

## Machine de jet



**Étudiants :**

Sean Manzambi  
Braham Hedak

Anthony Dussuel  
Nathan Lee

**Enseignant-responsable du projet :**

Didier Vuillamy



**Date de remise du rapport :** 19/06/2017

**Référence du projet :** STPI/P6/2017 – 22

**Intitulé du projet :** Nouveau système mécanique de la machine de jet

**Type de projet :** conception/ modélisation/ calcul/ biblio /essai

**Objectifs du projet :** Améliorer la machine de jet des années précédentes en imaginant un nouveau système permettant d'avoir une meilleure portée

**Mots-clefs du projet :** trébuchet, amélioration, efficacité, performance

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>4</b>
<b>1 Méthodologie, organisation du travail</b>	<b>5</b>
<b>2 Travail réalisé et résultats</b>	<b>6</b>
2.1 Historique . . . . .	6
2.1.1 Trébuchet classique . . . . .	9
2.1.2 Trébuchet avec Roue . . . . .	9
2.1.3 Trébuchet avec Extension . . . . .	10
2.2 Travail théorique . . . . .	11
2.2.1 <b>Premières idées</b> . . . . .	11
2.2.2 Pré-requis . . . . .	11
2.2.3 Calculs théoriques barre AI bloquée . . . . .	11
2.2.4 Calculs théoriques barre AI débloquée . . . . .	14
2.2.5 Résolution numérique . . . . .	17
2.2.6 Calcul théorique de la portée . . . . .	19
2.2.7 Résolution numérique de la portée . . . . .	20
2.3 Travail expérimental . . . . .	21
2.3.1 Construction de la machine . . . . .	21
2.3.2 Phase de test et présentation des résultats . . . . .	22
2.3.3 Comparaison résultats théoriques et expérimentaux . . . . .	23
<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>24</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>26</b>
<b>A Composition de la machine</b>	<b>27</b>



# Introduction

Pour notre projet de physique, nous avons pendant ce semestre travaillé sur le projet « Amélioration d'une machine de jet ». Notre machine de jet s'inspire du trébuchet, machine de guerre utilisée pendant le Moyen-Âge pour lancer des projectiles. Ce projet consiste à reprendre la machine élaborée l'année dernière pour l'améliorer et augmenter la portée du boulet. Chaque année une nouvelle idée est trouvée pour rendre le trébuchet plus performant. L'année dernière, le groupe a élaboré une machine où la barre principale s'allonge au cours du temps. Une idée prometteuse théoriquement mais qui fut difficile à mettre en place, car cette barre s'allongeait au sol et non en l'air. Cette année, nous avons pensé à une corde qui, lors du mouvement de balancier, se tend et permet d'accélérer le mouvement de la barre principale, et donc du boulet. La phase de réflexion a été très longue car notre premier modèle ne fut pas concluant. En effet, notre première idée était de mettre une poulie pour faire rouler la corde. Nous avons donc du réfléchir à un moyen d'enlever la poulie, mais de garder la corde et l'idée générale.

Tout d'abord, nous allons présenter les différentes armes qui ont existé au cours du Moyen-Âge. Ensuite, nous exposerons les 1ères idées d'amélioration puis l'idée retenue et les calculs théoriques effectués. Par ailleurs, nous détaillerons la méthode de résolution informatique qui conduit à trouver la portée théorique. Enfin, nous présenterons le montage de la machine et les résultats de nos tests expérimentaux.

Nous tenons à remercier Mr Vuillamy pour toute l'aide qu'il nous a apportée, indispensable à la réussite de notre projet.

# Chapitre 1

## Méthodologie, organisation du travail

Le projet s'est composé de deux parties principales. Durant la première partie du semestre, nous avons réfléchi aux différentes améliorations possibles, et une fois en accord sur l'amélioration choisie, nous avons écrit les équations mécaniques puis modélisé le modèle sur Excel pour calculer la position et la vitesse du boulet. Enfin nous avons déterminé la portée théorique possible. A partir du mois de mai, nous avons commencé le montage de la machine de jet et réalisé les tests de portée pour voir si le modèle théorique rejoignait le modèle expérimental.

Toutes les étapes ont été faites ensemble. Néanmoins, la partie calculatoire théorique a été approfondie par Braham et Anthony tandis que la partie résolution numérique a été assurée par Sean et Nathan. Concernant l'écriture de ce rapport, nous avons divisé les différentes parties comme suivant :

- **Sean MANZAMBI** : rédaction de la partie résolution numérique et conclusion générale
- **Nathan LEE** : rédaction de la partie historique, des 1ères idées et mise en page Latex
- **Braham HEDAK** : rédaction de la partie expérimentale et mise en page Latex
- **Anthony DUSSUEL** : rédaction des calculs théoriques, de l'introduction et mise en page Latex

# Chapitre 2

## Travail réalisé et résultats

### 2.1 Historique

#### Les Machines

Le siège d'une ville, d'un château ou d'une place forte relève d'une entreprise lourde. Les moyens mis en œuvre pour la conquête de la place sont à la mesure des fortifications. Le résultat dépend des armes utilisées, où on distingue deux catégories :

-les machines statiques telles que les machines à balancier et à ressort. Elles servaient à percer, à briser ou à ébranler les constructions.

-les machines d'approche telles que les tonnelons, beffrois et tours en bois. Ces engins pouvaient ainsi nuire aux défenseurs en permettant l'approche des murailles.

Mais les plus intéressantes et les plus méconnues restent les machines à balancier.

#### Machines à balancier ou contrepoids

Si l'on peut certifier l'origine médiévale de ces machines à contrepoids, il est plus difficile d'en définir le siècle. La puissance et le perfectionnement de certaines peuvent être datés de la fin de la première croisade. Selon J.-F. Fino, dans « Forteresses de la France médiévale », ils consistent en une pièce mobile (ou verge) placée sur un échafaud et pivotant verticalement autour d'un axe qui partage la verge en deux branches de longueur inégale. Lorsque la branche courte s'abaisse violemment, la branche longue se relève et entraîne une fronde chargée d'un projectile. [...] Il semble que la traction humaine fut la force que l'on employa en premier lieu pour obtenir l'abaissement de la branche courte de la verge ». L'astuce du balancier consiste en une harmonisation des proportions géométriques à donner au balancier, au contrepoids et à la longueur des cordes.

#### Pierrière

Ces machines à « à traction humaine » sont les moins puissantes, mais les plus anciennes illustrées par les miniatures figurant dans le « Petrus » de Eboli (XIIème siècle) et dans l'ouvrage byzantin des « Scylitzes ». Elles apparaissent aussi sous l'appellation de « pierrière » ou « calibre ».

Les reconstitutions ont démontré que si ces machines ne peuvent lancer que des projectiles légers, de 2,5 à 10 kg, à une distance d'une cinquantaine de mètres, par contre, avec une équipe bien entraînée, on obtient une cadence d'un tir à la minute. Les boulets lancés par de tels engins n'ont aucun effet sur une muraille,



mais sont d'une redoutable efficacité contre les charges de chevaliers en armure. Un boulet de 1kg atteint sa cible à 140 km/h. Simon de Montfort en fera, lors du siège de Toulouse, l'expérience mortelle.

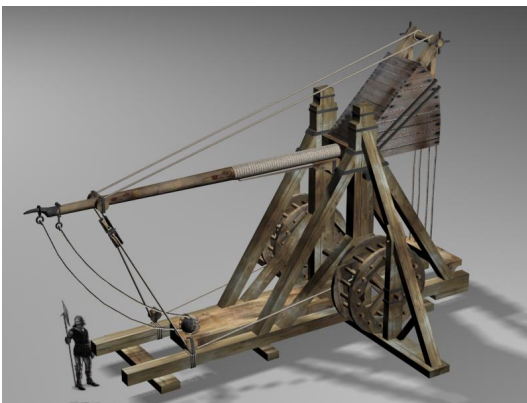
## Bricole



Pour améliorer les performances des pierres, on introduit un système de contrepoids en métal. La cadence de tir est élevée si les poids sont limités et les projectiles modestes. Cet engin défensif, ancêtre du mangonneau, est installé sur les remparts des forteresses. Un chroniqueur d'époque cite le cas d'un homme fait prisonnier et « renvoyé dans son camp » à l'aide d'une bricole. C'est aussi cette machine qui est représentée sur un bas relief déposé à l'église Saint-Nazaire à Carcassonne.

## Mangonneau à roues de carrier

Engin à contrepoids fixe, nommé par Gilles de Rome « trabatium ». Les premières machines de jet ne sont pas encore très bien équilibrées. Les ingénieurs n'ont pas encore compris les avantages du poids articulé qui équipera plus tard les trébuchets. Aussi, faut-il, pour rabattre le mât, des efforts considérables, nécessitant un treuil entraîné par de grandes roues : celles-ci sont actionnées par des hommes soit de l'intérieur, soit de l'extérieur. L'appellation « carrier » provient du fait que ces treuils à roues, connues depuis l'Antiquité, équipaient notamment les carrières de pierre.



Le mangonneau possède un contre-poids fixe de plusieurs tonnes. Des cordes sont parfois ajoutées pour donner plus de rapidité au mouvement et permettre un meilleur décrochement de la fronde. Il faut un important système de poulies et de treuil pour le réarmer et sa cadence n'excédait pas deux à trois tirs par heure. Ces machines présentent un gros défaut : la masse de terre ou de pierre contenue dans la huche du contrepoids finit toujours par se déplacer, provoquant des à-coups et des vibrations. Ces effets sont néfastes pour la charpente et

nuisent à la précision de tir. Cette machine sera utilisée jusqu'au XV<sup>ème</sup> siècle. L'invention de l'artillerie du prince de Savoie, en 1433-1437, nous livre le détail des pièces qui constituent la machine dite « la ruine ». Dans cet inventaire, Pierre Masuerius, chef des pièces d'artillerie du seigneur, précise que « le dit engin a et possède 2 colonnes pour les roues nécessaires au même engin [...], de même 48 barres pour faire tourner les dites roues [...], de même une grande colonne de 28 pieds de long [...], de même 2 soles ou traves chacune de 32 pieds de long [...], de même pour le dit engin 2 arches ou arcades dans lesquelles on pose les pierres... ».

## Trébuchet

De l'occitan « trébuca » (qui apporte les ennuis, ou par analogie avec la balance de précision). Les ingénieurs pensent à articuler le contrepoids, créant une machine nommée la biffa

mais aussi bride, brède, et plus couramment trébuchet. Les rapports géométriques pythagoriciens sont appliqués de manière plus systématique à la construction de ces machines, et le génie militaire médiéval peut enfin être considéré comme la « science exacte ». Au cours d'essais récents, un trébuchet en charpente de chêne, d'une verge de 11,45 m et d'un contre-poids total de 5,6 tonnes, a projeté un boulet de 56 kg à 212 m et plusieurs projectiles ont atteint le même point d'impact. Une autre construction réalisée en 1998 a projeté avec régularité 135 kg à plus de 200 m. Il était prévu d'atteindre 250 m mais des conditions climatiques particulièrement mauvaises n'ont pas permis d'aller jusqu'au bout de l'expérimentation. Toutefois, les boulets ne dépassaient pas les 300 livres (145 kg). Ceux qui ont été retrouvés à Carcassonne, à Oricourt (70) ou à Blanquefort (33) confirment cette affirmation. Malgré la légende, les plus gros boulets retrouvés au château de Saladin, en Syrie, ne dépassent pas ce poids.

La portée du tir courante est d'un peu plus de 200 m pour un boulet de pierre d'une centaine de kilos. L'objectif de cet engin est de marteler un endroit précis d'une muraille, de préférence un point faible, tel qu'une archère, ou des latrines, dans le but d'ouvrir une brèche. La parade possible pour les défenseurs consistait à remplacer la muraille endommagée par une double palissade de madriers et de terre. Cet ensemble mou absorbe le choc des boulets et oblige l'assaillant à frapper à d'autres endroits.



Ces engins ont une cadence de tir faible, un à deux tirs à l'heure. Mais il s'agit d'une véritable arme de dissuasion, puisque de nombreuses places fortes ont capitulé à sa simple vue! Pour son ouvrage « L'architecture militaire dans le Rouergue au Moyen Age », l'historien Jacques Michel a soigneusement étudié les documents comptables de l'époque, riches de renseignements sur ces machines utilisées. On y apprend que la verge d'un trébuchet, longue d'une dizaine de mètres, est faite d'un bois très dur, le sorbier, et que ces machines étaient consolidées par des tirants et des chevilles de fer, certaines pesant jusqu'à 20 livres (10 kg). Des détails sur les cordages, le cuir de la poche de fronde, sur les différentes pièces de la charpente et leur longueur ont permis par recoupement avec d'autres documents comptables, notamment ceux d'Aquitaine, de reconstituer fidèlement ces machines d'époque.

## Couillard



C'est la machine à contrepoids la plus perfectionnée. Ses deux huches (ou bourses) articulées facilitent la manutention de l'engin en divisant par deux les charges à manier. La construction s'en trouve simplifiée, puisqu'un seul poteau suffit. Celui-ci est parfois solidement planté dans le sol ou, plus souvent, sur un châssis en bois. Les contrepoids des premiers couillards étaient des grands sacs en cuir remplis de terre. Plus tard, ils furent remplacés par des

huches en bois et en fer riveté remplies de métal. Leur poids variait de 1,5 à 3 tonnes. Les

performances de cette machine sont inférieures à celles du trébuchet mais sa cadence de tir, cinq à six fois supérieure, avec une équipe très réduite, lui a permis pendant longtemps de concurrencer l'artillerie à poudre. Un des engins, servi par une simple équipe de quatre hommes, a projeté des boulets de pierre de 35kg à 180 m à une cadence de dix tirs par heure! On imagine aisément les ravages que pouvait provoquer un tel engin fonctionnant jour et nuit. Quand à son étymologie, Napoléon III remarqua déjà qu'un seul coup d'œil sur sa silhouette suffisait à comprendre.

### 2.1.1 Trébuchet classique

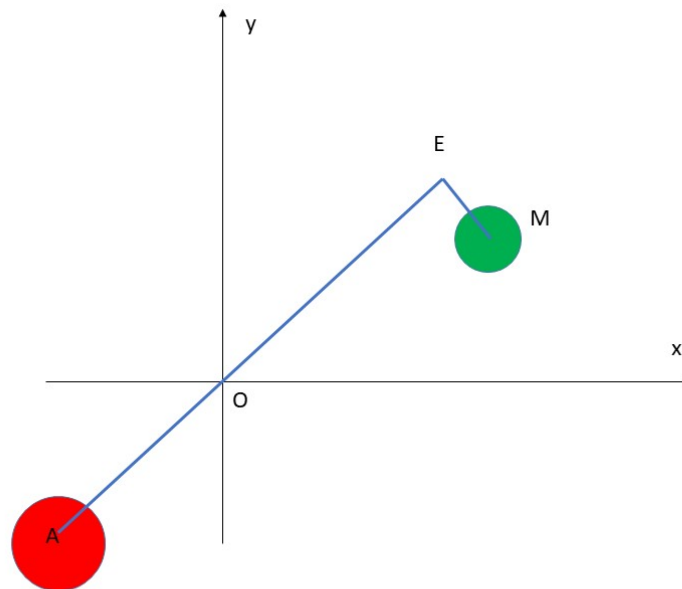


FIGURE 2.1

Le modèle classique du trébuchet est celui-ci : il s'agit simplement d'un système à contre-poids, avec une barre principale, et un projectile (ici représenté comme un boulet en M). Ce modèle n'ayant pas d'amélioration n'a pas une grande portée de jet.

### 2.1.2 Trébuchet avec Roue

Ce modèle ci-dessous représente celui conçu il y a deux ans. Le groupe avait décidé d'installer une roue au niveau de l'axe de rotation, induisant ainsi une rotation supplémentaire, et en théorie cela aurait du donner un rendement supérieure à la machine de jet de base. Mais suite à des problèmes expérimentaux, le groupe n'a pas réussi à mettre cela en oeuvre correctement.

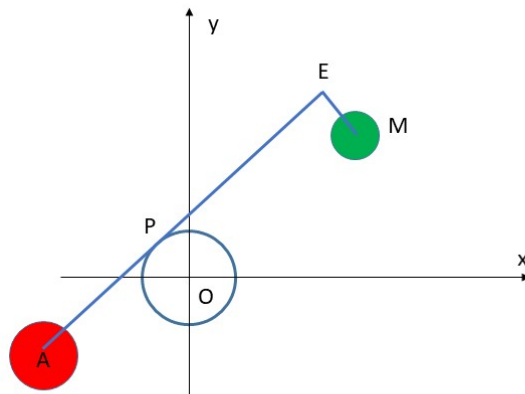


FIGURE 2.2

### 2.1.3 Trébuchet avec Extension

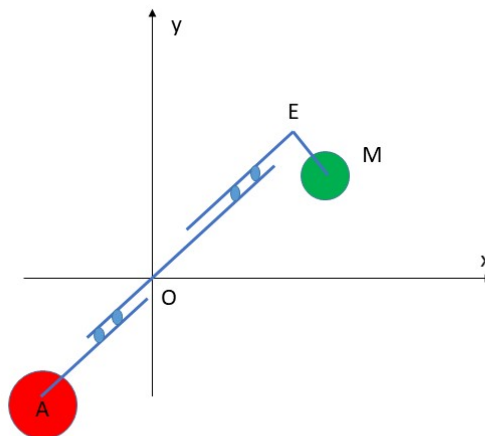


FIGURE 2.3

Le modèle de l'année dernière quant à lui avait décidé d'agrandir la barre, qui glisserait pendant le mouvement à l'aide d'une goupille pour donner une portée plus grande à la machine de jet.

Donc les deux améliorations envisagées les années précédentes ont eu des difficultés expérimentales.



## 2.2 Travail théorique

### 2.2.1 Premières idées

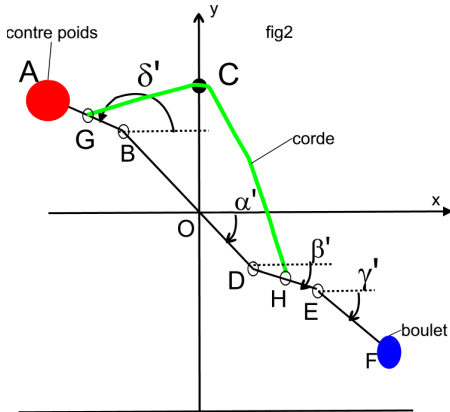


FIGURE 2.4

Tout d’abord, nous avons décidé de travailler sur une amélioration avec une poulie et une corde. Nous pensions que le boulet aurait plus de vitesse car la corde aurait tiré sur la barre DE quand le contre-poids aurait été lâché. Sur la figure ci-contre, la poulie se trouve au point C et aurait permis de faire coulisser la corde sans frottements. Mais un problème majeur s’est posé lors de ces réflexions : comment arrêter le balancier avant de taper la poulie, qui est placée au milieu du bâti, sur l’axe  $(O, \vec{z})$  ?

A l’aide du professeur, nous avons réussi à simuler le mouvement sur Excel, qui montrait que le modèle n’était pas concluant. En effet, la corde n’apportait aucune amélioration dans ces conditions.

Nous avons réfléchi alors à un nouveau système, où nous avons enlevé la poulie mais laissé la corde. Cette dernière se tend grâce à l’ajout de l’articulation en B et le prolongement de la barre AB pour former au bout le point I. (voir fig 2.5).

Dans le modèle que nous avons finalement choisi, représenté ci-dessous par la figure 2.5, le mouvement se décompose en 2 phases. La 1<sup>ère</sup> où la barre AI est solidaire de la barre BD et la 2<sup>ème</sup> où la barre AI est mise en rotation lorsqu’on relâche une goupille. Nous allons donc étudier le système mécanique lors de ces 2 phases. Pour chaque système nous allons chercher des relations grâce au principe fondamental de la dynamique et grâce au moment cinétique pour trouver la position et la vitesse du boulet en chaque instant, ce qui nous donnera ensuite la portée finale.

### 2.2.2 Pré-requis

Cette partie explique les notations que l’on va utiliser dans l’ensemble des calculs. Tout d’abord, pour tous les angles, on pose les vecteurs :

$$\vec{U}_\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix} \quad \vec{V}_\alpha = \begin{pmatrix} -\sin(\alpha) \\ \cos(\alpha) \end{pmatrix} = \vec{U}(\alpha + \pi/2)$$

Pour simplifier, appelons la norme de chaque vecteur par la dénomination suivante :  
d1=OB d2=AB d3=BI d4=OD d5=DE d6=EH d7=EM d8=IH

### 2.2.3 Calculs théoriques barre AI bloquée

Lors de la première phase, les ensembles ABI BOD et DE deviennent un seul ensemble de centre de gravité G4, de masse  $m1 + m2 + m3 = m4$  et d’inertie J4. On peut déduire de des figures 2.5 et 2.6 les relations angulaires suivantes, où C1, C2 et C3 sont des constantes :

$$\mu = \alpha + C1$$

$$\xi = \alpha + C2$$

$$\phi = \alpha + C3$$



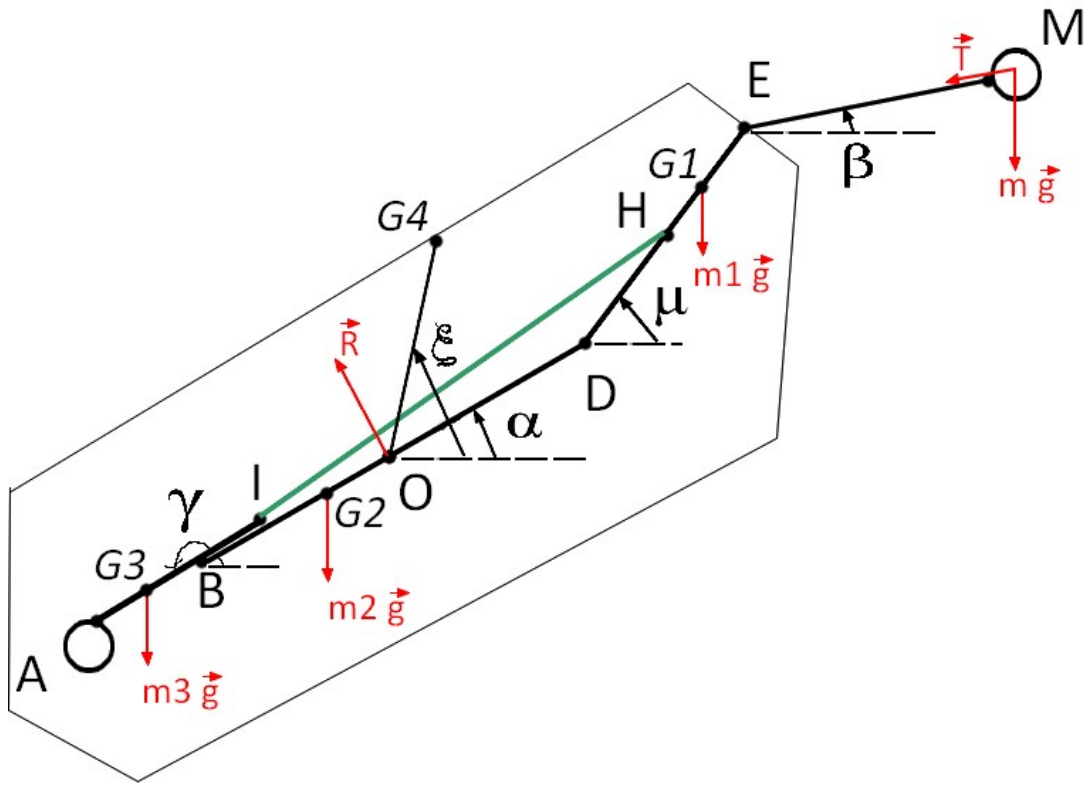


FIGURE 2.5

Le premier schéma ci-dessus représente notre système entier tandis que le deuxième permet de voir les angles  $\phi$  et  $\xi$ .

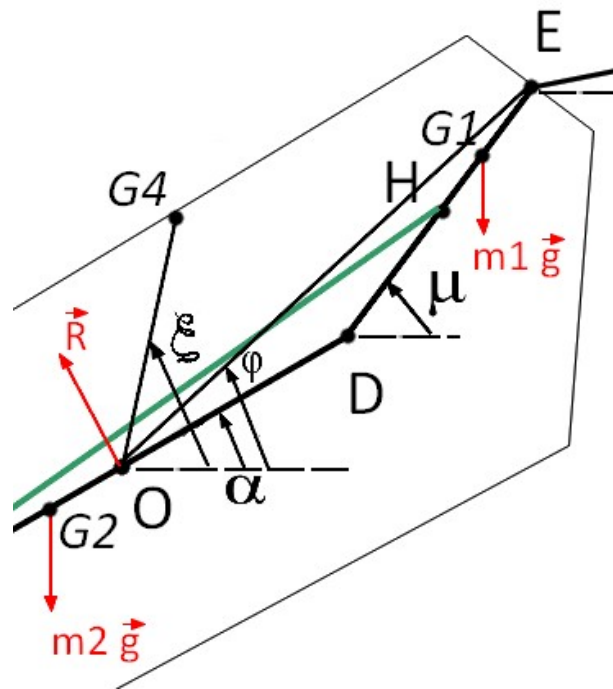


FIGURE 2.6

## Détermination des équations de M, le boulet

Mouvement de M :

$$\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{EF} = OE\overrightarrow{U}_\phi + d7\overrightarrow{U}_\beta$$

Vitesse de M :

$$\frac{d\overrightarrow{OF}}{dt} = OE\dot{\phi}\overrightarrow{V}_\phi + d7\dot{\beta}\overrightarrow{V}_\beta$$

Accélération de M :

$$\frac{d^2\overrightarrow{OF}}{dt^2} = OE(\ddot{\phi}\overrightarrow{V}_\phi - \dot{\phi}^2\overrightarrow{U}_\phi) + d7(\ddot{\beta}\overrightarrow{V}_\beta - \dot{\beta}^2\overrightarrow{U}_\beta)$$

Maintenant écrivons le **Principe Fondamental de la Dynamique** appliqué au boulet :

$$m\overrightarrow{\gamma} = m\overrightarrow{g} + \overrightarrow{T}$$

Projetons sur  $\overrightarrow{x}$  :

$$m(OE(-\ddot{\phi} \sin \phi - \dot{\phi}^2 \cos \phi) + d7(-\ddot{\beta} \sin \beta - \dot{\beta}^2 \cos \beta)) = Tx \quad (2.1)$$

Projetons sur  $\overrightarrow{y}$  :

$$m(OE(\ddot{\phi} \cos \phi - \dot{\phi}^2 \sin \phi) + d7(\ddot{\beta} \cos \beta - \dot{\beta}^2 \sin \beta)) = -mg + Ty \quad (2.2)$$

Pour trouver une 3<sup>ème</sup> **relation**, on applique la formule générale du **moment cinétique** par rapport à un point mobile, par exemple O :

$$\sum O\overrightarrow{X} \otimes \overrightarrow{Fext} = -m\overrightarrow{\gamma}_O \otimes \overrightarrow{OG} + \frac{dw}{dt} J_O \overrightarrow{z}$$

En l'appliquant au point E :

$$\overrightarrow{EM} \otimes m\overrightarrow{g} = -m\overrightarrow{\gamma}_E \otimes \overrightarrow{EM} + \ddot{\beta} J_{M/E} \overrightarrow{z}$$

On sait que :

$$J_{M/E} = m.d7^2$$

Et que :

$$\gamma_E = OE(\ddot{\phi}\overrightarrow{V}_\phi - \dot{\phi}^2\overrightarrow{U}_\phi)$$

On étudie le **produit vectoriel** :

$$\begin{aligned} -m\gamma_E \otimes \overrightarrow{EM} &= -mOE(\ddot{\phi}\overrightarrow{V}_\phi - \dot{\phi}^2\overrightarrow{U}_\phi \otimes d7\overrightarrow{U}_\beta) \\ &= -mOEd7(\ddot{\phi}\overrightarrow{U}_{\phi+\pi/2} \otimes \overrightarrow{U}_\beta - \dot{\phi}^2\overrightarrow{U}_\phi \otimes \overrightarrow{U}_\beta) \\ &= -mOEd7(\ddot{\phi} \cos(\beta - \phi) - \dot{\phi}^2 \sin(\beta - \phi)) \end{aligned}$$

Enfin :

$$-\overrightarrow{EM} \otimes m\overrightarrow{g} = d7\overrightarrow{U}_\beta \otimes -mg\overrightarrow{y} = -d7mg \cos \beta$$

Ce qui nous donne notre 3<sup>ème</sup> **relation** :

$$-g \cos \beta = -OE(\ddot{\phi} \cos(\beta - \phi) - \dot{\phi}^2 \sin(\beta - \phi)) + d7\ddot{\beta} \quad (2.3)$$

### Détermination des équations de l'ensemble 4 :

$$\overrightarrow{OG_4} = OG_4 \vec{U}_\xi$$

Donc :

$$\vec{\gamma}_{G_4} = OG_4(\ddot{\xi} \vec{V}_\xi - \xi^2 \vec{U}_\xi)$$

On applique le **PFD** à l'ensemble 4 :

$$m_4 \frac{d^2 \overrightarrow{OG_4}}{dt^2} = m_4 \vec{g} + \vec{R}$$

Projetons sur  $\vec{x}$  :

$$\boxed{m_4 OG_4 (\ddot{\xi} - \sin \xi - \xi^2 \cos \xi) = R_x} \quad (2.4)$$

Projetons sur  $\vec{y}$  :

$$\boxed{m_4 OG_4 (\ddot{\xi} \cos \xi - \xi^2 \sin \xi) = -m_4 g + R_y} \quad (2.5)$$

Enfin écrivons la relation du **moment cinétique** de l'ensemble par rapport à O :

$$\overrightarrow{OG_4} \otimes m_4 \vec{g} + \overrightarrow{OE} \otimes (-\vec{T}) = J_{G_4/0} \ddot{\xi} \vec{z}$$

Or :

$$\overrightarrow{OG_4} \otimes m_4 \vec{g} = OG_4 \vec{U}_\xi \otimes -m_4 g \vec{y} = -m_4 g OG_4 \cos \xi$$

Et :

$$\overrightarrow{OE} \otimes (-\vec{T}) = OE \vec{U}_\phi \otimes (-T_x \vec{x} - T_y \vec{y}) = OE(T_x \sin \phi - T_y \cos \phi)$$

Soit on obtient notre 3<sup>ème</sup> **relation** :

$$\boxed{J_{G_4/0} \ddot{\xi} = -m_4 g OG_4 \cos \xi + OE(T_x \sin \phi - T_y \cos \phi)} \quad (2.6)$$

Pour conclure, nous avons **6 inconnues** :

$$\ddot{\alpha} \quad \ddot{\beta} \quad T_x \quad T_y \quad R_x \quad R_y$$

Et nous avons les **6 relations** précédentes. Donc nous pouvons résoudre le système.

### 2.2.4 Calculs théoriques barre AI débloquée

Lors de cette phase, la barre AI est mise en rotation par rapport à la barre BD grâce à une charnière, de même que la barre DE. Nous avons donc un nouveau système composé de 4 ensembles, dont il faut étudier le mouvement.

Pour chacune des barres, à savoir, EF, DE, BD, et AI, nous allons trouver les 3 relations comme précédemment en s'aidant du principe fondamental de la dynamique et de la relation des moments cinétiques. Sur la figure ci dessous est représenté notre système et les forces qui s'exercent dessus.

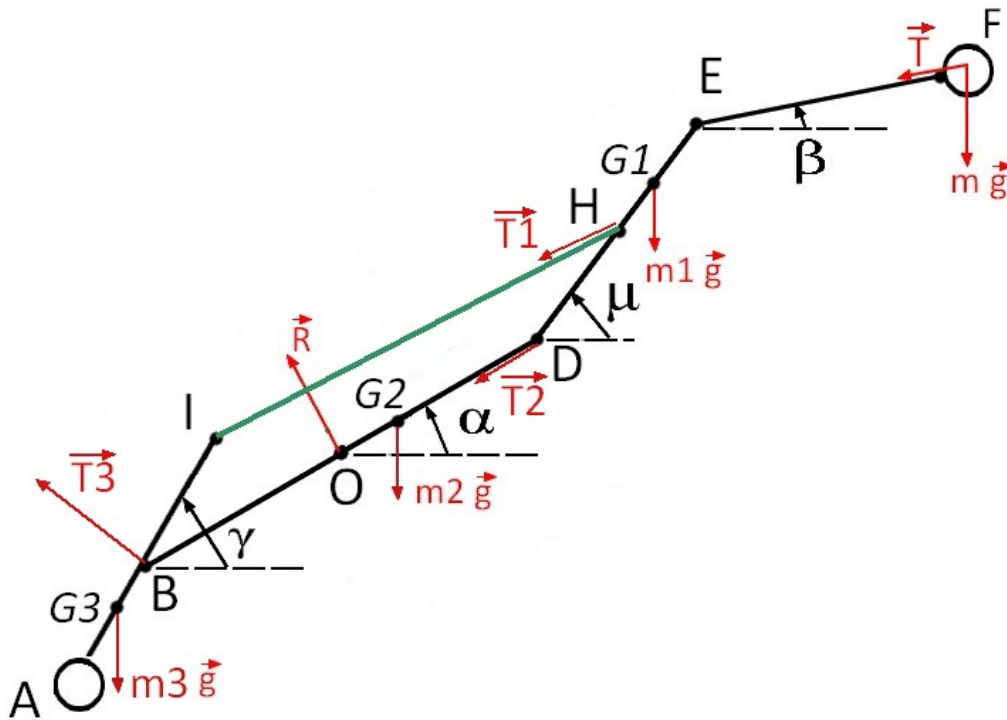


FIGURE 2.7

**Études le mouvement de F :**

Position de F :

$$\vec{OF} = \vec{OD} + \vec{DE} + \vec{EF}$$

$$\begin{pmatrix} x_F \\ y_F \end{pmatrix} = d_4 \vec{U}_\alpha + d_5 \vec{U}_\mu + d_7 \vec{U}_\beta$$

Vitesse de F :

$$\vec{V}_F = d_4 \vec{V}_\alpha \dot{\alpha} + d_5 \vec{V}_\mu \dot{\mu} + d_7 \vec{V}_\beta \dot{\beta}$$

Accélération de F :

$$\vec{\gamma}_F = d_4 (\ddot{\alpha} \vec{V}_\alpha - \dot{\alpha}^2 \vec{U}_\alpha) + d_5 (\ddot{\mu} \vec{V}_\mu - \dot{\mu}^2 \vec{U}_\mu) + d_7 (\ddot{\beta} \vec{V}_\beta - \dot{\beta}^2 \vec{U}_\beta)$$

On applique le PFD :

$$m \vec{\gamma}_F = \vec{T} + m \vec{g}$$

En projetant on obtient selon  $\vec{x}$  :

$$\boxed{T_x = m \gamma_{F,x}} \tag{2.1}$$

En projetant on obtient selon  $\vec{y}$  :

$$\boxed{T_y = m \gamma_{F,y} + mg} \tag{2.2}$$

On applique la relation du moment cinétique par rapport au point E :

$$\overrightarrow{EF} \otimes m(\overrightarrow{\gamma_E} + \frac{d^2 \overrightarrow{EF}}{dt^2}) = \overrightarrow{EF} \otimes (m \overrightarrow{g} + \overrightarrow{T})$$

Calcul de chaque terme :

$$\overrightarrow{EF} = d_7 \overrightarrow{U}_\beta$$

$$\overrightarrow{\gamma_E} = d_4(\ddot{\alpha} \overrightarrow{V}_\alpha - \dot{\alpha}^2 \overrightarrow{U}_\alpha) + d_5(\ddot{\mu} \overrightarrow{V}_\mu - \dot{\mu}^2 \overrightarrow{U}_\mu)$$

$$\frac{d \overrightarrow{EF}}{dt} = d_7 \dot{\beta} \overrightarrow{V}_\beta$$

Soit :

$$\frac{d^2 \overrightarrow{EF}}{dt^2} = d_7(\ddot{\beta} \overrightarrow{V}_\beta - \dot{\beta}^2 \overrightarrow{U}_\beta)$$

Calcul du terme à gauche de l'égalité :

$$d_7 \overrightarrow{U}_\beta \otimes m[d_4(\ddot{\alpha} \overrightarrow{V}_\alpha - \dot{\alpha}^2 \overrightarrow{U}_\alpha) + d_5(\ddot{\mu} \overrightarrow{V}_\mu - \dot{\mu}^2 \overrightarrow{U}_\mu) + d_7 \dot{\beta} \overrightarrow{V}_\beta]$$

Méthode de calcul : on utilise le fait que dans un cas général :

$$\overrightarrow{U}_\theta \otimes \overrightarrow{U}_\nu = \sin(\nu - \theta)$$

Et aussi :

$$\overrightarrow{V}_\theta = \overrightarrow{U}(\alpha + \pi/2)$$

Ainsi le terme de gauche devient :

$$m[d_7 d_4(\ddot{\alpha} \sin(\alpha + \pi/2 - \beta) - \dot{\alpha}^2 \sin(\alpha - \beta)) + d_7 d_5(\ddot{\mu} \sin(\mu + \pi/2 - \beta) - \dot{\mu}^2 \sin(\mu - \beta)) \\ + (d_7)^2(\underbrace{\dot{\beta} \sin(\beta + \pi/2 - \beta)}_1 - \underbrace{\dot{\beta}^2 \sin(\beta - \beta)}_0)]$$

Calcul du terme de droite de l'égalité :

$$\overrightarrow{EF} \otimes \overrightarrow{T} + \overrightarrow{EF} \otimes \overrightarrow{g} = \overrightarrow{EF} \otimes \overrightarrow{g}$$

car  $\overrightarrow{EF}$  et  $\overrightarrow{T}$  sont colinéaires.

Ce qui devient :

$$d_7 \overrightarrow{U}_\beta \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -mg d_7 \cos \beta$$

Ce qui donne comme relation :

$$\boxed{m[d_7 d_4(\ddot{\alpha} \sin(\alpha + \pi/2 - \beta) - \dot{\alpha}^2 \sin(\alpha - \beta)) + d_7 d_5(\ddot{\mu} \sin(\mu + \pi/2 - \beta) - \dot{\mu}^2 \sin(\mu - \beta)) + (d_7)^2 \dot{\beta}] = -mg d_7 \cos \beta} \quad (2.3)$$

Pour chaque ensemble, nous refaisons les calculs précédents. Nous nous retrouvons à la fin avec 3 relations pour chaque système faisant un total de 12 relations. Or, nous listons 13 inconnues : les 5 forces  $\overrightarrow{T}_1, \overrightarrow{T}_2, \overrightarrow{T}_3, \overrightarrow{T}, \overrightarrow{R}$  projetées chacune sur  $\overrightarrow{x}$  et sur  $\overrightarrow{y}$ , et les 3 angles  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$ . Mais on connaît la direction de  $T_1$ , ce qui fait une relation supplémentaire, donc le système peut être résolu.

## 2.2.5 Résolution numérique

Pour avoir les résultats théoriques, il nous faut donc résoudre notre système d'équations différentielles obtenues avec les calculs théoriques effectués préalablement. On utilise la méthode de Runge Kutta pour résoudre notre système d'équations d'ordre 2.

La méthode de Runge Kutta d'ordre 4 est une méthode explicite, elle permet de résoudre numériquement des systèmes d'équations différentielles du premier ordre. Le but de cette méthode est d'obtenir les valeurs alpha, bêta, la vitesse alpha et la vitesse bêta en utilisant les dérivées premières et les dérivées secondes. Premièrement, on forme une matrice de dimension 4x4 et en inversant cette matrice on obtient les valeurs d'alpha point et bêta point en fonction de leur dérivée première et d'alpha et bêta. La méthode de Runge Kutta permet de retrouver les valeurs recherchées à partir des expressions formées précédemment en faisant ici 4 incrémentations.

Les variables utilisées ici sont X1a, X2a, X3a et X4a qui correspondent à :

X1 : alpha X2 : bêta X3 : alpha\_point X4 : bêta\_point

d1, grandeur positive ; distance de O à B, ou BO algébrique porté par vecteur AB	0,525
d2,AB	0,525
d3,BI	0,4
d4,OD	1,8
d5,DE	0,8
d6,DH	0,7
d7,EF	0,4
d8,IH	2,562
Masse contre poids, m_cp	20
masse barre AI, m_AI	1
m2,Masse barre BD, m_BD	1
m1,Masse barre DE, m_DE	1
Masse boulet, m_bl	0,7
Angle Alpha, t=0, degrés	-45
Vitesse angle Alpha, t=0, degrés/s	0
Angle beta, t=0, degrés	-89
Vitesse angle beta, t=0, degrés/s	0
Angle alpha largage AI, degré	90
dt_s, intégration	0,01
dt_print,s	0,01
durée simul,s	2
d9,DG1	0,4
d10, OG2, algébrique	0,6375
BG3,algébrique porté sur AI	-0,5029762
Haut, hauteur du point O par rapport au sol	1,5
angle initial Mu, en degré	-16,499665
m3, masse de l'ensemble contre poids et barre AI	21
d11, distance OI initial	0,125
dzeta, angle de OG4 , position initiale avec axe X, deg	134,418282
X de OG4	-0,5720681
Y de OG4	0,58380395
Phi, angle de OE en position initiale avec axe X, en degré	-36,328846

Il serait ambitieux de résoudre ce système d'équations à la main, mais étant donné la difficulté posée par ce système on préférera utiliser le tableur Excel dans lequel on peut retrouver une partie développeur qui nous permettra de faire nos programmes et surtout d'analyser simplement les résultats obtenus.

On entre les valeurs à l'état initial du système, à t=0. Ces valeurs sont les dimensions de notre système, les masses de chacun des éléments ainsi que les différents angles. Il faut savoir qu'à chaque incrémentation on utilise les résultats de l'incrément précédente pour inverser à nouveau la matrice et trouver les valeurs recherchées. Voici ci-dessous un aperçu du programme utilisé pour la boucle de convergence par Runge Kutta.

```

' debut de la boucle de convergence par Runge Kutta
' *****
nstep = durée_simul / dt|
x1a = Alpha
x2a = Beta
x3a = 0 'Alpha_vit ' dérivée de alpha
x4a = 0 ' Beta_vit ' dérivée de beta
' x1a = alpha , x2a = beta, x3a=alpha_point, x4a=beta_point
i_print = i_print + 1
For i = 2 To nstep
  istep1 = i
  time_2 = (i - 2) * dt + T_init ' time_2 est le temps courant absolu
  ' 1 er increment
  Alpha = x1a
  Beta = x2a
  Alpha_vit = x3a
  Beta_vit = x4a
  phi = Alpha + Cst3
  dzeta = Alpha + Cst2
  Call init2(m_b1, d_OE, phi, d7, Beta, Alpha_vit, Beta_vit, m4, d_OG4, dzeta, inertie_G4_O, Alpha_seconde, _
Beta_seconde) ' elle récupère alpha_seconde et Beta_seconde

  k1(1) = dt * x1_fd(time_2, Alpha, Beta, Alpha_vit, Beta_vit)
  k1(2) = dt * x2_fd(time_2, Alpha, Beta, Alpha_vit, Beta_vit)
  k1(3) = dt * Alpha_seconde
  k1(4) = dt * Beta_seconde

'2 ieme increment ' *****
Alpha = x1a + k1(1) / 2
Beta = x2a + k1(2) / 2
Alpha_vit = x3a + k1(3) / 2
Beta_vit = x4a + k1(4) / 2
phi = Alpha + Cst3
dzeta = Alpha + Cst2
Call init2(m_b1, d_OE, phi, d7, Beta, Alpha_vit, Beta_vit, m4, d_OG4, dzeta, inertie_G4_O, Alpha_seconde, _
Beta_seconde) ' elle récupère alpha_seconde et Beta_seconde

  k2(1) = dt * x1_fd(time_2 + dt / 2, Alpha, Beta, Alpha_vit, Beta_vit)
  k2(2) = dt * x2_fd(time_2 + dt / 2, Alpha, Beta, Alpha_vit, Beta_vit)
  k2(3) = dt * Alpha_seconde
  k2(4) = dt * Beta_seconde

```

FIGURE 2.8

Premièrement on initialise les valeurs X1, X2, X3 et X4, ensuite on commence à calculer les coefficients de la matrice qui changent à chaque incrémentation. On utilise la procédure init2 qui nous permet de récupérer alpha\_seconde et bêta\_seconde en inversant la matrice. Le calcul de k (1), k (2), k (3) et k (4) sont les incrémentations de Runge Kutta qui s'ajoutent respectivement aux variables X1, X2, X3 et X4. Donc à chaque incrémentation on calcule une nouvelle matrice avec de nouveaux coefficients, ainsi chaque incrémentation est différente. A la fin de la boucle de convergence par Runge Kutta, on fait la somme de l'ensemble des incrémentations comme ci-dessous :

```

' nouvelles valeurs :
  x1a = x1a + 1 / 6 * (k1(1) + 2 * k2(1) + 2 * k3(1) + k4(1))
  x2a = x2a + 1 / 6 * (k1(2) + 2 * k2(2) + 2 * k3(2) + k4(2))
  x3a = x3a + 1 / 6 * (k1(3) + 2 * k2(3) + 2 * k3(3) + k4(3))
  x4a = x4a + 1 / 6 * (k1(4) + 2 * k2(4) + 2 * k3(4) + k4(4))
' *****
Alpha = x1a
Beta = x2a
Alpha_vit = x3a
Beta_vit = x4a

```

FIGURE 2.9

Ainsi on peut déterminer la position du boulet à tout instant t à partir des valeurs d'alpha, bêta, alpha\_point et bêta\_point.

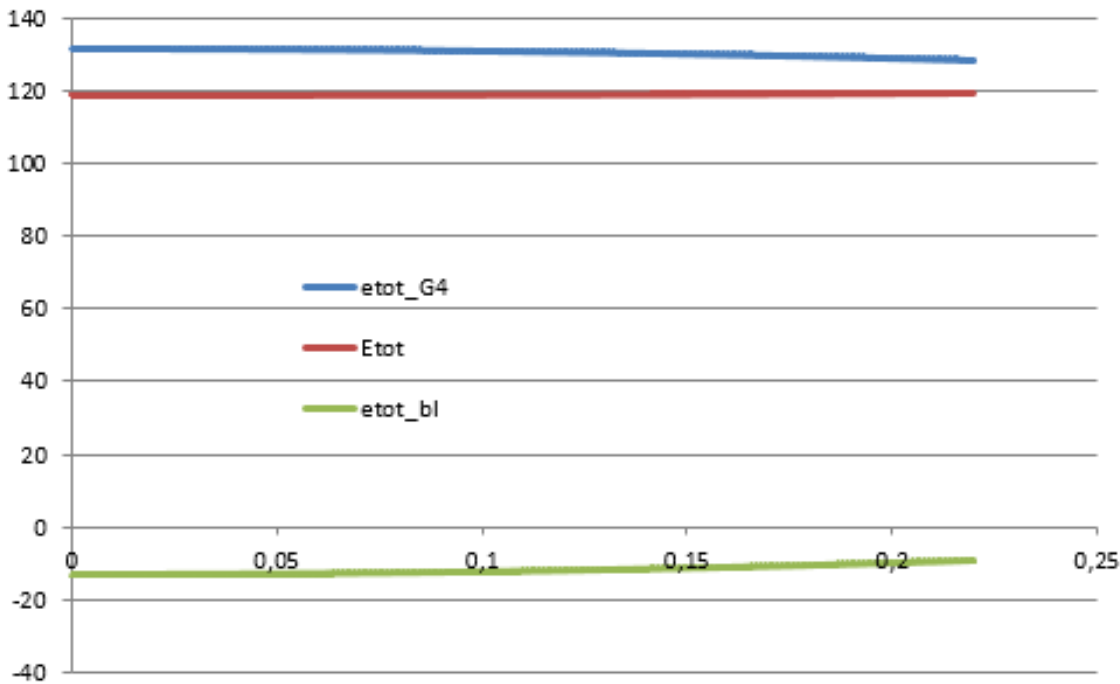


FIGURE 2.10

En observant le graphique énergétique, on remarque que l'énergie totale varie très peu au cours du temps, elle augmente faiblement. Cette augmentation est probablement due à l'effet de balancier des poids. Donc vu la faible variation, on en déduit que l'énergie totale est bien conservée au cours du temps.

### 2.2.6 Calcul théorique de la portée

Pour trouver la portée du boulet, nous allons devoir déterminer la position et la vitesse de celui-ci quand il est en l'air, hors de la machine. Pour cela, on utilise le PFD, où  $X_0$   $Y_0$   $V_{x0}$  et  $V_{y0}$  sont les positions et vitesses du boulet à l'instant  $t=0$ , c'est à dire à l'instant où le boulet ne touche plus la poche dans laquelle il est placé.

Système : le boulet

Forces agissant sur le boulet : le poids :  $P = -mg \vec{z}$

Application du Principe Fondamental de la Dynamique :

$$\sum \vec{F} = m \vec{a}$$

Projetons sur les axes  $\vec{x}$  et  $\vec{y}$  :

$$\begin{cases} a_X = 0 \\ a_Y = -g \end{cases}$$

$$\begin{cases} V_X = V_{X0} \\ V_Y = -gt + V_{Y0} \end{cases}$$

$$\begin{cases} X = V_{X0}t + X_0 \\ Y = -\frac{g}{2}t^2 + V_{Y0}t + Y_0 \end{cases}$$



De l'équation de X on en déduit t :

$$t = \frac{X - X_0}{V_{X0}} \quad (2.1)$$

On a donc Y en fonction de X et des conditions initiales :

$$Y(X) = -\frac{g}{2} \left( \frac{X - X_0}{V_{X0}} \right)^2 + V_{Y0} \left( \frac{X - X_0}{V_{X0}} \right) + Y_0 \quad (2.2)$$

Pour avoir la portée, il suffit de résoudre cette équation pour  $Y=-h$ , où h est la hauteur du trébuchet, du sol jusqu'au point O.

### 2.2.7 Résolution numérique de la portée

On calcule la portée en utilisant les formules trouvées avec le modèle théorique. Tout d'abord on doit résoudre une équation du 2<sup>nd</sup> degré, pour avoir le temps de chute depuis le largage du boulet.

On utilise alors la procédure "t\_final\_s", on obtient ainsi "t\_final" que l'on va ensuite injecter dans la procédure "portée\_s" qui en fonction de la vitesse initiale, du temps de chute et de la position initiale en x de largage va calculer la portée, toujours à l'aide des formules théoriques. On calcule la portée de notre système à chaque instant donc on est sûr de ne pas manquer la valeur de portée maximum. Voici les procédures utilisées :

```

Sub t_final_s(Haut, x0, y0, vx0, vy0, t_final) ' donne le temps de chute depuis le largage du boulet
Dim A As Double, B As Double, C As Double, D As Double, delta As Double
A = G0 / 2
B = -vy0
C = -(y0 + Haut)
D = B * B - 4 * A * C
delta = Sqr(D)
t_final = (-B + delta) / (2 * A)
End Sub
' *****
Sub portée_s(t_final, vx0, x0, portée)
portée = vx0 * t_final + x0
End Sub

```

FIGURE 2.11

## 2.3 Travail expérimental

### 2.3.1 Construction de la machine



FIGURE 2.12 – Machine de jet

Cette année, nous avons ré-utilisé la base de la machine de jet de l'année précédente. Nous lui avons cependant apporté certaines modifications. Nous avons d'abord fixé le bâti, les montants ainsi que l'axe de rotation. De plus, le système d'attache du contrepoids et la poche supportant le boulet sont les mêmes, ainsi que le système de goupille permettant de libérer le boulet.

En effet, comme nous avons présenté précédemment, la principale modification de cette année est que le bras principal est articulé. Nous avons d'abord assemblé deux barres de bois à l'aide de clous et de bandes de tissus que nous avons collées, afin d'obtenir la largeur souhaitée, cf. illustration. Nous avons fixé cette barre à l'axe de rotation à l'aide de vis à bois. (cf. figure 2.13)

Ensuite, nous avons fixé les charnières au niveau des deux articulations. La fixation est simple : une vis, une rondelle et un écrou suffisent. Ces deux barres, lorsque AI est libérée, sont libres mais sont quand même reliées entre elles : nous les avons attachées ensemble, à l'aide d'une corde, afin d'accentuer l'effet de rotation de la machine. (cf. figure 2.14)

Pour libérer la barre AI au bon moment, nous avons élaboré un système de goupille. Ce système de goupille est similaire au système de libération du boulet. En effet, nous avons placé une petite tige dans la barre. Cette tige retient les deux bouts de corde qui eux-mêmes retiennent la barre. Pour libérer la goupille, nous l'avons accrochée à une corde, de longueur variable, qui est fixée sur un axe en hauteur. Passé un certain angle, la corde se tend donc la goupille est retirée, et la barre AI est libérée. (cf. figures 2.15 et 2.16)



FIGURE 2.13



FIGURE 2.14 – Système de corde

Nous avons choisi de concevoir ce système car nous pensons que pendant le lancement, lorsque la barre AI où est fixée le contrepoids entraîne la barre qui tient le boulet, un effet de "fouet" est obtenu et ainsi le boulet part beaucoup plus loin.



FIGURE 2.15 – Système de goupille



FIGURE 2.16 – Système de goupille

### 2.3.2 Phase de test et présentation des résultats

Une fois la machine de jet assemblée et prête à l'emploi, nous sommes passés à la phase de test. Nous avons utilisé des disques de masses différentes (5 et 10kg) pour servir de contrepoids. Les boulets que nous avons utilisés étaient des balles remplies d'eau de 520 et 750 grammes. Nous n'avions comme paramètres variables que la masse du contrepoids et des balles. Nous devions juste trouver le meilleur moment pour libérer la goupille de la barre AI. Après les premiers tests, nous avons été obligés d'incliner la barre d'attache de la corde de la goupille pour éviter qu'elle ne se torde. Cette correction a permis de régler l'angle de largage plus facilement et de meilleurs résultats. Si l'angle de largage est faible, le boulet décrit une cloche et touche le plafond tandis que s'il est trop élevé le boulet aura une trajectoire tendue. Pour effectuer les essais nous devons au minimum être 3 personnes : deux pour soutenir le contrepoids en position haute et une pour tenir la corde qui libère la goupille qui libère le boulet. Nous devons tenir en hauteur cette corde sinon nous tordions la goupille. Voici un tableau récapitulatif de nos résultats :

Boulet (gr)	Contrepoids (kg)	Résultat (m)	Problème(s) rencontré(s)
520	20	11	Goupille enlevée un peu trop tôt
520	20	12	
520	30	<b>16</b>	
520	30	15.5	
750	30	13.5	
1270 (2 balles)	30	12	

### 2.3.3 Comparaison résultats théoriques et expérimentaux

Le tableau suivant compare nos résultats théoriques et expérimentaux :

Boulet (gr)	Contrepoids (kg)	Expérimental (m)	Théorique (m)
520	20	11	12.29
520	20	12	12.29
520	30	<b>16</b>	13
520	30	15.5	13
750	30	13.5	12.7
1270 (2balles)	30	12	12.6

Nous pouvons remarquer que pour les essais 3,4 et 5 nous avons dépassé la théorie, mais nous ne pouvons l'expliquer à ce stade. Nous constatons aussi que nous avons établi notre record personnel de **16 mètres**.

# Conclusion et perspectives

## Conclusion générale :

Pour conclure, nos résultats ont dépassé nos attentes notamment sur le plan expérimental. C'est pourquoi nous pensons que ce projet P6 fut un succès. Premièrement, il nous a fallu imaginer une amélioration au système de base. Les premières esquisses de notre modèle ne furent pas concluantes mais nous avons pu les améliorer en gardant certaines idées. Évidemment, lors de la construction du système nous avons eu des doutes concernant les matériaux et les dimensions à prendre. Mais en pratique, il s'avère que notre système est efficace. Les résultats théoriques et expérimentaux sont très proches et donc cohérents. De plus en comparant nos résultats avec ceux des années passées on remarque une nette amélioration du point de vue énergétique et concernant la portée. Ce projet P6 fut très intéressant car il est très complet : il combine une recherche bibliographique, un travail théorique et un travail expérimental avec la construction de la machine. Il nous a permis de mettre en application nos connaissances dans de nombreux domaines et nous a appris que la cohérence et l'organisation dans le travail de groupe sont très importants. Ce fut donc une expérience très enrichissante. Cependant le fait que la pratique dépasse la théorie prouve que notre modèle théorique ne prend peut-être pas toutes les données en compte. Nous léguons ce projet P6 au groupe de l'an prochain en espérant qu'il apporte de nouvelles idées et améliore encore la portée.

## Conclusions personnelles :

**Sean** : Ce projet P6 fut très intéressant, car il demandait des connaissances dans plusieurs domaines, comme la mécanique et l'informatique. La réalisation de la machine fut également une expérience très enrichissante. Ce projet m'a montré à quel point le travail de groupe était important car tout le monde a un point de vue différent. Donc en partageant nos idées quand il y a un problème on arrive beaucoup plus rapidement à la solution. Je tiens à remercier Mr. Vuillamy qui a été d'une grande aide dans la réalisation de ce projet.

**Anthony** : Personnellement, j'ai trouvé ce projet très complet. En effet, nous avons eu du travail bibliographique, théorique et expérimental. Nous avons donc pu voir toutes les étapes d'un projet. De plus, allier les calculs mécaniques et la résolution numérique fut très enrichissant. Le montage de la machine et les essais étaient intéressants car ils ont permis de vérifier les calculs théoriques. Enfin, la rédaction du rapport en Latex était un défi car je ne connaissais pas et cela a permis de me former sur un logiciel que je réutiliserais sûrement. Je remercie chaleureusement Mr Vuillamy pour son implication dans notre projet, sans qui nous n'aurions pu le réaliser.

**Nathan** : Même si en choisissant ce projet au début de l'année je ne savais pas du tout à quoi m'attendre, j'ai été au final agréablement surpris par un projet qui combinait recherches personnelles, travail manuel, et esprit d'invention. Construire cette machine de jet m'aura

permis de mieux comprendre comment concrétiser une idée avec les éventuels problèmes qui émergeront. Même si ce projet n'est pas au final vraiment ancré dans la thématique que je souhaite poursuivre plus tard, il aura tout de même été très intéressant, et l'aide indispensable de Mr.Vuillamy, que nous remercions chaudement, a été d'une grande contribution pour notre projet.

**Braham** : Quant à moi, j'ai trouvé ce projet particulièrement intéressant et agréable à réaliser. J'ai vraiment aimé ce travail de groupe car ce projet reflète bien la réalité que nous aurons à affronter d'ici quelques années dans le monde du travail. De plus, c'était très satisfaisant de réaliser les études, simulations et calculs préalables et de voir qu'au final tout cela a fonctionné. Aussi, l'aspect expérimental du projet (à savoir le montage de la machine et les essais) était aussi très intéressant car il a permis de déceler les problèmes et les régler afin de faire fonctionner la machine et l'améliorer. Ce projet m'a conforté dans mon choix de thématique : la mécanique. Enfin, je tiens à remercier personnellement M.Vuillamy qui fut très impliqué dans ce projet. Il nous a aidé grandement et sans lui nous n'aurions sûrement pas pris autant de plaisir à réaliser ce projet.

### **Perspectives d'évolution :**

Nous pensons que cette machine peut encore être améliorée. Le système de dégoupillage pourrait être amélioré car la goupille retenant la barre AI se tord au fur et à mesure des tests. La corde de la deuxième goupille doit être tenue par une personne à hauteur d'épaule ce qui est contraignant si nous ne sommes pas nombreux. De plus, une autre amélioration différente permettrait de comparer nos résultats et de voir laquelle est la plus efficace. Nous aimerions donc vivement que ce projet soit de nouveau proposé l'année prochaine.

# Bibliographie

- [1] BEFFEYTE, Renaud *Les machines de guerre au Moyen Age*, Editions OUEST-FRANCE, 2008.
- [2] Aide d'Internet pour l'écriture et la mise en page Latex

# Annexe A

## Composition de la machine

Notre machine pèse en tout 3.8kg, sans le contrepoids.

Nos longueurs sont les suivantes :

OD = 160cm

DH = 50 cm

DE = 80 cm

OB = 50 cm

BI = 40 cm

BA = 40 cm

Longueur de corde IH : 200 cm

Elles ont été décidées en fonction de la longueur du bâti, de nos besoins et des simulations informatiques.