$  possède un extremum en  $q$  et montrons que les conditions d'Euler-Lagrange sont forcément vérifiées.

On sait que  $J(q + \varepsilon \varphi) = J(q) + \varepsilon dJ(q)\varphi + o(\varepsilon)$  avec  $o(\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$  avec  $\varphi \in E_0$

Ainsi :

$$\begin{aligned} dJ(q)(\varphi) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{J(q + \varepsilon \varphi) - J(q)}{\varepsilon} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^b \frac{L(t; q(t) + \varepsilon \varphi(t); \dot{q}(t) + \varepsilon \dot{\varphi}(t)) - L(t; q(t); \dot{q}(t))}{\varepsilon} . dt \\ &= \int_a^b \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{L(t; q(t) + \varepsilon \varphi(t); \dot{q}(t) + \varepsilon \dot{\varphi}(t)) - L(t; q(t); \dot{q}(t))}{\varepsilon} . dt \\ &= \int_a^b \left( \frac{\partial L}{\partial q}(t; q(t); \dot{q}(t)) \times \varphi(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(t; q(t); \dot{q}(t)) \times \dot{\varphi}(t) \right) . dt \end{aligned}$$

par intégration par partie on a :

$$\int_a^b \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(t; q(t); \dot{q}(t)) \times \dot{\varphi} . dt = \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(t; q(t); \dot{q}(t)) \times \varphi(t) \right]_a^b - \int_a^b \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(t; q(t); \dot{q}(t)) \right) \times \varphi(t) . dt$$

Or  $\left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(t; q(t); \dot{q}(t)) \times \varphi(t) \right]_a^b = 0$  car  $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$ .

d'où  $\int_a^b \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(t; q(t); \dot{q}(t)) \times \dot{\varphi} \cdot dt = - \int_a^b \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(t; q(t); \dot{q}(t)) \right) \times \varphi(t) \cdot dt$

On a donc  $dJ(q)(\varphi) = \int_a^b \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(t; q(t); \dot{q}(t)) \times \varphi(t) \cdot dt - \int_a^b \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(t; q(t); \dot{q}(t)) \right) \times \varphi(t) \cdot dt = \int_a^b \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \varphi - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \varphi \right) \cdot dt$ . Or nous avons supposé que J admettait un extremum en q d'où  $dJ(q) = 0$ . Ainsi  $\int_a^b \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \right) \varphi \cdot dt = 0$  or  $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$  donc par le lemme  $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(t; q(t); \dot{q}(t)) - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(t; q(t); \dot{q}(t)) \right) = 0$

nous venons donc de démontrer les équation d'Euler-Lagrange en dimension 1.

### 4.2.3 Conservation de l'énergie : cas où $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$

Comme dit précédemment le principe de moindre action permet de retrouver les lois de la mécanique newtonnienne. Le théorème de Noether en est un bon exemple. Emmy Noether, mathématicienne et physicienne allemande, établit en 1918 le théorème portant son nom. Le théorème de Noether met en évidence les équivalences entre les différentes invariances et l'existence d'une quantité, que l'on sait exprimer d'après le Lagrangien, qui est conservée.

- pour une invariance par translation, la quantité de mouvement  $mv$  est conservée
- pour une invariance par rotation, le moment cinétique est conservé
- pour une invariance temporelle, l'énergie est conservée

Ces trois types de conservation étaient déjà connus avant le théorème de Noether, mais il a permis une meilleure compréhension de ces derniers.

L'invariance temporelle correspond au cas où le lagrangien ne dépend pas explicitement du temps. Nous allons maintenant démontrer le théorème de Noether dans le cas de l'invariance temporelle.

Si  $\frac{\partial L}{\partial t}(t, q(t), \dot{q}(t)) = 0$  et  $q$  est solution de E-L alors l'égalité d'Euler-Lagrange devient  $L(q(t), \dot{q}(t)) - \dot{q} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(t; q(t); \dot{q}(t)) \right) = k$ , avec  $k \in \mathbb{R}$

#### Preuve

Si  $\frac{\partial L}{\partial t}(t; q(t); \dot{q}(t)) = 0$  alors  $L(t, q(t), \dot{q}(t)) = L(q(t), \dot{q}(t))$ . Étudions  $L(q(t), \dot{q}(t)) - q \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right)$  :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( L(q(t), \dot{q}(t)) - \dot{q}(t) \times \left( \frac{\partial L(q(t), \dot{q}(t))}{\partial \dot{q}} \right) \right) &= \frac{\partial q}{\partial t} \times \frac{\partial L}{\partial q} + \frac{\partial \dot{q}}{\partial t} \times \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \left( \frac{d\dot{q}}{dt} \times \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} + \dot{q} \times \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \right) \\ &= \dot{q} \frac{\partial L}{\partial q} - \dot{q} \times \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \\ &= \dot{q} \left( \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ainsi il existe une constante réelle  $k$  tel que  $L(q(t), \dot{q}(t)) - \dot{q}(t) \times \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(t; q(t); \dot{q}(t)) \right) = k$

On retrouve bien la conservation de l'énergie.

## 4.3 Applications

### 4.3.1 Longueur minimale d'une courbe dans $\mathbb{R}^2$

Dans cette partie nous allons montrer un résultat admis par tous : le trajet le plus court reliant 2 points est la droite.

Soient 2 points  $A(a; y_a)$  et  $B(b; y_b)$  dans  $\mathbb{R}^2$ . Soit  $y : t \mapsto y(t)$  une fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}^2$ . Dans cette partie on cherche la fonction  $y(t)$  qui minimise le temps de parcours entre A et B (ici le temps minimal correspond à la longueur minimale). La longueur de la courbe est la somme des variations infinitésimales de cette dernière.  $\int_S ds = \int \sqrt{dt + dy} = \int \sqrt{1 + y'(t)}$

$$J(y) = \int_a^b \sqrt{1 + (y'(t))^2}$$

$$\text{on pose } L(t, y(t), y'(t)) = \sqrt{1 + (y'(t))^2}$$

$$\frac{\partial L(t, y(t), y'(t))}{\partial t} = \frac{\partial L(t, y(t), y'(t))}{\partial y(t)} = 0 \text{ et } \frac{\partial L(t, y(t), y'(t))}{\partial y'(t)} = \frac{y'(t)}{\sqrt{1 + (y'(t))^2}}$$

d'après Euler-Lagrange J minimale

$$\Leftrightarrow \frac{\partial L(t, q(t), \dot{q}(t))}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \left( \frac{y'(t)}{\sqrt{1 + (y'(t))^2}} \right) = 0 \Leftrightarrow \frac{y'(t)}{\sqrt{1 + (y'(t))^2}} = C \text{ où } C \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow y'(t) = C \sqrt{1 + (y'(t))^2} \Leftrightarrow \frac{(y'(t))^2}{C^2} = 1 + (y'(t))^2 \Leftrightarrow (y'(t))^2 = K \text{ où } K = \frac{1}{\left(\frac{1}{C^2} - 1\right)} \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow |y'(t)| = \sqrt{K}$$

ou encore  $\frac{y'(t)}{\sqrt{1 + (y'(t))^2}} = \sin(\alpha)$  constant  $\Rightarrow y$  est une droite.

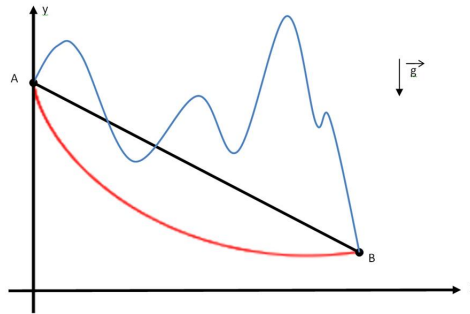
On a donc  $y(t)$  de la forme  $y(t) = \alpha t + \beta$  ce qui correspond à l'équation d'une droite.

Les équations d'Euler-Lagrange nous ont permis de démontrer que la courbe minimisant le temps de trajet entre 2 points dans  $\mathbb{R}^2$  est bien la droite.

### 4.3.2 Courbe Brachistochrone

Nous avons vu qu'en appliquant le principe de Fermat il était possible de résoudre le défi de la courbe brachistochrone. Nous allons maintenant voir que l'on retombe sur le même résultat en utilisant les équations d'Euler-Lagrange.

Soient  $A(x_a; y_a)$  et  $B(x_b; y_b)$  deux points. On suppose la gravité constante et l'absence de frottements.



Le théorème de l'énergie mécanique  $\frac{1}{2}mv^2 = mgy$  nous permet d'avoir  $|v| = \sqrt{2gy}$ . Or  $v = \frac{ds}{dt}$  où  $ds = \sqrt{1 + (y'(t))^2}$

Soit T (le temps) l'action à minimiser.  $T = \int dt = \int_{x_a}^{x_b} \sqrt{\frac{1 + (y'(x))^2}{2gy(x)}} dx$ . Ici on cherche la fonction  $y$

qui permet de minimiser le temps de parcours entre A et B.

On pose  $L(x, y(x), y'(x)) = \frac{1}{\sqrt{2g}} \times \sqrt{\frac{1+(y'(x))^2}{y(x)}}$ . Pour des raisons de lisibilité nous posons  $Y = y(x)$  et  $Z = y'(x)$ . Le lagrangien devient donc  $L(x, Y, Z) = \frac{1}{\sqrt{2g}} \times \sqrt{\frac{1+Z^2}{Y}}$ . On remarque que  $\frac{\partial L(t, Y, Z)}{\partial t} = 0$ . D'après Euler-Lagrange, il existe  $k \in \mathbb{R}$  tel que :

$$\begin{aligned} L(Y, Z) - Z \frac{\partial L}{\partial Z} &= k \\ \iff \frac{1}{\sqrt{2g}} \times \sqrt{\frac{1+Z^2}{Y}} - Z \times \frac{Z}{\sqrt{Y(1+Z^2)}} &= k \\ \iff \frac{1}{\sqrt{Y(1+Z^2)}} &= k\sqrt{2g} \\ Y(1+Z^2) &= \frac{1}{2gk^2} \\ y(t) \times \left(1 + (y'(t))^2\right) &= R \quad \text{où } R = \frac{1}{2gk^2} \end{aligned}$$

On reconnaît l'égalité du **3.3** : la courbe minimisant le temps de parcours est bien la cycloïde.

### 4.3.3 Démonstration du PFD par Euler-Lagrange

Le Principe Fondamental de la Dynamique est le pilier de la mécanique newtonienne, et comme tous les autres résultats de la mécanique de Newton, il peut être déduit du principe de moindre action.

L'énergie peut s'écrire :  $E = \dot{x} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - L(x, q(x), \dot{q}(x))$

$L = T(\dot{x}(t)) - U(x(t))$  avec  $T$  l'énergie cinétique et  $U$  l'énergie potentielle

$$\begin{aligned} E &= \dot{x}(t) \frac{\partial (T(\dot{x}(t)) - U(x(t)))}{\partial \dot{x}} - T(\dot{x}(t)) + U(x(t)) \\ &= \dot{x}(t) \frac{\partial \frac{1}{2} m \dot{x}(t)^2}{\partial \dot{x}} - \frac{1}{2} m \dot{x}(t)^2 + U(x(t)) \\ &= m \dot{x}(t)^2 - \frac{1}{2} m \dot{x}(t)^2 + U(x(t)) \\ &= \frac{1}{2} m \dot{x}(t)^2 + U(x(t)) \end{aligned}$$

$$A = \int_{t_a}^{t_b} \left( \frac{1}{2} m \dot{x}(t)^2 - U(x(t)) \right) dt$$

Pour les extremums de l'action on a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial L(x, q(x), \dot{q}(x))}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L(x(t), q(x(t)), \dot{q}(x(t)))}{\partial \dot{x}} \right) = 0 &\iff \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{2} m \dot{x}(t)^2 - U(x(t)) \right) - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} m \dot{x}(t)^2 - U(x(t)) \right) \right) = \\ &\iff \frac{-\partial(U(x(t)))}{\partial x} = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m \frac{\partial \dot{x}(t)^2}{\partial \dot{x}} \right) = \frac{d}{dt} m \dot{x}(t) = m \ddot{x}(t) \end{aligned}$$

On a donc  $\sum \vec{F} = m \ddot{x} = m \vec{a}$

## 5 Étude du pendule simple

Nous venons de voir dans le paragraphe précédent que le Principe Fondamental de la Dynamique peut être retrouvé en utilisant le lagrangien. Nous avons décidé de l'appliquer à un pendule simple. Ce pendule simple peut osciller dans un plan vertical. Il correspond à une masse  $m$  suspendue par une tige de masse nulle de longueur  $l$ . La position du pendule par rapport à la verticale est repérée par l'angle  $\theta$  comme représenté ci-dessous.

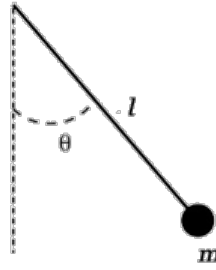


FIGURE 5 –

### 5.1 Bilan des forces :

- Le poids  $\vec{P} = m\vec{g}$  avec  $\vec{g}$  l'accélération due à la pesanteur
- La tension  $\vec{T}$  de la tige, toujours perpendiculaire au mouvement circulaire de la masse.

Dans ce modèle on néglige les autres forces, dont les forces de frottements. Sans frottements, le pendule a un mouvement perpétuel.

Soit  $l$  la longueur du pendule et soit  $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$  sa vitesse angulaire. La vitesse de la masse est alors  $v = l\dot{\theta}$ . Son énergie mécanique, c'est-à-dire la somme de l'énergie cinétique du pendule et de son énergie potentielle de pesanteur, vaut :

$$\begin{aligned} E_m &= E_c + E_{pp} \\ E_m &= \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl(1 - \cos(\theta)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{E_m}{mgl^2} &= \frac{\dot{\theta}^2}{2} - \omega^2(1 - \cos(\theta)) = K \\ \frac{E_m}{mgl^2} &= \frac{\dot{\theta}^2}{2} - \omega^2 * 2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = K \geq 0 \end{aligned}$$

En utilisant le PFD (cf 4.3.3) on obtient le système suivant : 
$$\begin{cases} l\ddot{\theta} = -g\sin\theta \\ T = ml\dot{\theta}^2 + mg\cos\theta \end{cases}$$

### 5.2 Classification des trajectoires en fonction de la valeur de l'énergie

Pour  $K = 0$  on a :  $\frac{\theta}{2} = 0$  [π] donc  $\theta = 0$  [ $\frac{\pi}{2}$ ], et  $\dot{\theta} = 0$

Position d'équilibre haute  $\theta = \pi$  et  $\theta = 0$  donc  $K = 2\omega^2$

$$K = \frac{\dot{\theta}^2}{2} + 2\omega^2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

Si  $0 < K < 2\omega^2$  on a des oscillations périodiques car  $2\omega^2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \leq K$

donc  $\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \leq \frac{K}{2\omega^2} < 1$  alors on peut poser  $\frac{\theta_{max}}{2} = \arcsin\left(\sqrt{\frac{K}{2\omega^2}}\right)$  et comme  $\sin$  est croissante

on aura que :  $|\theta| \leq \theta_{max} \leq \pi$  et  $\frac{\dot{\theta}^2}{2} + 2\omega^2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = K = 2\omega^2\sin^2\left(\frac{\theta_{max}}{2}\right) = K\left(\theta, \dot{\theta}\right)$

$$\frac{d\theta}{dt} = \sqrt{2K - 4\omega^2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} \text{ d'où } T = 4 \int_0^{\theta_{max}} \left( \frac{d\theta}{\sqrt{4\omega^2\sin^2\left(\frac{\theta_{max}}{2}\right) - 4\omega^2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}} \right)$$

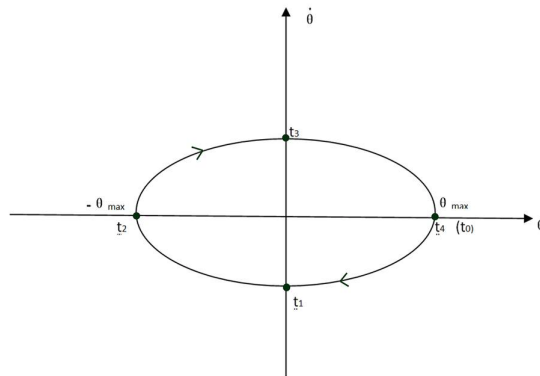
Pour  $K < 2\omega^2$  on se situe dans la région dite d'oscillations, représentée en noir. Chaque orbite est parcourue dans le sens horaire autour des points d'équilibre S correspondant aux valeurs  $0[2\pi]$  de  $\theta_0$  où  $\theta_0$  est l'angle  $\theta$  à  $t = 0$ .

Cas où  $K = 2\omega^2$ , on se situe sur la séparatrice représentée en bleu.



$$\frac{\dot{\theta}}{2} + \omega^2 * 2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = 2\omega^2 \iff \frac{\dot{\theta}}{2} = 2\omega^2 (1 - \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)) = 2\omega^2 \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

d'où  $\dot{\theta} = \pm 2\omega \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$



Pour  $K > 2\omega^2$ , on se situe dans la zone rouge : les trajectoires du pendule tournent complètement.

$$\frac{\dot{\theta}}{2} = K - 2\omega^2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

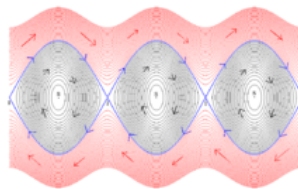


FIGURE 6 –  
portrait de phase d'un pendule simple

# Conclusions et perspectives

En somme, ce projet fut un grand enrichissement personnel. Nous avons eu un aperçu sur la manière dont les physiciens construisirent leurs théories et comment ils les démontrèrent que ce soit par l'expérience, ou par le calcul. Nous avons également pu découvrir qu'un même principe, ici le Principe de Moindre action, pouvait relier différents domaines de la physique, de la mécanique céleste et classique à l'optique géométrique. Cette approche tranche par rapport à la structure habituelle de nos cours. Généralement, dans chaque cours nous ne nous intéressons qu'à une seule branche de la physique, ou des mathématiques. Jamais auparavant n'avait-on associé des différentielles avec de la trigonométrie.

Cependant cet E.C ressemblait plus à une recherche d'informations pour découvrir un sujet, qu'à l'image que l'on se fait souvent d'un projet, c'est-à-dire l'accomplissement de quelque chose après des semaines de travail. Peut-être aurait-il plus ressemblé à un projet si son but premier n'avait pas été de s'enrichir soi-même, mais plutôt d'aider les autres à s'enrichir en partageant ce que nous avons découvert. L'aboutissement de notre travail n'est en fait que la production d'un rapport qui ne sera lu que par un professeur. Nous pouvons pour ainsi dire, en conclure que nous avons découvert un autre aspect des projets.

Pour poursuivre ce projet, on pourrait envisager de reprendre les recherches effectuées pour les approfondir et les partager avec les autres en créant un petit livret disponible à la bibliothèque par exemple, dans lequel on expliquerait le principe de moindre action d'une façon telle que tous les étudiants puissent comprendre sans avoir à faire de recherches à côté.

## Références

- [1] <http://www-irem.univ-fcomte.fr/download/irem/document/ressources/math-phys/refraction/fermat.pdf>
- [2] <http://ws.isima.fr/~leborgne/IsimathMeca/EulerLagrangeProof.pdf>
- [3] [https://fr.wikipedia.org/wiki/Lois\\_de\\_Snell-Descartes#Loi\\_de\\_Snell-Descartes\\_pour\\_la\\_r](https://fr.wikipedia.org/wiki/Lois_de_Snell-Descartes#Loi_de_Snell-Descartes_pour_la_r). C3.A9flexion
- [4] <https://www.youtube.com/watch?v=MleYz6aMBbk>
- [5] [https://www.youtube.com/watch?v=ptkt\\_3TOWpo](https://www.youtube.com/watch?v=ptkt_3TOWpo)
- [6] [https://cral.univ-lyon1.fr/labo/fc/cdroms/cdrom2005/cd\\_lum2005/documents/vitlum.pdf](https://cral.univ-lyon1.fr/labo/fc/cdroms/cdrom2005/cd_lum2005/documents/vitlum.pdf)
- [7] [https://fr.wikipedia.org/wiki/Aberration\\_de\\_la\\_lumi%C3%A8re](https://fr.wikipedia.org/wiki/Aberration_de_la_lumi%C3%A8re)
- [8] [https://fr.wikipedia.org/wiki/Pendule\\_simple#/media/File:PenduleEspaceDesPhases.png](https://fr.wikipedia.org/wiki/Pendule_simple#/media/File:PenduleEspaceDesPhases.png)
- [9] [https://www.bibnum.education.fr/sites/default/files/ARAGO\\_MEMOIRE\\_SUR\\_LA\\_VITESSE\\_DE\\_LA\\_LUM](https://www.bibnum.education.fr/sites/default/files/ARAGO_MEMOIRE_SUR_LA_VITESSE_DE_LA_LUM)
- [10] [http://acces.ens-lyon.fr/clea/archives/cahiers-clairaut/CLEA\\_CahiersClairaut\\_043\\_04.pdf](http://acces.ens-lyon.fr/clea/archives/cahiers-clairaut/CLEA_CahiersClairaut_043_04.pdf)