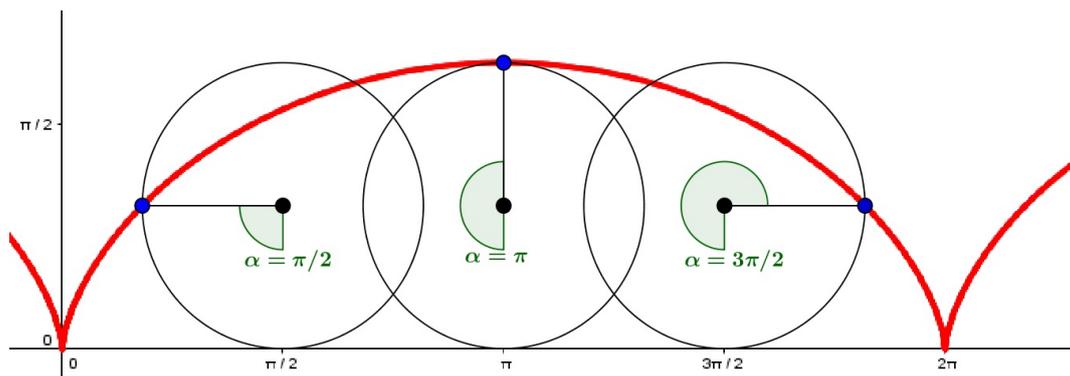


Le Principe de Moindre Action
en Physique et en Mathématiques :
application en optique et en mécanique céleste



Etudiants :

Alice Bernard

Simon Caillard

Antoine Stock

Enseignant-responsable du projet :

Guillaume Duval

Date de remise du rapport : **19/06/2017**

Référence du projet : **STPI/P6/2017 – 035**

Intitulé du projet : Le Principe de Moindre Action en Physique et en Mathématiques :
application en optique et en mécanique céleste

Type de projet : théorique, historique et philosophique

Objectifs du projet : Lors de ce projet, nous avons étudié des principes essentiels de la physique en lien avec le principe de moindre action ainsi que les mathématiciens et physiciens qui les ont découverts. Nous avons aussi cherché des utilisations mécaniques de ces principes. Enfin tout au long du projet nous nous sommes intéressés aux techniques utilisés par les physiciens pour prouver ces lois.

Mots-clefs du projet : Physique - Mathématiques - Optique - Découverte

Table des matières

1	Introduction	2
2	Méthodologie	2
3	Histoire de la vitesse de la lumière	2
3.1	Les premières intuitions	4
3.2	La première mesure par Olaus Roemer	4
3.3	La course au calcul de la vitesse de la lumière	5
3.3.1	L'expérience de Fizeau	6
3.3.2	L'expérience de Foucault	6
3.3.3	L'expérience de Michelson	7
3.4	La lumière : une onde	7
4	Les lois d'optique de Descartes	8
4.1	La Réflexion	8
4.1.1	Problème de Héron	9
4.1.2	Enoncé et démonstration	9
4.2	La Réfraction	9
4.3	Propriété réflexive de l'ellipse	10
4.3.1	Définition de l'ellipse	10
4.3.2	Démonstration géométrique	11
4.3.3	En utilisant le gradient	12
5	La cycloïde	12
5.1	Les équations paramétriques	13
5.2	La brachistochronie	13
5.2.1	La démonstration de Jean Bernoulli	15
5.3	L'isochronie	16
5.4	Les caractéristiques de la cycloïde	16
5.4.1	Le périmètre	17
5.4.2	L'aire sous la courbe d'après Roberval	18
6	Equation d'Euler Lagrange	18
6.1	Enoncé du théorème	18
6.2	Démonstration	18
6.2.1	Lemme	18
6.2.2	Equations d'Euler Lagrange	19
6.3	Applications	19
6.3.1	Conservation de « l'énergie », théorème de Beltrami	20
6.3.2	Le principe fondamental de la dynamique	20
6.3.3	Minimisation du trajet	21
6.3.4	Minimisation du temps de parcours	22
7	Application au pendule simple	23
7.1	Avec l'aide de la mécanique du point	?
7.2	Avec les équations d'Euler Lagrange	?
7.3	Etude qualitative du mouvement du pendule	?
8	Conclusion	?
9	Sources	?

1 Introduction

Ce projet physique a gravité tout du long autour du Principe de Moindre Action.

Le principe de moindre action est l'hypothèse physique selon laquelle la dynamique d'une quantité physique (la position, la vitesse et l'accélération d'une particule, ou les valeurs d'un champ en tout point de l'espace, et leurs variations) peut se déduire à partir d'une unique grandeur appelée action en supposant que les valeurs dynamiques permettent à l'action d'avoir une valeur optimale entre deux instants donnés (la valeur est minimale quand les deux instants sont assez proches). La plupart des équations fondamentales de la physique peuvent être formulées à partir du principe de moindre action. C'est notamment le cas en mécanique classique, en électromagnétisme, en relativité générale et en théorie quantique des champs.

Nous avons cherché à démontrer quelques théorèmes de la Physique en lien avec celui-ci, en comprenant comment les physiciens de l'époque, avec leurs outils, ont réussi à comprendre le monde qui nous entoure. Nous avons aussi étudié des théorèmes et fonctions mathématiques particulières qui ont été utilisés ensuite en physique. Enfin nous avons cherché des outils mathématiques en lien avec le Principe de moindre action, et qui pourraient être ensuite utilisés pour résoudre des problèmes mathématiques et physiques au cours de nos études.

Certaines des méthodes étudiées lors de ce projet semble bien complexes mais sont historiques car elles sont antérieurs au développement du calcul différentiel.

2 Méthodologie

Pour cet enseignement nous avons 1h30 par semaine supervisée par Monsieur Guillaume Duval.

Pour ce projet de physique nous avons travaillé de pair avec le groupe traitant du calcul des variations en lien, comme nous, avec le Principe de Moindre Action en Physique et en Mathématiques.

La première semaine, nous nous sommes partagé le travail et avons formé des groupes de 3 personnes. Ainsi à tour de rôle, les groupes ont fait des exposés sur divers aspects du Principe de moindre action. Pendant les exposés, les autres groupes devaient synthétiser les informations pour les comprendre et ainsi les intégrer dans leur rapport.

Ce système nous a permis de traiter de sujets complexes et de les comprendre en donnant nos points de vues et réfléchissant ensemble sur des problèmes en cours. Cela nous a aussi permis de partager la charge de travail en trois.

Enfin, lors des cours, notre enseignant nous a fait réfléchir ensemble sur des concepts mathématiques et mécaniques. Nous avons ainsi pu partager nos idées et mieux comprendre les problèmes posés.

Ce projet nous a demandé un quantité non négligeable de recherche en mathématique et physique, mais la création d'un groupe de discussion sur facebook nous a permis de mieux échanger lors de nos recherches et des phases d'organisation. Celui-ci a aussi beaucoup été utilisé pour échanger nos conseils et critiques lors de la rédaction de ce rapport.

Pour le rapport nous avons utilisé le logiciel TeXmacs, conseillé par notre professeur pour mettre en page facilement des calculs mathématiques. Nous avons aussi utilisé GeoGebra pour créer les illustrations des courbes étudiées en cours.

3 Histoire de la vitesse de la lumière

On sait aujourd'hui que la lumière a une vitesse de propagation de 299 792,458 km/s mais durant des milliers d'années on pensait que la lumière était instantanée. Mais la connaissance de la vitesse de la lumière nous sera ensuite utile pour justifier les lois de l'optique que nous allons étudier dans la deuxième partie.

3.1 Les premières intuitions

Le premier à avoir eu l'intuition que la lumière a une vitesse finie est un savant arabe du 10^e siècle : Alhazen (965-1039).

C'est l'auteur du 1^{er} traité d'optique où il explique le phénomène de réfraction. Il pense que la lumière a une vitesse de propagation mais n'arrive pas à le prouver.

Galilée (1564-1642) reprend ses idées et tente de mesurer cette vitesse grâce à cette expérience :

Il éloigne de 1800m, deux personnes munies d'une lanterne dont la lumière est cachée. Le premier observateur découvre sa lanterne et met en route l'ancêtre du chronomètre pour mesurer le temps. Dès que le deuxième observateur aperçoit la lanterne, il découvre la sienne. Ainsi quand la première personne aperçoit la deuxième lanterne allumée, elle arrête le chronomètre. Mais ils ont beau refaire l'expérience plusieurs fois, il leur est impossible de trouver une valeur car la lumière met quelques millièmes de secondes à parcourir les 3600m.

Malgré cela, Galilée aida indirectement la mesure de la vitesse de la lumière car il inventa la lunette d'astronomie qui permit d'observer les quatre satellites de Jupiter.

3.2 La première mesure par Olaüs Roemer

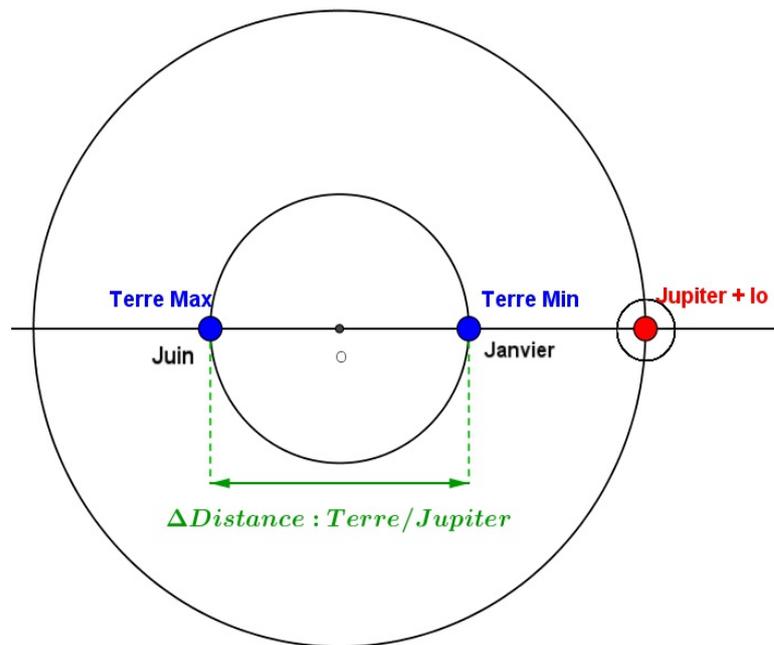
Les travaux de Johannes Kepler (1571-1630) permettent de comprendre la mécanique du système solaire, cela permet de savoir où sont les planètes du système solaire à n'importe quel moment.

Grâce à cela, Jean Dominique Cassini (1625-1712), directeur du tout nouveau Observatoire de Paris en 1671, publie des tables qui permettent de savoir les jours et les horaires des éclipses des satellites de Jupiter. Ces tables ont été utilisées pour déterminer la longitude des lieux terrestres et améliorer la précision des cartes. Grâce à la différence entre l'heure d'observation et les tables on pouvait facilement en déduire la longitude du lieu où l'on se trouvait.

Mais il arrive parfois que l'un des satellites, Io, soit en retard ou en avance de quelques minutes. Cassini n'arrive pas à comprendre pourquoi.

En 1676, Olaüs Roemer (1644-1710) arrive à expliquer les retards de Io et parvient à en déduire la vitesse de la lumière. L'idée principale dans son raisonnement consiste à attribuer une vitesse à la lumière. En effet la propagation de la lumière est encore considérée comme instantanée à l'époque. Or l'existence d'une vitesse permet l'application de la formule $v = \frac{d}{t}$ que l'on pourra aussi utiliser sous la forme $v = \frac{\Delta d}{\Delta t}$

La distance entre la Terre et Jupiter varie au cours du temps:



Le temps entre deux extremums de distances, c'est à dire d'un maximum à un minimum ou inversement est de six mois. On suppose ici que Jupiter reste immobile pendant ces six mois. Cette approximation est cohérente sachant que sa période de révolution est douze fois plus élevée que celle de la Terre.

Donc $\Delta d = 2UA$ (unité astronomique, environ égale à la distance entre la Terre et le Soleil), valeur connue approximativement à l'époque.

De plus les décalages des éclipses de Io s'élevaient à plus ou moins 10 minutes au maximum d'après les observations de l'époque (8 minutes en réalité). On note toutefois que ce décalage de 10 minutes est très faible, effet il s'agit uniquement d'une variation de 0,4 % du temps écoulé entre deux éclipses de Io, soit le temps d'une révolution.

Donc $\Delta t = 20mn$

Olaüs Roemer dispose donc de tous les éléments nécessaires pour calculer la vitesse de la lumière. Il trouve $v = c = 212000 \text{ km/s}$ soit une erreur de 29%, ce qui est très faible sachant qu'à l'époque on ne savait même pas que la lumière avait une vitesse de propagation.

Mais Cassini remet en cause les résultats car on n'observe pas de retard sur les autres satellites de Jupiter. Il est effectivement difficile de mettre ce phénomène en avant à cause des mouvements très complexes dûs aux interactions mutuelles des satellites, ce que Casini ne pouvait pas savoir à l'époque.

Mais il faut attendre 1728 et la détection par James Bradley (1693-1762) de l'aberration des fixes pour que la découverte de Roemer soit reconnue par la communauté scientifique.

3.3 La course au calcul de la vitesse de la lumière

Maintenant que l'on sait que la lumière a une vitesse de propagation finie, la course au calcul de la vitesse de la lumière commence.

L'observatoire de Paris est dirigé par François Arago depuis 1846. Celui-ci a deux protégés : Hyppolite Fizeau (1819-1856) et Léon Foucault (1819-1868) qui ont ensemble produit la

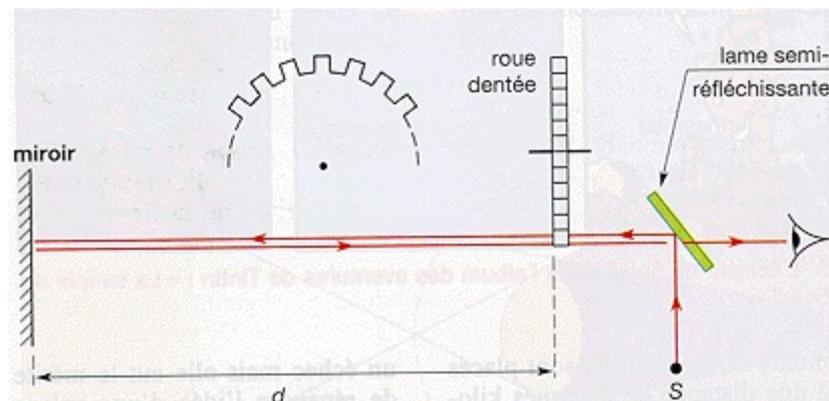
première image du soleil. Arago les met en compétition afin de trouver une mesure précise de la vitesse de la lumière. Celle-ci permettrait de calculer la distance Terre-Soleil encore inconnue avec précision à l'époque.

3.3.1 L'expérience de Fizeau

C'est Fizeau qui réalisa en 1849 la première mesure terrestre de la vitesse de la lumière. Il mesura une vitesse de 315 300 km/s grâce à une ingénieuse machine munie d'une roue dentée et de deux miroirs dont un semi-réfléchissant.

La roue dentée est mise en rotation par un moteur. La lumière traverse le miroir semi-transparent, traverse un "creux" de la roue, est réfléchi sur le deuxième miroir et parvient à l'observateur après avoir parcouru une distance $2d$. Fizeau a fait son expérience entre Montmartre et le mont Valérien à Suresne, soit une distance $d=8633\text{m}$. La roue est munie de 720 dents (soit 1440 interval "dent-creux") et tourne à une vitesse d'environ 12 tours/seconde.

Lorsque la vitesse de rotation de la roue dépasse les 12 tours/s, l'observateur observe une éclipse, la lumière a rencontré une dent sur le chemin retour. Comme il est difficile de maintenir constante la vitesse de rotation, Fizeau enregistre la valeur pour chaque mesure et trouve une moyenne de 12,6 tour/s.



Pour trouver la valeur de la vitesse de la lumière, il ne reste qu'un simple calcul à faire :

Soit Δt le temps d'aller/retour de la lumière à la vitesse c .

Le secteur angulaire est $\alpha = \frac{2\pi}{1440}$ rad et la vitesse angulaire de la roue est $\omega = 2\pi \times 12,6$ rad/s soit 12,6 tours/s.

Pendant le temps d'un aller/retour de la lumière Δt , la roue a tourné d'un angle α à une vitesse ω donc $\Delta t = \frac{\alpha}{\omega} = \frac{1}{1440 \times 12,6}$

On sait que $\Delta t = \frac{2d}{c}$ et $\Delta t = \frac{\alpha}{\omega}$ donc $c = \frac{2d}{\alpha} \omega$

En faisant l'application numérique on trouve une vitesse de 315 000 km/s. Cependant Fizeau sait que ce résultat est biaisé à cause de l'incertitude de la vitesse de rotation de la roue. Cette invention lui vaudra quand même les félicitations de l'Académie des Sciences et la légion d'honneur.

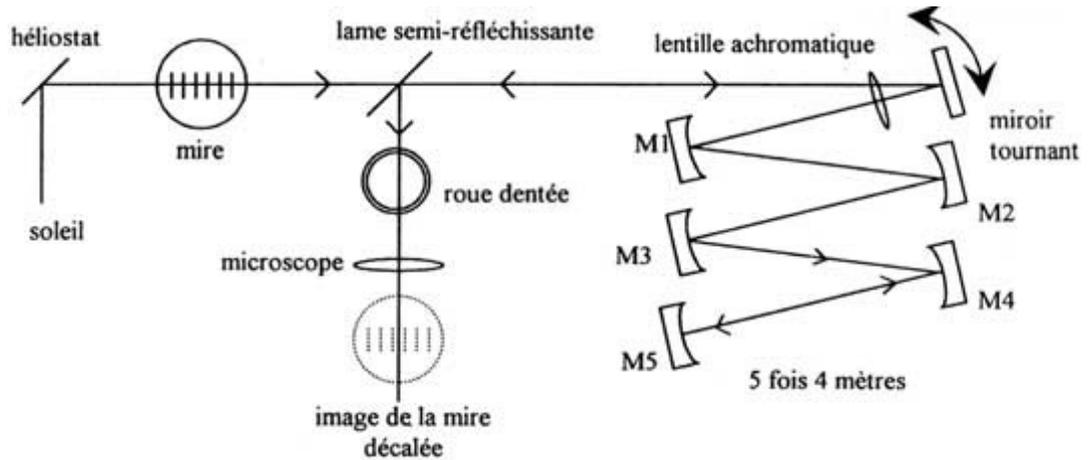
Sa méthode fut améliorée par son élève Alfred Cornu qui augmenta la vitesse de rotation jusqu'à 1600 tr/s et la distance de parcours de la lumière. Il fait plus de 1000 mesures et trouve une vitesse 298 500 km/s, il est lui-même étonné de ce résultat qui se rapproche

de la méthode de Foucault qu'il ne trouvait pas fiable.

3.3.2 L'expérience de Foucault

Foucault (le père du pendule) met au point une nouvelle machine beaucoup plus précise grâce à une jeu de miroirs fixes et pivotants.

Sa méthode utilise un miroir tournant à grande vitesse (24 000 tours/min), une lentille et quatre miroirs sphériques. Elle permet de réaliser l'expérience sur un espace relativement petit car la lumière ne parcourt qu'environ 20m.



Le miroir est mis en rotation grâce à un dispositif composé d'une turbine et d'une soufflerie à air comprimé. Un rayon issu d'une source lumineuse se reflète sur le miroir en rotation en direction d'un miroir sphérique. Pendant ce temps le miroir tourne d'un angle θ . En revenant sur le miroir tournant, le rayon lumineux ne retrouve pas sa direction initiale vers la source lumineuse mais est décalé d'un angle 2θ .

Comme θ est un petit angle, on peut faire l'estimation suivante : $\frac{d_1}{d} = \tan 2\theta \approx 2\theta$

Le miroir tourne à une vitesse angulaire de $\omega = \frac{\theta}{\Delta t}$, Δt correspond au temps de parcours d'un aller retour, soit $2d_2$ à une vitesse c .

Cela nous donne $\Delta t = \frac{2 \times d_2}{c}$, on obtient donc $\omega = \frac{c \times d}{4 \times d_1 \times d_2}$.

On trouve donc c en fonction de la vitesse angulaire :

$$c = \frac{\omega \times d}{4 \times d_1 \times d_2}$$

Afin d'améliorer la précision de sa méthode, Foucault fait parcourir une plus grande distance à la lumière en utilisant quatre miroirs sphériques qui donne une distance de 40,4m au total.

En 1862, il estima la vitesse de la lumière à 298 000 km/s.

3.3.3 L'expérience de Michelson

Mais les Français ont perdu le monopole de la mesure de la vitesse de propagation de la lumière quand l'Américain Alfred Michelson (1852-1931) décide d'améliorer la méthode

du miroir tournant à partir de 1878. Il remplace le miroir tournant par un prisme à 8 faces et fait parcourir 70.8km à la lumière. Il trouve alors en 1927 une vitesse de $299\,796 \pm 4$ km/s. Cette mesure devient un référence dans le monde scientifique.

3.4 La lumière : une onde

A la fin du 19e siècle, on comprend que la lumière se propage comme une onde. On peut donc la caractériser grâce à une fréquence f (en Hertz) et une longueur d'onde λ (en mètre). On calcule donc la célérité comme ceci : $v = f\lambda$ avec $f = \frac{1}{T}$ avec T le temps en s.

Les scientifiques mettent donc en place des machines de plus en plus précises permettant de mesurer les fréquences et des longueurs d'onde de différents types de rayons lumineux. C'est en 1973 qu'Evansson trouve, grâce à la mesure de la fréquence et de la longueur d'onde d'un laser helium-néon une vitesse de propagation de $299\,792\,458.70 \pm 1.10$ m/s. Mais avant 1960, le mètre n'était défini que grâce un mètre-étalon situé à Sèvres. C'était une barre de platine qui servait de référence. Mais celle ci se déforme et s'use, ce qui rend le mètre trop imprécis par rapport à la précision de la mesure de la vitesse de la lumière. C'est pourquoi on redéfinit le mètre pour être universel, consultable n'importe où et dans n'importe quelles conditions. En 1983, la 17e conférence générale des poids et des mesures stoppe la course à la précision et définit la vitesse de propagation de la lumière à $299\,792.458$ km/s exactement. Un mètre est donc la distance parcourue par la lumière en $1/299\,792\,458$ s.

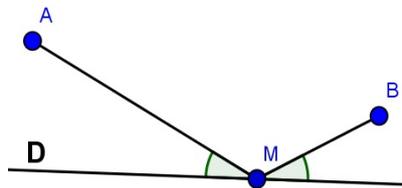
4 Les lois d'optique de Descartes

Le principe de Fermat, appelé aussi principe du moindre temps, énonce que la lumière se propage entre deux points en suivant la trajectoire qui minimise le temps de parcours. On étudiera donc dans cette partie le comportement de la lumière.

4.1 La Réflexion

4.1.1 Problème de Héron

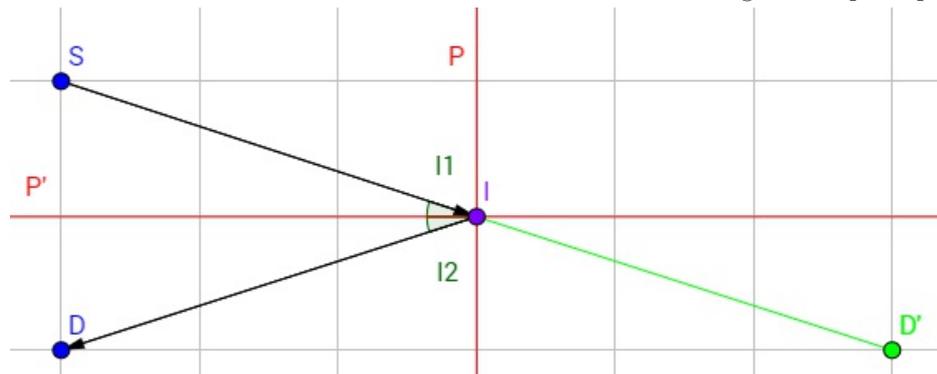
Le problème de Héron est un problème d'optimisation classique. Soit deux points A et B situés du même côté d'une droite D. On souhaite aller du point A au point B en passant par la droite D. De plus on souhaite parcourir la distance la plus petite possible. Par quel point M appartenant à D faut-il passer? La solution de ce problème consiste à se déplacer de manière à avoir réflexion en M par rapport à la droite D. On démontrera ce résultat grâce à la loi de Snell-Descartes.



4.1.2 Énoncé et démonstration

La loi de Snell - Descartes énonce que le rayon en se réfléchissant sur un matériau avec un angle i_1 va repartir avec un angle i_2 tel que $i_1 = -i_2$

Nous allons maintenant démontrer la loi de réflexion concernant la réflexion grâce au principe de



On considère que pour la réflexion, la lumière arrive du point S sur le miroir (P) en P. il repart ensuite vers le point D. On considère le point D' symétrique de D par rapport au plan P. l'angle

d'incidence est appelé i_1 et i_2 est l'angle réfléchi.

On prend I un point sur la droite P, tel que I est le seul point tel que le chemin SPD soit le plus court. En I, $i_1 = i_2$.

$[SPD] > [SID]$ pour $P \neq I$.

$$v.T_{APB} = SP + PD = \text{distance}(\text{SPD})$$

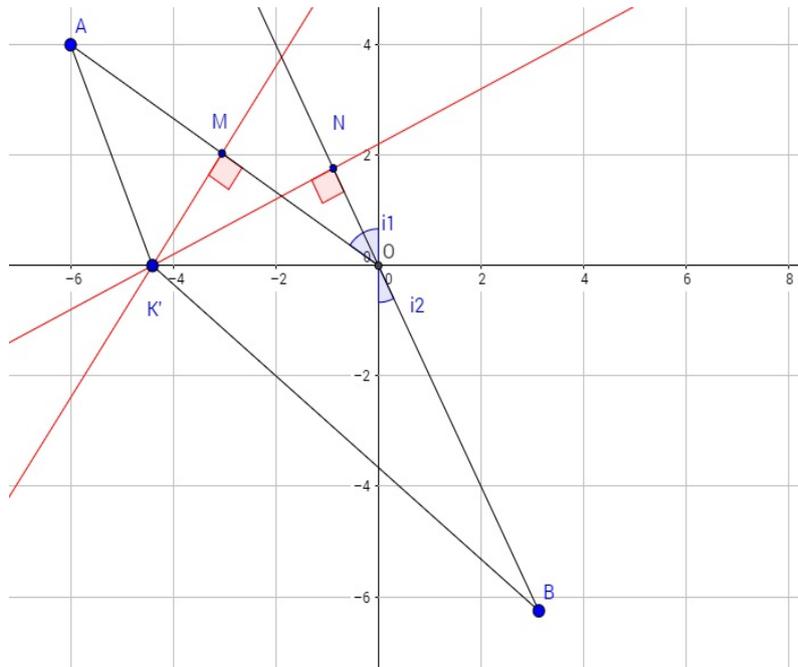
$\text{distance}(\text{SPD}) = SP + PD = SP + PD' > SID' = \text{distance}(\text{SID})$ car D est le symétrique de D'.

comme $\theta_1 = \theta_2 \Rightarrow i_1 = i_2$ La loi de Snell-Descartes est donc vérifiée.

4.2 La Réfraction

Nous donnons ci-dessous des démonstrations de l'équivalence entre la loi de Descartes - Snell et le principe de Fermat dans le cas de la réfraction.

La réfraction caractérise le fléchissement d'une onde, optique dans le cas présent, au niveau de l'interface entre deux milieux de vitesse de phases différentes.



Ici on peut voir un rayon lumineux qui passe d'un milieu 1 vers le milieu 2 en partant de A et en allant vers B. Lors de ce passage, l'onde optique rencontre l'interface entre les deux milieux et subit une réfraction en O.

Dans le cas de la réfraction, on veut montrer que le chemin le plus court en temps est défini par le chemin AOB, tel que les angles i_1 et i_2 vérifient la Loi de Réfraction : $n_1 \sin(i_1) = n_2 \sin(i_2)$ avec n_i l'indice de réfraction d'un milieu que traverse le rayon lumineux. $n_i = \frac{c}{v_i}$

K' est un point différent de O

Ici on veut montrer que $T_{AOB} \leq T_{AKB}$ c'est-à-dire : $\frac{AO}{V_1} + \frac{BO}{V_2} \leq \frac{AK'}{V_1} + \frac{BK'}{V_2}$

On prend donc ici :

$$\hat{i}_2 + \widehat{NOK'} = 90^\circ \text{ et } \widehat{NK'O} + \widehat{NOK'} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{NK'O} = \hat{i}_2$$

$$\hat{i}_1 + \widehat{MOK'} = 90^\circ \text{ et } \widehat{MK'O} + \widehat{MOK'} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{MK'O} = \hat{i}_1$$

$$NO = \sin(i_2) \times K'O$$

$$MO = \sin(\hat{i}_1) \times K'O$$

On sait que $BO = BN - ON$ et $AO = AM + OM$

$$\text{Donc } \frac{AO}{V_1} + \frac{BO}{V_2} = \frac{BN}{V_2} - \frac{ON}{V_2} + \frac{AM}{V_1} + \frac{OM}{V_1}$$

$$= \frac{BN}{V_2} + \frac{AM}{V_1} + K'O \left(\frac{\sin(i_2)}{V_2} - \frac{\sin(i_1)}{V_1} \right)$$

On sait que $AM \leq AK'$ et $BN \leq BK'$

$$\text{Donc } \frac{AM}{V_1} + \frac{BN}{V_2} \leq \frac{AK'}{V_1} + \frac{BK'}{V_2}$$

Selon la Loi de Réfraction : $n_1 \sin(i_1) = n_2 \sin(i_2)$ avec $n_i = \frac{c}{V_i}$

$$\Rightarrow V_i = \frac{c}{n_i} \quad \text{donc} \quad \frac{\sin(i_i)}{V_i} = \frac{\sin(i_i)n_i}{c}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin(i_1)}{V_1} = \frac{\sin(i_2)}{V_2}$$

$$\Rightarrow K'O \left(\frac{\sin(i_1)}{V_1} - \frac{\sin(i_2)}{V_2} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{AO}{V_1} + \frac{BO}{V_2} = \frac{BN}{V_2} + \frac{AM}{V_1} \leq \frac{AK'}{V_1} + \frac{BK'}{V_2}$$

Donc le chemin AOB correspond au temps de parcours le plus court, et la loi de réflexion implique bien le principe de Fermat concernant la réfraction.

4.3 Propriété réflexive de l'ellipse

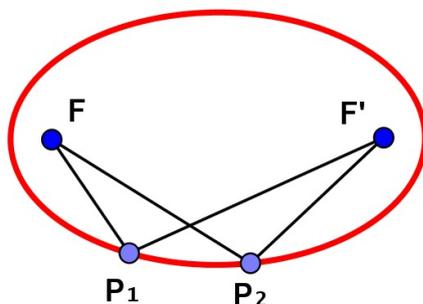
En utilisant les propriétés réflexive de l'ellipse on peut retrouver les lois de réfraction et de réflexion.

4.3.1 Définition de l'ellipse

Historiquement les ellipses ont été définies comme l'intersection d'un cône de révolution avec un

plan, si et seulement si l'angle entre l'axe du cône et le plan est supérieur à l'angle entre l'axe et la génératrice du cône.

Il existe également la définition bifocale affirmant que l'ellipse est l'ensemble des points P dont la somme des distances à deux points fixes F et F' est constante.



On peut énoncer la propriété suivante, lorsqu'un rayon lumineux part d'un point focal de l'ellipse et est réfléchi par l'ellipse, il passera ensuite par le second point focal de cette ellipse. On pourra démontrer cette propriété géométriquement et algébriquement. Cette propriété fut d'abord démontré par Gilles Personne de Roberval avant l'utilisation des dérivées et l'utilisation du gradient pour la preuve algébrique.

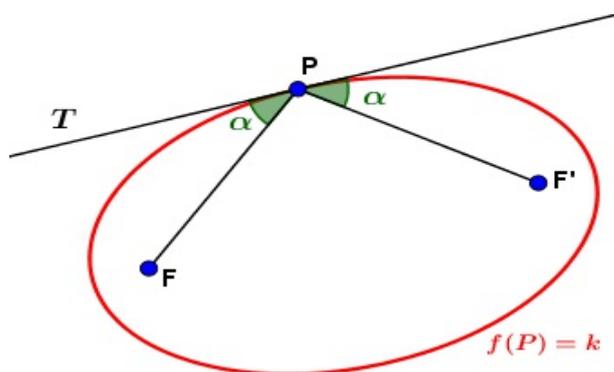
4.3.2 Démonstration géométrique

Soit la fonction $f: P \rightarrow \|PF\| + \|PF'\|$ avec $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

Les ellipses de foyer F et F' sont les lignes de niveau de f les lignes de niveau croissantes sont orientées vers l'extérieur. On considère une tangente T quelconque à l'ellipse $f(P) = k$.

Soit M un point appartenant à T . On observe que $FM + FM'$ est minimum au point d'intersection avec l'ellipse, la tangente étant située à l'extérieur de l'ellipse.

D'après le problème de Héron on peut donc affirmer qu'il y a réflexion dans l'ellipse.



4.3.3 En utilisant le gradient

Soit A et B les deux foyers de l'ellipse, k une constante et x un point de l'ellipse.

Alors l'ensemble des points A et B tel que $|A - x| + |B - x| = k$ définissent de l'ellipse.

Soit la fonction $f: P \rightarrow PA + PB$

Les ellipses de foyers A et B sont des lignes de niveau f . Les lignes de niveaux croissantes sont orientées vers l'extérieur.

Soit P un point appartenant à T. ON observe que $AP+PB$ est minimum au point d'intersection de la tangente avec l'ellipse, la tangente étant situé à l'extérieur de l'ellipse.

D'après le problème de Héron, on peut donc affirmer qu'il y a une réflexion dans l'ellipse.

On cherche à montrer, grâce au calcul du gradient de f au point P, la fonction f est minimale

Soit P un point appartenant à l'ellipse de coordonnées (x, y) , on pose :

$$f(P) = \sqrt{(x_A - x)^2 + (y_A - y)^2} + \sqrt{(x_B - x)^2 + (y_B - y)^2}$$

On calcule le gradient : $\text{grad } f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right)$

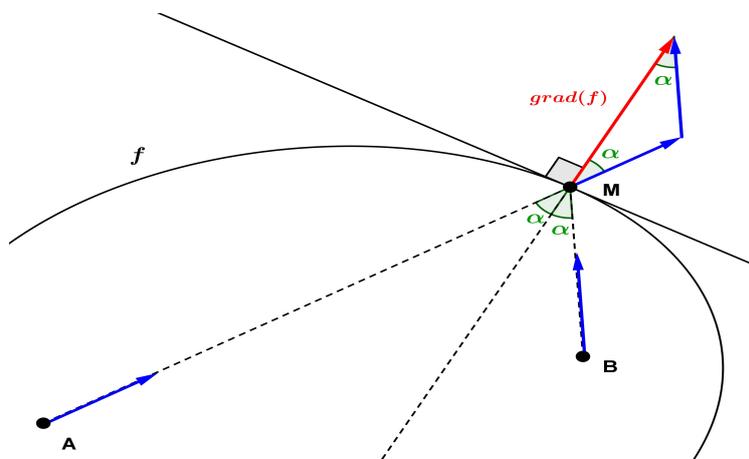
$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{x - x_A}{\sqrt{(x_A - x)^2 + (y_A - y)^2}} + \frac{x - x_B}{\sqrt{(x_B - x)^2 + (y_B - y)^2}} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{y - y_A}{\sqrt{(x_A - x)^2 + (y_A - y)^2}} + \frac{y - y_B}{\sqrt{(x_B - x)^2 + (y_B - y)^2}} \end{aligned}$$

On peut remarquer que $\sqrt{(x_A - x)^2 + (y_A - y)^2} = \|AP\|$ et $\sqrt{(x_B - x)^2 + (y_B - y)^2} = \|BM\|$.

On peut donc écrire

$$\begin{aligned} \text{grad } f &= \frac{1}{\|\vec{AM}\|} (x - x_A; y - y_A) + \frac{1}{\|\vec{BM}\|} (x - x_B; y - y_B) \\ &= \frac{\vec{AM}}{\|\vec{AM}\|} + \frac{\vec{BM}}{\|\vec{BM}\|} \end{aligned}$$

On peut donc tracer ces deux vecteurs. D'après les propriétés du losange, on trouve bien que les angles sont égaux.



5 La cycloïde

Le principe de moindre action estime que la nature agit par les formes les plus courtes et les plus simples. Quel est donc la courbe la plus simple et la plus courte pour aller d'un point à un autre ?

C'est la question que posèrent de nombreux scientifiques. Après de nombreuses hypothèses on peut aujourd'hui affirmer que c'est la courbe d'une cycloïde qui réduit le temps de parcours entre deux points.

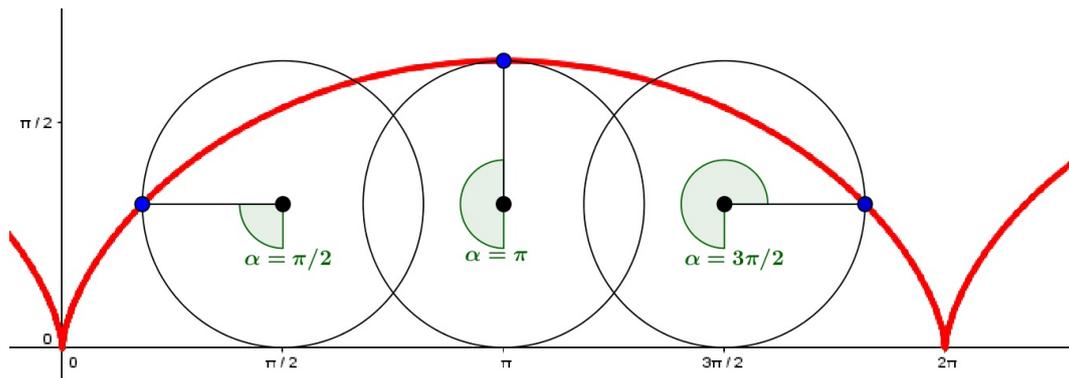
La cycloïde est une figure mathématique qui en a fait réfléchir plus d'un. En effet plusieurs grands noms des mathématiques se sont intéressés à cette courbe bien particulière.

Elle fut étudié dans un premier temps par Nicolas de Cuse (1401-1464) qui cherchait à trouver l'aire d'un cercle par intégration. Mais ce n'est qu'au XVI que Marin Mersenne va en donner une définition satisfaisante et quelques-unes de ses propriétés évidentes comme le fait que la longueur de la base est égale à la circonférence du cercle générateur. C'est Galilée, qui étudia cette courbe pendant plus de quarante ans, qui lui donna son nom mais sans réussir à trouver l'aire sous la courbe.

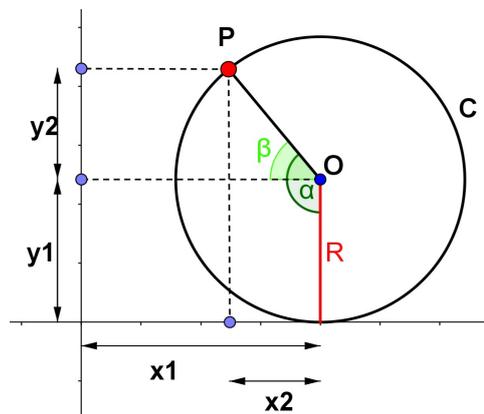
Mais avant d'essayer de comprendre les propriétés de cette fascinante courbe, comment la construit-on ?

5.1 Les équations paramétriques

Une cycloïde est la courbe décrite par un point fixe placé sur un cercle qui roule sans glisser sur une droite.



Déterminons les équations paramétriques de cette courbe :



Soit un point P, fixé sur le cercle C de centre O et de rayon R. Le cercle se déplaçant en roulant et sans glissement, P décrit une cycloïde. De plus on prend P tel que ses coordonnées soient (0, 0) lorsque $\alpha = 0$.

Afin de déterminer les équations paramétriques de la cycloïde, on décompose le mouvement de P.

x_1 : Distance parcourue sur l'axe \vec{x} par le cercle en roulant sans glissement, correspondant à un arc de cercle de C tel que

$$x_1 = R\alpha$$

x_2 : Distance $\overrightarrow{\text{OxPx}}$ avec Px la projection de P sur l'axe \vec{x} et Ox la projection de O sur l'axe \vec{x} , en fonction de α , décrivant la rotation horaire du cercle.

$$\begin{aligned} x_2 &= R \sin(-\alpha) \\ &= -R \sin(\alpha) \end{aligned}$$

y_1 : Coordonnée en y du centre du cercle (constante).

$$y_1 = R$$

y_2 : Distance $\overrightarrow{\text{OyPy}}$ avec Py la projection de P sur l'axe \vec{y} et Oy la projection de O sur l'axe \vec{y} , en fonction de α , décrivant la rotation horaire du cercle.

$$\begin{aligned} y_2 &= -R \cos(-\alpha) \\ &= -R \cos(\alpha) \end{aligned}$$

On a alors à l'instant α : $\begin{cases} x = x_1 + x_2 \\ y = y_1 + y_2 \end{cases}$

On obtient donc :

$$\begin{cases} x = R(t - \sin(\alpha)) \\ y = R(1 - \cos(\alpha)) \end{cases}$$

5.2 La brachistochronie

Au début 17e siècle, Galilée a posé la question suivante : quel est le chemin minimise le temps de parcour d'une masse sans vitesse initiale entre deux point A et B non aligné verticalement ?

Galilée a donc expérimentalement cherché la courbe qui minimise le temps de parcours entre A et B.

Il constate d'abord que si la masse se déplace en ligne droite jusqu'au point B alors la vitesse maximale serait atteinte en B et la vitesse moyenne du parcours serait $v_{\text{moy}} = \frac{v_{\text{max}}}{2}$.

Lorsque qu'on introduit un point O à la verticale de A à la hauteur de B afin de former le triangle rectangle OAB, la vitesse maximale est atteinte en O et reste constante sur le segment OB donc on en déduit facilement que ce temps de parcours est plus petit.

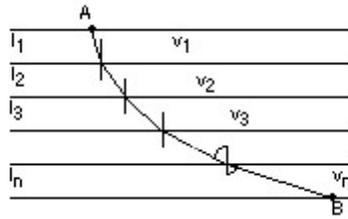
Mais en 1633, Galilée conclura que c'est lorsque la masse effectue un arc de cercle de diamètre AB entre les deux points que le parcours est minime, il n'était pas loin du bon résultat mais les scientifiques prouvèrent que c'était faux.

En 1696, Bernoulli, dans l'espoir de lancer un défi à Newton, remet le problème au goût du jour. Au final, quatre mathématiciens (Newton, Leibniz, Jean et Jacques Bernoulli (les frères Bernoulli se haïssaient)) trouvèrent séparément que la trajectoire qui minimise le temps est la cycloïde.

5.2.1 La démonstration de Jean Bernoulli

Jean Bernoulli a l'idée de remplacer la masse par un rayon lumineux qui évolue dans un milieu où l'indice de réfraction, et donc la vitesse de propagation, varie. Il se base sur les travaux en optique de Fermat et Descartes.

Jean Bernoulli suppose d'abord qu'il y a un nombre de couches horizontales qui tend vers l'infini entre les deux points et grâce aux lois d'optique décrites par Descartes, il suppose que la masse se déplace en ligne droite entre chaque couche. Il a ensuite supposé qu'il y avait un dioptre en chaque couche et donc un angle de réfraction et une vitesse propre à chaque couche.



On sait que la lumière va d'un point à un autre par le chemin le plus rapide (principe de Fermat).

Lors du passage d'un milieu d'indice n_1 à un milieu d'indice n_2 , on a $n_1 \sin(\alpha_1) = n_2 \sin(\alpha_2)$ or la vitesse de la lumière valant $\frac{c}{n_i}$, on en déduit $\frac{\sin(\alpha_i)}{v} = C = \frac{1}{v_{\max}}$.

Grace à Galilée, on sait calculer la vitesse d'une masse en fonction de son altitude y :

D'après le théorème de la mécanique :

$$\Delta E_m = \Delta E_c + \Delta E_p = 0 \quad \text{avec} \quad \Delta E_c = \frac{1}{2} m v^2 \text{ et } \Delta E_p = m g y$$

On a donc : $v = \sqrt{2gy}$ et donc $v_{\max} = \sqrt{2gy_{\max}}$

Grace aux propriétés trigonométriques et en définissant les côtés des triangles rectangles formés à chaque dioptre comme dx et dy on a :

Calcul de y :

$$\begin{aligned} \sin(\alpha_i) &= \frac{dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} \\ \text{donc } \frac{\sin(\alpha_i)}{v_i} &= \frac{dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2} \sqrt{2gy}} = c \quad \forall c \in \mathbb{R} \\ \frac{dx}{\sqrt{dx^2 \left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)} \sqrt{y}} &= c' \quad \text{avec } c' = \sqrt{2g} c \\ \frac{dx}{dx \sqrt{(1 + y'^2)} y} &= c' \quad \text{car } y'(x) = \frac{dy}{dx} \\ y(1 + y'^2) &= R \quad \text{si on prend } R = \frac{1}{c'^2} \end{aligned}$$

On pose $y' = \frac{dy}{dx} = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$

$$\begin{aligned} y &= \frac{R}{1 + \tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} \\ &= R \left(\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right) \quad \text{car } \frac{1}{1 + \tan^2(x)} = \cos^2(x) \\ &= R \left(\frac{1 + \cos(\theta)}{2} \right) \quad \text{car } \cos^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2} \end{aligned}$$

Calcul de x :

$$\text{On a } \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\theta} \frac{d\theta}{dx}$$

$$\text{On sait que } y = \frac{R}{2} (1 + \cos(\theta)) \Leftrightarrow \frac{dy}{d\theta} = -\frac{R}{2} \sin(\theta)$$

$$\text{et } \frac{dy}{dx} = y' = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

$$\text{d'où } \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \left(-\frac{R}{2} \sin(\theta) \right) \frac{d\theta}{dx}$$

$$\frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)} = -\frac{R}{2} 2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \frac{d\theta}{dx}$$

$$dx = -R \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) d\theta$$

$$dx = -R \left(\frac{1 + \cos(\theta)}{2}\right)$$

$$x = -\frac{R}{2}(\theta + \sin(\theta)) + K$$

avec K une constante d'intégration

En posant $\theta' = \pi - \theta$ on peut retrouver les équations paramétriques de la cycloïde calculées précédemment :

$$x = -\frac{R}{2}(\pi - \theta' + \sin(\theta')) + K$$

$$x = \frac{R}{2}(\theta' - \sin(\theta')) + K'$$

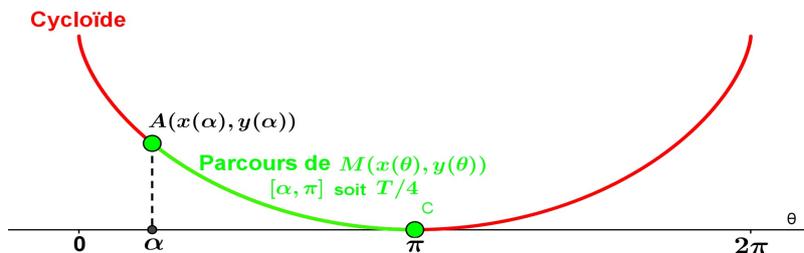
d'où $\begin{cases} x = \frac{R}{2}(\theta' - \sin(\theta')) + K' \\ y = \frac{R}{2}(1 - \cos(\theta')) \end{cases}$

Ce sont les équations paramétriques de la cycloïde. La lumière emprunte le chemin le plus rapide, la cycloïde est donc la trajectoire qui minimise le temps de parcours. On dit qu'elle est brachistochrone.

5.3 L'isochronie

En 1659, Huygens démontra l'isochronie de la cycloïde. C'est à dire que la période d'oscillation d'une masse le long de la cycloïde ne dépend pas du point de départ de cette masse. Cette propriété très intéressante lui permis de construire un pendule extrêmement précis car peut importe l'angle de départ, la période reste la même. Il n'y apas d'approximation des angles petits.

Calculons la période de cette masse.



On place deux points sur la courbe : $A(x(\theta), y(\theta))$ et $M(x(\alpha), y(\alpha))$ avec A fixe.

On peut écrire : $\begin{cases} x'(\theta) = R(1 - \cos\theta) \\ y' = R \sin\theta \end{cases}$ et $\begin{cases} dx = x' d\theta \\ dy = y' d\theta \end{cases}$

$$\begin{aligned} dl^2 &= dx^2 + dy^2 \\ &= (x' + y')^2 d\theta^2 \\ &= R^2((1 - \cos(\theta))^2 + \sin^2(\theta))d\theta^2 \\ &= R^2(1 - 2 \cos(\theta) + \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta))d\theta^2 \\ &= (2 - 2 \cos(\theta))R^2 d\theta^2 \\ dx^2 + dy^2 &= \left(2 R \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) d\theta\right)^2 \quad \text{car } 1 - 2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \cos(\theta) \end{aligned}$$

$$\text{Donc } dl = 2 R \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) d\theta$$

Grâce à la formule de Galilée on peut calculer la vitesse de la masse entre les point A et M : $v_M = \sqrt{2 g (y_M - y_A)}$ et on sait que $v_M = \frac{dl}{dt}$

On cherche la période T de la courbe, on écrit donc :

$$dt = \frac{2R \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) d\theta}{\sqrt{2g(y_M - y_A)}}$$

On calcule : $y_M - y_A = R(1 - \cos(\theta)) - R(1 - \cos(\alpha)) = R(\cos(\alpha) - \cos(\theta))$

$$\text{On a : } dt = \sqrt{\frac{2R}{g}} \frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) d\theta}{\sqrt{\cos(\alpha) - \cos(\theta)}}$$

On sait que $\cos(x) = 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1$ donc $\cos(\alpha) - \cos(\theta) = 2\left(\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)$ d'où

$$dt = \sqrt{\frac{R}{g}} \frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) d\theta}{\sqrt{\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}}$$

Afin de trouver la période on intègre θ entre α et π et donc t entre 0 et $\frac{T}{4}$:

$$\begin{aligned} \frac{T}{4} &= \sqrt{\frac{R}{g}} \int_{\alpha}^{\pi} \frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sqrt{\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}} d\theta \\ \Leftrightarrow T &= 4\sqrt{\frac{R}{g}} \int_{\alpha}^{\pi} \frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sqrt{\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \left(1 - \frac{\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\right)}} d\theta \end{aligned}$$

On cherche à montrer que l'intégrale ne dépend pas de α . On effectue un changement de variable :

$$\begin{aligned} u &= \frac{\cos(\theta/2)}{\cos(\alpha/2)} \\ d\theta &= -2 \frac{\cos(\alpha/2)}{\sin(\theta/2)} du \\ \theta = \alpha &\rightarrow u = 1 \\ \theta = \pi &\rightarrow u = 0 \end{aligned}$$

On peut donc écrire :

$$\begin{aligned} T &= 4\sqrt{\frac{R}{g}} \int_1^0 \frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sqrt{\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)(1-u^2)}} (-2) \frac{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} du \\ T &= 8\sqrt{\frac{R}{g}} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} du \\ T &= 8\sqrt{\frac{R}{g}} [\text{Arcsin}(u)]_0^1 \\ T &= 4\pi \sqrt{\frac{R}{g}} \end{aligned}$$

On trouve bien que la période d'oscillations de la masse le long de la cycloïde est indépendante de la position de départ, la courbe est isochrone.

NB : L'application que Huygens fait de ce résultat est tout à fait remarquable. En prenant un pendule oscillant entre 2 arches de cycloïde inversées et en choisissant bien la longueur de la corde on peut forcer celle-ci à suivre une trajectoire cycloïdale. Les oscillations d'un tel pendule sont donc isochrones, ce qui en fait un pendule parfait pour mesurer des temps.

5.4 Les caractéristiques de la cycloïde

5.4.1 Le périmètre

Calculer le périmètre de la cycloïde après la démonstration de son isochronie est facile.

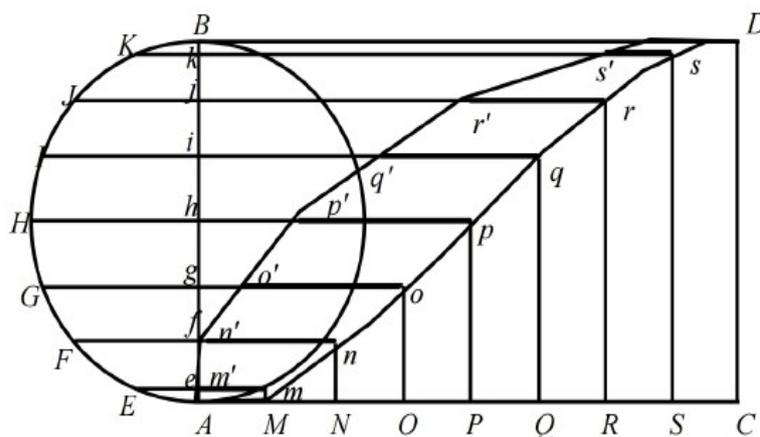
On sait que $dl = 2R \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)d\theta$. On intègre donc dl entre 0 et π et $d\theta$ entre 0 et 2π . On trouve que la cycloïde a un périmètre de $8R$.

5.4.2 L'aire sous la courbe d'après Roberval

En revanche, le calcul de l'aire sous la courbe est plus complexe. En effet, Galilée a passé plus de quarante ans de sa vie à tenter de le calculer sans succès.

C'est le mathématicien français Roberval qui va réussir à résoudre cette question en utilisant la méthode des indivisibles qui est une méthode de comparaison, les prémices du calcul intégral.

On part de la position du cercle générateur de la cycloïde.



Le principe consiste donc à découper le demi-cercle AB en un certain nombre de parties égales et à découper l'intervalle sur lequel la roue roule en un certain nombre de parties égales entre elles aussi. Cela correspond aux points E, F, etc. d'une part et les points M, N, etc. de l'autre.

Ensuite on mène par E la parallèle à AC, on obtient le point m à la verticale de M, de même pour les autres points. Puis on retire la longueur Ee à partir de m , on obtient le point m' . De la même manière on obtient les points n', o', \dots

Il est alors facile de voir que les points m', n', \dots décrivent une cycloïde et que les points m, n, \dots décrivent une sinusoïde ayant un centre de symétrie que Roberval appellera la compagne de la cycloïde. On note w le centre du cercle. Pour faciliter l'écriture, on pose que c'est un cercle unité. Par construction, on a $\widehat{AE} = \alpha = \widehat{AM}$ avec $\alpha = \widehat{A\omega E}$. Pour construire le point m' on retire la longueur Ee qui est le sinus de l'angle α . On répète la même opération pour les points n', o', \dots . Ces points vérifient les équations paramétriques de la cycloïde.

Ainsi l'aire sous la cycloïde correspond à la somme de l'aire entre la cycloïde et la compagne et l'aire sous la compagne.

On sait que l'aire du demi-cercle est $\frac{1}{2}\pi R^2$ et que celle du rectangle ABDC de hauteur $2R$ et de longueur πR est de $2\pi R^2$.

L'aire sous la compagne est la moitié de l'aire du rectangle car elle a un centre de symétrie soit πR^2 . L'aire entre la cycloïde et la compagne est égale à l'aire du demi-cercle d'après la méthode des indivisibles.

Ainsi l'aire sous la cycloïde est égale à $\pi R^2 + \frac{1}{2}\pi R^2 = \frac{3}{2}\pi R^2$ donc l'aire de l'arche complète est de $3\pi R^2$, soit trois fois l'aire du cercle générateur.

N.B : C'est la première fois de l'Histoire qu'une sinusoïde était tracée.

6 Equation d'Euler Lagrange

L'équation d'Euler Lagrange est une formulation équivalente au principe de Fermat.

6.1 Enoncé du théorème

Théorème 1.

Soit $L: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction à valeurs réelles telle que $L: (t, x, y) \rightarrow L(t, x, y)$ appelée lagrangien. On appelle Action la fonctionnelle $A: E \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $A = \int_a^b L(t, q(t), \dot{q}(t)) dt$ avec $E = \{q \in \mathcal{C}^2([a, b]; \mathbb{R}), q(a) \text{ et } q(b) \text{ fixés}\}$.

Si l'Action est extrémale le long d'une courbe $t \rightarrow q(t)$, alors on a les équations d'Euler Lagrange, c'est-à-dire

$$\frac{\partial L}{\partial x}(t, q(t), \dot{q}(t)) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial y}(t, q(t), \dot{q}(t)) \right) = 0 \quad \forall t \in [a, b]$$

Remarquons que $L = L(t, x, y)$ avec $\frac{\partial L}{\partial x}(t, q(t), \dot{q}(t)) = \frac{\partial L}{\partial x}$ calculé en $x = q(t)$ et $y = \dot{q}(t)$.

6.2 Démonstration

6.2.1 Lemme

Soit $f \in \mathcal{C}^0([a, b]; \mathbb{R})$ telle que :

$$\forall h \in \mathcal{C}^1([a, b]; \mathbb{R}) \text{ avec } h(a) = h(b) = 0$$

$$\text{où } \int_a^b f(t)h(t) dt = 0$$

Alors f identiquement nulle sur l'intervalle $[a, b]$.

Preuve :

Raisonnement par l'absurde :

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, il existe $x_0 \in [a, b]$ tel que $f(x_0) > 0$. Par continuité de f , il existe un intervalle $I \subset [a, b]$ tel que $x_0 \in I$.

Soit $\eta: \begin{cases} \eta(x) > 0 & \text{sur } I \\ \eta(x) = 0 & \text{sinon} \end{cases}$ donc $\int_a^b f(x) \eta(x) dx = \int_I f(x) \eta(x) dx > 0$ ce qui est absurde.

Donc $f(x)$ nulle sur $[a, b]$.

6.2.2 Equations d'Euler Lagrange

On suppose l'action A extrémale pour $q(t)$. Alors si on perturbe un $q(t)$, cela entraînera une variation de A .

On choisit $\eta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\eta \in \mathcal{C}^1$ et $\eta(t_0) = \eta(t_1) = 0$

On pose : $q_\varepsilon(t) = q(t) + \varepsilon \eta(t)$ avec $\varepsilon \in \mathbb{R}$.

Alors $A = \int_{t_0}^{t_1} L(t, q_\varepsilon(t), \dot{q}_\varepsilon(t)) dt = \int_{t_0}^{t_1} L(t, q(t) + \varepsilon \eta(t), \dot{q}(t) + \varepsilon \dot{\eta}(t)) dt$

On calcule la variation de A par rapport à la perturbation ε :

$$\begin{aligned} \frac{dA_\varepsilon}{d\varepsilon} &= \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{d\varepsilon} L(t, q_\varepsilon(t), \dot{q}_\varepsilon(t)) dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{d q_\varepsilon(t)}{d\varepsilon} \frac{\partial L}{\partial x}(t, q_\varepsilon(t), \dot{q}_\varepsilon(t)) + \frac{d \dot{q}_\varepsilon(t)}{d\varepsilon} \frac{\partial L}{\partial y}(t, q_\varepsilon(t), \dot{q}_\varepsilon(t)) \right) dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \left(\eta(t) \frac{\partial L}{\partial x}(t, q(t), \dot{q}(t)) + \dot{\eta}(t) \frac{\partial L}{\partial y}(t, q(t), \dot{q}(t)) \right) dt \end{aligned}$$

Posons $\varepsilon = 0$, alors $q_\varepsilon(t) = q(t)$ et $\frac{dA_0}{d\varepsilon} = 0$ car la perturbation est nulle, on obtient :

$$\int_{t_0}^{t_1} \eta(t) \frac{\partial L}{\partial x}(t, q(t), \dot{q}(t)) dt + \int_{t_0}^{t_1} \dot{\eta}(t) \frac{\partial L}{\partial y}(t, q(t), \dot{q}(t)) dt = 0$$

On effectue une intégration par partie sur le deuxième membre.

$$\int_{t_0}^{t_1} \eta(t) \frac{\partial L}{\partial x}(t, q(t), \dot{q}(t)) dt + \left[\eta(t) \frac{\partial L}{\partial y}(t, q(t), \dot{q}(t)) \right]_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \eta(t) \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial y}(t, q(t), \dot{q}(t)) dt = 0$$

D'après les hypothèses $\eta(t_0) = \eta(t_1) = 0$ on obtient :

$$\int_{t_0}^{t_1} \eta(t) \left(\frac{\partial L}{\partial x}(t, q(t), \dot{q}(t)) - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial y}(t, q(t), \dot{q}(t)) \right) dt = 0$$

Alors, d'après le lemme, la fonction entre parenthèses est indénitivement nulle, on obtient donc l'équation d'Euler Lagrange :

$$\frac{\partial L}{\partial x}(t, q(t), \dot{q}(t)) - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial y}(t, q(t), \dot{q}(t)) = 0 \quad \forall t \in [t_0, t_1]$$

6.3 Applications

6.3.1 Conservation de « l'énergie », théorème de Beltrami

Théorème 2.

Si le lagrangien $L(t, x, y)$, évalué en $x = q(t)$ et $y = \dot{q}(t)$, ne dépend pas explicitement du temps alors la quantité E telle que :

$$E = \dot{q}(t) \frac{\partial L(t, q(t), \dot{q}(t))}{\partial y} - L(t, q(t), \dot{q}(t))$$

se conserve au cours du temps le long d'une courbe $q(t)$, pour toute fonction $q(t)$ solution de l'équation d'Euler Lagrange.

Démonstration.

Montrons que $\frac{dE}{dt} = 0$

Calculons la variation de E en fonction du temps :

$$\begin{aligned}
 \frac{dE}{dt} &= \frac{d}{dt} \left(L(t, q(t), \dot{q}(t)) - \dot{q}(t) \frac{\partial L(t, q(t), \dot{q}(t))}{\partial y} \right) \\
 &= \frac{dq(t)}{dt} \frac{\partial L(t, q(t), \dot{q}(t))}{\partial x} + \frac{d\dot{q}(t)}{dt} \frac{\partial L(t, q(t), \dot{q}(t))}{\partial y} - \ddot{q}(t) \frac{\partial L(t, q(t), \dot{q}(t))}{\partial y} - \\
 &\quad \dot{q}(t) \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L(t, q(t), \dot{q}(t))}{\partial y} \right) \\
 &= \dot{q}(t) \left(\frac{\partial L(t, q(t), \dot{q}(t))}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L(t, q(t), \dot{q}(t))}{\partial y} \right) \right)
 \end{aligned}$$

Comme $q(t)$ est fonction qui minimise l'action alors l'équation d'Euler Lagrange est vérifiée et le second membre est nul, $\frac{dE}{dt} = 0$ donc E se conserve au cours du temps. \square

Appliquons ce que l'on vient de trouver à la mécanique.

Reprenons l'expression de E avec $L(t, x(t), \dot{x}(t)) = T(\dot{x}(t)) - U(x(t))$ avec $T(\dot{x}(t)) = \frac{1}{2} m \dot{x}(t)^2$ l'énergie cinétique et $U(x(t))$ l'énergie potentielle.

Calculons E avec cette nouvelle expression :

$$\begin{aligned}
 E &= \dot{x}(t) \frac{\partial L(t, x(t), \dot{x}(t))}{\partial y} - L(t, x(t), \dot{x}(t)) \\
 &= \dot{x}(t) \frac{\partial T(\dot{x}(t))}{\partial y} - \dot{x}(t) \frac{\partial U(x(t))}{\partial y} - T(\dot{x}(t)) + U(x(t)) \\
 &= \dot{x}(t) \frac{\partial \frac{1}{2} m \dot{x}(t)}{\partial y} - \frac{1}{2} m \dot{x}(t)^2 + U(x(t)) \\
 &= \frac{1}{2} m \dot{x}(t)^2 + U(x(t))
 \end{aligned}$$

On reconnaît l'expression de l'énergie mécanique. On peut donc en déduire, d'après ce qui a été calculé précédemment, que l'énergie mécanique se conserve au cours du temps pour les systèmes dont le lagrangien ne dépend pas explicitement du temps.

6.3.2 Le principe fondamental de la dynamique

On cherche à retrouver l'équation du PFD à l'aide de l'équation d'Euler Lagrange.

Dans un premier temps on définit le lagrangien comme $L(t, x(t), \dot{x}(t)) = T(\dot{x}(t)) - U(x(t))$ avec $T(\dot{x}(t)) = \frac{1}{2} m \dot{x}(t)^2$ l'énergie cinétique et $U(x(t))$ l'énergie potentielle.

On écrit l'action $\mathcal{A} = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), \dot{x}(t)) dt$

D'après l'équation d'Euler Lagrange :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial L(t, x(t), \dot{x}(t))}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L(t, x(t), \dot{x}(t))}{\partial y} \right) &= 0 \\
 \text{donc} \quad - \frac{\partial U(x(t))}{\partial x} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \frac{\partial}{\partial y} (\dot{x}(t)^2) \right) \\
 - \frac{\partial U(x(t))}{\partial x} &= m \dot{x}(t)
 \end{aligned}$$

Comme l'énergie potentielle est conservative et que $\ddot{x}(t) = a$ on retrouve donc $\vec{F} = m \vec{a}$ qui est l'expression du PFD.

6.3.3 Minimisation du trajet

Grace aux équations d'Euler Lagrange, on peut redémontrer par exemple que le trajet qui minimise la distance dans le plan, c'est à dire le trajet qui minimise le temps de parcours lorsque la vitesse est constante est une droite.

Montrons donc que la courbe qui minimise le chemin entre deux points est une droite.

L'action à minimiser est donc :

$$A = \int_{t_0}^{t_1} ds$$

Or $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ et $\dot{y}(t) = \frac{dy}{dx}$ donc

$$A = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{1 + \dot{y}(x)} dx$$

On pose donc $L(x, y, z) = \sqrt{1 + z^2}$ et $L(x, q(x), \dot{q}(x)) = \sqrt{1 + \dot{q}(x)^2}$

Si A est minimale alors

$$\frac{\partial \sqrt{1 + \dot{q}(x)^2}}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \sqrt{1 + \dot{q}(x)^2}}{\partial \dot{q}} \right) = 0$$

L ne dépend pas explicitement de $q(t)$ donc $\frac{\partial \sqrt{1 + \dot{q}(x)^2}}{\partial q} = 0$, on obtient donc

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{q}(x)}{\sqrt{1 + \dot{q}(x)^2}} \right) &= 0 \\ \frac{\dot{q}(x)}{\sqrt{1 + \dot{q}(x)^2}} &= \lambda \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R} \\ \dot{q}(x) &= \lambda \sqrt{1 + \dot{q}(x)^2} \\ \dot{q}(x) &= \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \lambda^2}} = \text{cst} \end{aligned}$$

Donc en intégrant on obtient $q(t) = a x + b$, avec $(a, b) \in \mathbb{R}$ des constantes déterminées en fonction de A et B, ce qui est l'équation d'une droite. On en déduit que c'est le chemin le plus court entre deux points.

6.3.4 Minimisation du temps de parcours

On cherche la courbe qui minimise le temps de parcours entre deux points. Ici l'action à minimiser est $A = \int_{t_0}^{t_1} dt$.

Or on a déjà vu que la vitesse $v = \sqrt{2gy}$ avec $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$ et $v = \frac{ds}{dt}$.

d'où

$$dt = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{\sqrt{2gy(x)}} = \frac{\sqrt{1 + \dot{y}(x)^2}}{\sqrt{2gy(x)}} dx$$

On obtient

$$A = \int_{t_0}^{t_1} \frac{\sqrt{1 + \dot{y}(x)^2}}{\sqrt{2gy(x)}} dx$$

Le lagrangien du problème est donc $L(x, q(x), \dot{q}(x)) = \frac{\sqrt{1 + \dot{q}(x)^2}}{\sqrt{2gq(x)}}$. On peut remarquer que ce lagrangien ne dépend pas explicitement de x . Comme étudié précédemment, nous allons appliquer la conservation de l'énergie à ce lagrangien évalué en $x = q(t)$ et $y = \dot{q}(t)$:

$$\begin{aligned} E &= \dot{q}(x) \frac{\partial L}{\partial y}(x, q(x), \dot{q}(x)) - L(x, q(x), \dot{q}(x)) \\ &= \dot{q}(x) \left(\frac{\dot{q}(x)}{\sqrt{2gq(x)(1 + \dot{q}(x)^2)}} \right) - \frac{\sqrt{1 + \dot{q}(x)^2}}{\sqrt{2gq(x)}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2gq(x)}} \left(\frac{\dot{q}(x)^2}{\sqrt{1 + \dot{q}(x)^2}} - \sqrt{1 + \dot{q}(x)^2} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2gq(x)}} \left(\frac{-1}{\sqrt{1 + \dot{q}(x)^2}} \right) \end{aligned}$$

Comme le lagrangien ne dépend pas explicitement de x , E est constant :

$$\frac{1}{\sqrt{2gq(x)}} \left(\frac{-1}{\sqrt{1 + \dot{q}(x)^2}} \right) = \text{cst}$$

Donc on retrouve l'équation différentielle caractéristique de la cycloïde :

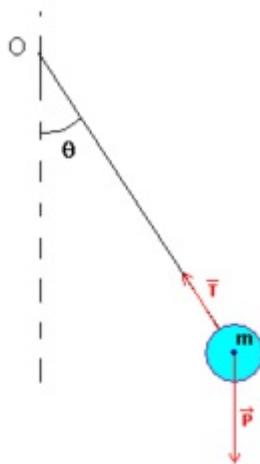
$$(1 + \dot{q}(x)^2) q(x) = \text{cst}$$

On retrouve donc que la cycloïde est la courbe qui minimise le temps de parcours d'une masse entre deux points.

7 Application au pendule simple

Nous allons maintenant étudier le mouvement du pendule simple. On ne considère pas ici les forces de frottement.

Nous allons tenter décrire l'évolution d'une masse m accroché par un fil en O avec une tension \vec{T} , formant un angle θ avec la normale et soumis à son propre poids \vec{P} .



Nous pouvons retrouver la même équation différentielle en utilisant la mécanique du point ou les équations d'Euler Lagrange. Cependant, sans faire l'approximation des petits angles on ne peut pas résoudre cette équation différentielle. C'est pourquoi nous allons étudier les mouvements de ce pendule en faisant une étude qualitative.

7.1 Avec l'aide de la mécanique du point

On considère θ l'angle du pendule. Celui-ci se déplace avec une vitesse v définie par $v = l\dot{\theta}$ avec $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$.

Le point P n'est soumis qu'à deux forces : le poids \vec{P} et la tension \vec{T} . Enfin on considère θ_0 comme l'angle duquel on lâche le pendule.

On calcule maintenant l'énergie mécanique.

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl(1 - \cos(\theta))$$

En effet l'énergie cinétique $E_c = \frac{1}{2}mv^2$ et l'énergie potentielle ne dépendent que du poids car comme la tension \vec{T} est orthogonale à la vitesse \vec{v} , alors le travail de la tension est nul.

Donc $\Delta E_p = mg(z_1 - z_0)$ avec $z_0 = l\cos(\theta)$ et $z_1 = l$.

Ensuite, il n'y a pas de forces dissipatives donc la valeur de l'énergie mécanique dans notre système de pendule est constante. On peut donc en déduire que :

$$\frac{dE_m}{dt} = 0 = ml^2\dot{\theta}\ddot{\theta} + mgl\dot{\theta}\sin(\theta) \Rightarrow \dot{\theta}(\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin(\theta)) = 0$$

La solution évidente est que $\dot{\theta} = 0$ mais cela signifie juste que le pendule n'a pas de vitesse et qu'il est en 0 à l'arrêt.

L'équation différentielle qui définit le mouvement du pendule simple est donc $\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\sin(\theta)$.

7.2 Avec les équations d'Euler Lagrange

On pose le lagrangien $L(t, \theta(t), \dot{\theta}(t)) = T - U$ avec T l'énergie cinétique $T = \frac{1}{2}l^2\dot{\theta}^2$ car $v = l\dot{\theta}$ et U l'énergie potentielle $U = mgl\cos(\theta)$. Le lagrangien ne dépend pas explicitement du temps.

D'après l'équation d'Euler Lagrange : $\frac{\partial L(t, \theta(t), \dot{\theta}(t))}{\partial \theta} = \frac{\partial L(t, \theta(t), \dot{\theta}(t))}{\partial \dot{\theta}}$

On calcule donc

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \theta}(t, \theta(t), \dot{\theta}(t)) &= -mgl\sin(\theta) \\ \text{et} \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}(t, \theta(t), \dot{\theta}(t)) &= ml^2\dot{\theta} \end{aligned}$$

On trouve

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\sin(\theta)$$

La méthode d'Euler Lagrange aboutit sur le même résultat que la méthode précédente. Cependant ce résultat est plus facile car il nous évite de faire le bilan des forces et ainsi d'estimer des forces que l'on ne connaît comme la tension du fil.

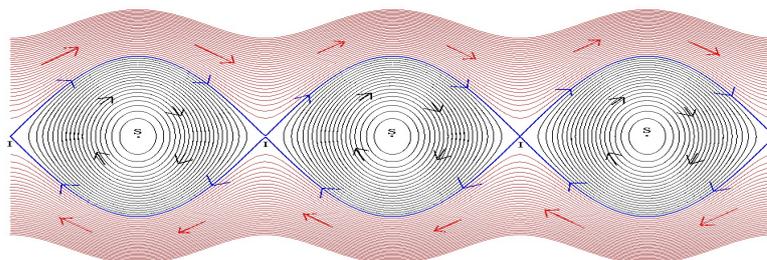
7.3 Etude qualitative du mouvement du pendule

L'équation différentielle trouvée précédemment n'est pas résoluble sans l'approximation des petits angles c'est pourquoi nous allons maintenant classifier les trajectoires en fonction de la valeur de l'énergie.

On écrit d'abord l'expression de l'énergie mécanique du pendule :

$$\begin{aligned}
 E &= \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 + m g l (1 - \cos(\theta)) \\
 \frac{E}{m l^2} &= \frac{\dot{\theta}^2}{2} + w^2 (1 - \cos(\theta)) \quad \text{avec } w = \frac{g}{l} \\
 &= \frac{\dot{\theta}^2}{2} + 2w^2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)
 \end{aligned}$$

On écrit $K(\theta, \dot{\theta}) = \frac{\dot{\theta}^2}{2} + 2w^2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$, nous allons donc étudier les valeurs possible de K et en déduire les mouvements du pendule correspondant. On pourra ainsi tracer le portrait de phase de la fonction $K(\theta, \dot{\theta})$.



Portrait de phase du pendule simple

- La position d'équilibre basse correspond à $\theta = 0[2\pi]$ et $\dot{\theta} = 0$. On a donc $K = 0$.
 - La position d'équilibre haute correspond à $\theta = \pi$ et $\dot{\theta} = 0$, on trouve $K = 2w^2$. Cette valeur de K est appelée la séparatrice.
 - $\frac{d\theta}{dt} = \sqrt{2K - 4w^2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}$ donc la période $T = \frac{2}{w} \int_0^{\theta_{\max}} \frac{1}{\sqrt{\sin^2\left(\frac{\theta_{\max}}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}} d\theta$
- Pour $0 \leq K \leq 2w^2$ on a $2w^2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \leq K \leq 1$ donc on peut observer des oscillations périodiques du pendule.

On pose $\frac{\theta_{\max}}{2} = \text{Arcsin}\left(\sqrt{\frac{K}{2w^2}}\right)$ et comme la fonction sinus est croissante on a $|\theta| \leq \theta_{\max} < \pi$

Les lignes de niveaux dans ce cas correspondent aux lignes noires sur la figure ci-dessus. On note T la période du pendule.

- Pour $K = 2w^2$ on a $\theta_{\max} = 2 \text{Arcsin}(1)$ et $\frac{\dot{\theta}^2}{2} = 2w^2 \left(1 - \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) = 2w^2 \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$ donc $\dot{\theta} = \pm 2w \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$. Cela correspond à la séparatrice soit la ligne bleue sur le portrait de phase.

Le temps pour arriver en π est infini, c'est une position instable. En effet

$$T = \int_0^{\pi} \frac{d\theta}{2w \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

et cette intégrale est divergente en π car $\sin(\pi) = 0$. C'est donc à partir de cet angle que le pendule commence à faire des tours d'où le nom de séparatrice.

- Pour $K > 2w^2$ le pendule fait des tours complets dans un sens ou un autre, ce qui correspond aux lignes de niveaux rouges sur la figure. K peut alors être positif ou négatif en fonction du sens de rotation du pendule.

8 Conclusion

Pour conclure, ce projet nous a permis de comprendre le Principe de Moindre Action et ses applications. Nous avons aussi pu comprendre le travail des scientifiques à travers les siècles en comprenant comment ils ont pu résoudre des problèmes complexes avec les moyens de l'époque.

Nous avons aussi remarqué à quel point Newton avait raison en écrivant que la clé est la maîtrise du calcul différentiel. En effet, grâce à ce système de résolution de problèmes différentiels, nous aurions pu simplifier grandement des calculs qui demandaient alors l'utilisation d'outils complexes.

Tout au long de ce projet nous avons découvert des applications insoupçonnées de ce principe et il en reste encore beaucoup que nous n'avons pas eu le temps d'étudier.

Nous avons effectivement entrevu les différentes passerelles qu'il y a entre les différents domaines d'application de la physique et des maths. Enfin ce projet nous a donné des outils qui pourront peut être être utilisés dans nos futures études pour simplifier des problèmes.

Pour poursuivre ce projet, nous pourrions nous renseigner sur d'autres applications du principe de moindre action. Mais, comme nous avons déjà étudié la plupart des théorèmes et lois les plus simples qui en découlent, la poursuite de nos recherches va être plus dure. Chercher des domaines d'applications où ce principe ne s'applique pas et comprendre pourquoi pourrait être aussi une façon d'approfondir notre étude de celui-ci.

Nous aimerions remercier monsieur Duval, qui nous a aidé et guidé tout au long de notre projet ainsi que Valérie Weber et Timothée Schmoderer qui ont relu et corrigé notre rapport.

9 Sources

1 Hitoire de la vitesse de la lumière

Film documentaire “Histoire des mesures de la vitesse de la lumière” réalisé par Georges LE PIOUFFLE

http://louissais.free.fr/index.php?option=com_content&view=article&id=123&Itemid=133

<http://cavaroze.free.fr/OlympiadesPhysique/vitesseLumiere/fizeau.htm>

http://www.lerepairedessciences.fr/seconde/univers/chap1/texte_histoire_vitesse_lumiere.pdf

<http://cavaroze.free.fr/OlympiadesPhysique/vitesseLumiere/Foucault.htm>

2 Les lois d’optique de Descartes

3 La cycloïde

<http://mathenjeans.free.fr/amej/edition/actes/actespdf/94215229.pdf>

<http://ccl.qc.ca/Professeurs/Mathematiques/Rossa/DOSSIERS/ROBERVAL.PDF>

<http://kaekoda.free.fr/bricole/brachis.pdf>

5 Application

https://fr.wikipedia.org/wiki/Pendule_simple