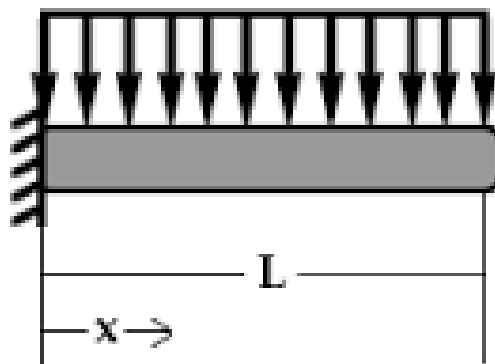


Déformation d'une poutre ou d'une barre



Etudiants :

Valentin BUCQUET

Florian PASSET

Ali BELLAMLIH MAMOU

Adèle BRISSET

Junjin AN

Medhi AZIZ ALAOUI

Enseignant-responsable du projet :

Bernard GLEYSE

Date de remise du rapport : 19/06/2016

Référence du projet : STPI/P6/2016-9

Intitulé du projet : Déformation d'une poutre ou d'une barre

Type de projet : Biblo, modélisation

Objectif du projet : Le but de ce projet est de simuler la déformation d'une poutre ou d'une barre. Cette simulation est abordée selon deux approches différentes : la première est une approche discrète et la deuxième est une approche continue

Mots-clés du projet : Poutre / Système masses-ressorts / Théorème de d'Alembert

Table des matières

1	Introduction	5
2	Organisation du groupe de travail	6
3	Systèmes Discrets	7
3.1	Système à deux masses et deux ressorts	7
3.1.1	Mise en équation du système	7
3.1.2	Résolution	7
3.2	Résolution d'un système à n masses et n ressorts	9
3.2.1	Mise en équation du système	9
3.2.2	Recherche des valeurs propres	10
3.2.3	Recherche des vecteurs propres	12
4	Système continu	15
4.1	Etude d'une poutre continue longitudinale	15
4.2	Equation des ondes longitudinales et démonstration du Théorème de d'Alembert	15
4.3	Application	19
4.4	Simulation sur maple	20
5	Conclusions et perspectives	22
6	Bibliographie	23

1 Introduction

Dans le cadre de notre deuxième année d'ingénieur à l'Insa de Rouen, nous avons été amenés à travailler en équipe afin de résoudre un problème de Physique. Il paraît important de rappeler que notre travail s'inscrit dans un ensemble de projets de P6 réalisés sous la direction de l'enseignant Bernard GLEYSE. En effet, depuis plusieurs années, des projets sont dédiés à l'étude des mouvements vibratoires des systèmes masses – ressorts. Et cette année, nous avons donc l'objectif de concrétiser ces précédentes études dans notre projet : « déformation d'une poutre ou d'une barre ».

Ce projet relève du domaine de la théorie des poutres, domaine profondément utile dans le cadre de la mécanique générale mais aussi dans celui du génie civil.

Cette théorie est un domaine large d'étude mais notre groupe de travail a un but précis. En effet, il s'agit, par le biais de deux modélisations physiques différentes de tenter de définir la solution de l'équation de déformation d'une poutre encastrée d'un côté et libre de l'autre. Pour ce faire, les deux modélisations réalisées s'appuient d'une part sur une méthode dite discrète à l'aide d'un système de ressorts et d'autre part sur une méthode continue.

La finalité de ce travail est de justement comparer les résultats obtenus par les deux méthodes et ainsi comprendre en quoi ces méthodes se distinguent par leurs points d'approches.

Ce rapport récapitulera nos travaux réalisés dans ces deux approches. Par conséquent, il sera divisé en deux parties : la première consacrée à l'approche discrète, la deuxième à l'approche continue. En guise de conclusion, une dernière section traitera du parallèle réalisé entre ces deux entités.

2 Organisation du groupe de travail

Le travail étant construit sur deux axes principaux, il paraît évident de diviser le groupe en deux sous-groupes.

Parmi ces groupes, le premier, composé de AN Junjin, PASSET Florian et BUCQUET Valentin, se charge de l'étude discrète, le deuxième, composé de BELLAMLIH MAMOU Ali, BRISSET Adele et AZIZ ALAOUI Mehdi, de l'étude continue.

Cette division ne fut par arbitraire. Le sujet demandant des connaissances approfondies en Mathématiques, nous avons pris soin que dans chacun de ces groupes se trouve une personne qui en fait sa spécialité.

Si l'on s'intéresse en particulier au premier groupe, celui-ci a fait le choix de subdiviser le travail demandé. Alors que Florian s'occupe seul de l'étude d'un système à 2 masses et 2 ressorts, Junjin et Valentin travaillent ensemble sur l'étude d'un système à n masses et n ressorts.

Quant au deuxième groupe, Ali s'est davantage occupé de l'aspect mathématique du rapport, en communication avec Adèle et Mehdi. Adèle s'est concentrée sur l'analyse Maple et Mehdi de la majeure partie de la rédaction du rapport.

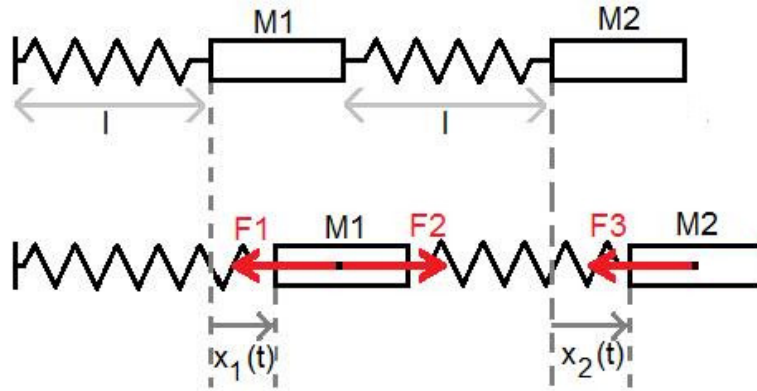
Cette structure de travail adoptée nous a permis d'économiser beaucoup de temps mais surtout spécialiser chacun des groupes sur un modèle mathématique propre.

3 Systèmes Discrets

3.1 Système à deux masses et deux ressorts

3.1.1 Mise en équation du système

Soit k la constante de raideur des deux ressorts, m la masse de $M1$ et de $M2$, et l la longueur à vide des deux ressorts. x_i représente la position du ressort i par rapport à sa position d'équilibre.



$$F_1 = -k \cdot x_1(t) \cdot \vec{u}(x) \quad F_2 = k \cdot (x_2(t) - x_1(t)) \cdot \vec{u}(x) \quad F_3 = -k \cdot (x_2(t) - x_1(t)) \cdot \vec{u}(x)$$

On applique le principe fondamental de la dynamique (PFD) au système :

en A : $m \cdot \ddot{x}_1(t) = F_1 + F_2 = k \cdot (x_2(t) - 2x_1(t))$

en B : $m \cdot \ddot{x}_2(t) = F_3 = k \cdot (x_2(t) - x_1(t))$

Donc :

$$\begin{pmatrix} \ddot{x}_1(t) \\ \ddot{x}_2(t) \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

avec :

$$M = \frac{-k}{m} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

3.1.2 Résolution

Valeurs propres :

$$\det(M - \lambda Id) = -\frac{k}{m} \begin{vmatrix} 2 - \lambda & -1 \\ -1 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = -\frac{k}{m} [\lambda^2 - 3\lambda + 1]$$

Pour $-\frac{k}{m} [\lambda^2 - 3\lambda + 1] = 0$, on trouve $\lambda_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ ou $\lambda_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

Matrice de passage :

Pour $\lambda_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 x \\ \lambda_1 y \end{pmatrix}$$

On peut donc écrire le système d'équation :

$$\begin{cases} 2x - y = \frac{3+\sqrt{5}}{2}x \\ -x + y = \frac{3+\sqrt{5}}{2}y \end{cases} \iff \begin{cases} y = \frac{1-\sqrt{5}}{2}x \\ x = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}y \end{cases}$$

On obtient un vecteur propre : $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$

De la même manière, pour $\lambda_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ on trouve un vecteur propre $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$

On peut dire que la matrice de passage P est égale à : $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1-\sqrt{5}}{2} & \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$

et que la matrice diagonale D est égale à : $D = \begin{pmatrix} \frac{3+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$

De plus, on a la matrice inverse de P : $P^{-1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & -1 \\ -\frac{1+\sqrt{5}}{2} & 1 \end{pmatrix}$

Matrice M' :

On sait que $M = \frac{-k}{m} PDP^{-1}$

On reprend alors l'équation de base en remplaçant M.

Puis, on pose : $Y = P^{-1}X$

On pose alors la matrice M' telle que :

$$M' = \frac{-k}{m} \begin{pmatrix} \frac{3+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} = \frac{-k}{m} D$$

On reprend le système précédent en remplaçant M et X par M' et Y :

$$\begin{pmatrix} \ddot{y}_1(t) \\ \ddot{y}_2(t) \end{pmatrix} = M' \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} \ddot{y}_1(t) \\ \ddot{y}_2(t) \end{pmatrix} = \frac{-k}{m} \begin{pmatrix} \frac{3+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$$

Posons $C = \frac{k}{m}$

On obtient le système d'équations différentielles de second ordre avec second membre :

$$\begin{cases} \ddot{y}_1(t) = -\frac{3+\sqrt{5}}{2} C y_1(t) \\ \ddot{y}_2(t) = -\frac{3-\sqrt{5}}{2} C y_2(t) \end{cases}$$

Pour $\ddot{y}_1(t) = -\frac{3+\sqrt{5}}{2} C y_1(t)$, on obtient $y_1(t) = A_1 \cos(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \sqrt{C}t) + B_1 \sin(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \sqrt{C}t)$

Pour $\ddot{y}_2(t) = -\frac{3-\sqrt{5}}{2} C y_2(t)$, on obtient $y_2(t) = A_2 \cos(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \sqrt{C}t) + B_2 \sin(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \sqrt{C}t)$

On utilise maintenant la matrice de passage pour repasser à l'équation initiale en remplaçant $X = PY$ avec :

$$Y = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \cos(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \sqrt{C}t) + B_1 \sin(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \sqrt{C}t) \\ A_2 \cos(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \sqrt{C}t) + B_2 \sin(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \sqrt{C}t) \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1-\sqrt{5}}{2} & \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$$

De plus, on pose :

$$\omega_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \sqrt{C}$$

$$\omega_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \sqrt{C}$$

On obtient donc :

$$X = \begin{pmatrix} A_1 \cos(\omega_1 t) + B_1 \sin(\omega_1 t) + A_2 \cos(\omega_2 t) + B_2 \sin(\omega_2 t) \\ \frac{1-\sqrt{5}}{2} A_1 \cos(\omega_1 t) + \frac{1-\sqrt{5}}{2} B_1 \sin(\omega_1 t) + \frac{1+\sqrt{5}}{2} A_2 \cos(\omega_2 t) + \frac{1+\sqrt{5}}{2} B_2 \sin(\omega_2 t) \end{pmatrix}$$

Pour trouver les constantes, on utilise les conditions initiales. On sait que la vitesse initiale de chaque masse est nulle donc on a à $t = 0, \dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0$ et on connaît les positions initiales $x_1(0) = x_0$ et $x_2(0) = x'_0$.

On dérive X :

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} -A_1 \omega_1 \sin(\omega_1 t) + B_1 \omega_1 \cos(\omega_1 t) - A_2 \omega_2 \sin(\omega_2 t) + B_2 \omega_2 \cos(\omega_2 t) \\ \frac{1-\sqrt{5}}{2} (-A_1 \omega_1 \sin(\omega_1 t) + B_1 \omega_1 \cos(\omega_1 t)) + \frac{1+\sqrt{5}}{2} (-A_2 \omega_2 \sin(\omega_2 t) + B_2 \omega_2 \cos(\omega_2 t)) \end{pmatrix}$$

Or d'après les conditions initiales établies ci-dessus, on a :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(0) = 0 \\ \dot{x}_2(0) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 0 = \omega_1 B_1 + \omega_2 B_2 \\ 0 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \omega_1 B_1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2} \omega_2 B_2 \end{cases} \iff \begin{cases} B_1 = -B_2 \\ B_1 = \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1} B_2 \end{cases}$$

On a donc $B_1 = B_2 = 0$.

$$\begin{cases} x_1(0) = A_1 + A_2 = x_0 \\ x_2(0) = \frac{1-\sqrt{5}}{2} A_1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2} A_2 = x_0 \end{cases} \iff \begin{cases} A_1 = \frac{3-\sqrt{5}}{2} x_0 - \frac{1}{\sqrt{5}} x'_0 \\ A_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} x_0 + \frac{1}{\sqrt{5}} x'_0 \end{cases}$$

On obtient donc l'équation suivante :

$$X = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \cos(\omega_1 t) + A_2 \cos(\omega_2 t) \\ \frac{1-\sqrt{5}}{2} A_1 \cos(\omega_1 t) + \frac{1+\sqrt{5}}{2} A_2 \cos(\omega_2 t) \end{pmatrix}$$

3.2 Résolution d'un système à n masses et n ressorts

3.2.1 Mise en équation du système

On applique le principe fondamental de la dynamique aux n masses

$$m\ddot{x}_1(t) = k(x_2 - x_1) - kx_1 = k(x_2 - 2x_1)$$

$$m\ddot{x}_2(t) = k(x_3 - x_2) + k(x_1 - x_2) = k(x_3 - 2x_2 + x_1)$$

⋮

$$m\ddot{x}_n(t) = k(x_{n-1} - x_n)$$

On introduit alors la matrice T telle que :

$$\begin{pmatrix} \ddot{x}_1(t) \\ \ddot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \ddot{x}_n(t) \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

D'après le PFD, on a alors :

$$T = \frac{k}{m} \begin{pmatrix} +2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & +2 & +1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & -1 & +1 \end{pmatrix}$$

3.2.2 Recherche des valeurs propres

La matrice T est symétrique réelle, ses valeurs propres sont donc réelles et simples. On aura alors n valeurs propres distinctes. D'après le théorème de Gershgorin, toute valeur propre de T appartient à la réunion de boules fermées de centre t_{ii} et de rayon r_i .

↔ Ce théorème spécifie que si λ valeur propre de T alors $|\lambda - t_{ii}| \leq r_i$

En appliquant ce théorème à T, on a alors $\begin{cases} \text{Pour } i = 1, \text{ on a } |\lambda - 2| \leq 1 \\ \text{Pour } 2 \leq i \leq n - 1, \text{ on a } |\lambda - 2| \leq 2 \\ \text{Pour } i = n, \text{ on a } |\lambda - 1| \leq 1 \end{cases}$

On constate alors que toutes les valeurs propres sont telles que $|\lambda - 2| \leq 2$
 Cela correspond à la définition d'une boule fermée de centre (2,0) et de rayon 2.
 Comme $\lambda \in \mathbb{R}$, il existe $\theta \in [0; \pi]$ unique tel que $\lambda = t_{ii} - 2\cos(\theta)$ avec $\lambda \geq 0$

Par définition d'une valeur propre, on a $TX = \lambda X = (t_{ii} - 2\cos(\theta)) X$

$$TX = \begin{pmatrix} 2\cos(\theta) & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2\cos(\theta) & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & 2\cos(\theta) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & \cdots & -1 & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0$$

On cherche alors les valeurs de $\theta \in [0; 2\pi]$ pour lesquelles $T_{\cos\theta}$ n'est pas inversible. C'est à dire pour $\det(T_{\cos\theta}) = 0$
 Or le déterminant d'une matrice tridiagonale A est donné par :

$$\det A^{(n)} = a_{n,n} \det A^{(n-1)} - a_{n-1,n} a_{n,n-1} \det A^{(n-2)}$$

Dans notre cas, on a $\Delta_n = \det(T_{\cos\theta}) = 2\cos(\theta) \Delta_{n-1} - \Delta_{n-2}$

On a comme conditions initiales $\begin{cases} \Delta_0 = 1 \\ \Delta_1 = 2\cos(\theta) - 1 \end{cases}$

On reconnaît une suite de déterminant récurrente d'ordre 2

Soit le polynôme caractéristique $n^2 = 2\cos(\theta)n - 1 \Leftrightarrow n^2 - 2\cos(\theta)n + 1 = 0$
 $\Delta = b^2 - 4ac = 4\cos^2(\theta) - 4 = 4[\cos^2(\theta) - 1] = -4\sin^2(\theta) = (2i\sin(\theta))^2$

On a alors 2 solutions :

$$r_1 = \frac{2\cos(\theta) - 2i\sin(\theta)}{2} = e^{-i\theta}$$

$$r_2 = \frac{2\cos(\theta) + 2i\sin(\theta)}{2} = e^{i\theta}$$

Cas 1 : $\forall \theta \in [0; \pi], \Delta_n = \alpha e^{in\theta} - \beta e^{-in\theta}$

On détermine α et β grâce aux conditions initiales

$$\begin{cases} \Delta_0 = 1 \Leftrightarrow \alpha + \beta = 1 \Leftrightarrow \beta = 1 - \alpha \\ \Delta_1 = 2\cos(\theta) - 1 \Leftrightarrow \alpha e^{i\theta} + \beta e^{-i\theta} = 2\cos(\theta) - 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 1 - \alpha \\ \alpha (e^{i\theta} - e^{-i\theta}) = 2\cos(\theta) - 1 - e^{i\theta} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 1 - \alpha \\ \alpha 2i\sin(\theta) = -1 + \cos(\theta) + i\sin(\theta) \end{cases}$$

On a donc : $\alpha = \frac{\cos(\theta) + i\sin(\theta) - 1}{2i\sin(\theta)} = \frac{e^{i\theta} - 1}{2i\sin(\theta)}$

$\beta = 1 - \alpha = \frac{1 - \cos(\theta) + i\sin(\theta)}{2i\sin(\theta)} = \frac{1 - e^{i\theta}}{2i\sin(\theta)}$

Donc $\Delta_n = \left(\frac{-1 + e^{i\theta}}{2i\sin(\theta)}\right) e^{in\theta} + \left(\frac{1 - e^{i\theta}}{2i\sin(\theta)}\right) e^{-in\theta} = \frac{e^{-in\theta} - e^{in\theta} + e^{(n+1)i\theta} - e^{-(n+1)i\theta}}{2i\sin(\theta)}$

$\Delta_n = \frac{2i\sin((n+1)\theta) - 2i\sin(n\theta)}{2i\sin(\theta)} = \frac{\sin((n+1)\theta) - \sin(n\theta)}{\sin(\theta)} = \frac{\sin(n\theta + \theta) - \sin(n\theta)}{\sin(\theta)}$

$\Delta_n = \frac{\cos(n\theta)\sin(\theta) + \sin(n\theta)\cos(\theta) - \sin(n\theta)}{\sin(\theta)} = \frac{\cos(n\theta)(2\sin(\frac{\theta}{2})\cos(\frac{\theta}{2})) + \sin(n\theta)(\cos(\frac{\theta}{2})^2 - \sin(\frac{\theta}{2})^2) - \sin(n\theta)}{2\cos(\frac{\theta}{2})\sin(\frac{\theta}{2})}$

$\Delta_n = \frac{2\cos(n\theta)\cos(\frac{\theta}{2})\sin(\frac{\theta}{2}) + \sin(n\theta)(1 - 2\sin^2(\frac{\theta}{2})) - \sin(n\theta)}{2\cos(\frac{\theta}{2})\sin(\frac{\theta}{2})}$

$\Delta_n = \frac{\cos(n\theta)\cos(\frac{\theta}{2}) - \sin(n\theta)\sin(\frac{\theta}{2})}{\cos(\frac{\theta}{2})}$

$\Delta_n = \frac{\cos(n\theta + \frac{\theta}{2})}{\cos(\frac{\theta}{2})} = \frac{\cos(\theta(n + \frac{1}{2}))}{\cos(\frac{\theta}{2})} = 0$

Cas 2 : $\theta = 0$

Pour $\theta = 0$, le polynôme caractéristique devient $n^2 - 2n + 1 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = 0$

On a donc une racine unique $r_0 = -\frac{b}{2a} = 1$

Donc $\Delta_n = (\alpha + n\beta) r_0^n = \alpha + n\beta$

On détermine α et β grâce aux conditions initiales

$$\begin{cases} \Delta_0 = 1 \Leftrightarrow \alpha = 1 \\ \Delta_1 = 2\cos(\theta) - 1 \Leftrightarrow \alpha + \beta = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_0 = 1 \Leftrightarrow \alpha = 1 \\ \Delta_1 = 2\cos(\theta) - 1 \Leftrightarrow \alpha + \beta = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 0 \end{cases}$$

Donc $\Delta_n = 1 \neq 0$

On en conclut que $\theta \neq 0$

Cas 3 : $\theta = \pi$

Pour $\theta = \pi$, le polynôme caractéristique devient $n^2 + 2n + 1 = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 0$$

On a donc une racine unique $r_0 = -\frac{b}{2a} = -1$

Donc $\Delta_n = (\alpha + n\beta) (-1)^n$

On détermine α et β grâce aux conditions initiales

$$\begin{cases} \Delta_0 = 1 \\ \Delta_1 = 2\cos(\theta) - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ -\alpha - \beta = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 2 \end{cases}$$

Donc $\Delta_n = (1 + 2n) (-1)^n$

On a $\Delta_n = 0 = (1 + 2n) (-1)^n = 0 = n = -\frac{1}{2}$

Ce qui est absurde, donc l'équation n'a pas de solution si $\theta = \pi$

Par conséquent, après étude des 3 cas, $\Delta_n = 0 \Leftrightarrow \theta \in [0; \pi]$ et $\cos(\theta(n + \frac{1}{2})) = 0$

D'où $\theta(n + \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}\pi + k\pi = \theta = \left(\frac{(2k+1)\pi}{2n+1}\right)$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Les valeurs propres sont donc : $\lambda_k = t_{ii} - 2\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n+1}\right) \quad k \in [1; n-1]$

3.2.3 Recherche des vecteurs propres

On pose $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ le vecteur propre de T pour la valeur propre λ_k

Par définition, il vérifie l'équation $TX = \lambda_k X$, c'est à dire $T_{\cos\theta_k} X = 0$

$$\begin{pmatrix} 2\cos(\theta_k) & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2\cos(\theta_k) & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & 2\cos(\theta_k) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & \cdots & -1 & 2\cos(\theta_k) - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 2\cos(\theta_k)x_1 - x_2 \\ -x_1 + 2\cos(\theta_k)x_2 - x_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ -x_{n-1} + (2\cos(\theta_k) - 1)x_n \end{pmatrix} = 0$$

On pose $\begin{cases} x_1 = \sin(\theta_k) \\ x_2 = \sin(2\theta_k) \end{cases}$

On a $-x_1 + \cos(\theta_k)x_2 - x_3 = 0 \Leftrightarrow x_3 = -x_1 + 2\cos(\theta_k)x_2$

$$x_3 = -\sin(\theta_k) + 2\cos(\theta_k)\sin(2\theta_k)$$

D'après la formule, on a $2\sin((i-1)\theta)\cos(\theta) = \sin(i\theta) + \sin((i-2)\theta)$ pour $i = 3$

Pour $i = 1$, on a $x_{n-3} = -x_{n-1} + 2\cos(\theta_k)x_{n-2}$

Alors $x_{n-1} = -x_{n-3} + 2\cos(\theta_k)x_{n-2}$

$$x_{n-1} = -\sin((n-3)\theta_k) + 2\cos(\theta_k)\sin((n-2)\theta_k)$$

$$x_{n-1} = \sin((n-1)\theta_k)$$

Aussi $-x_{n-1} + (2\cos(\theta_k) - 1)x_n = 0$

$$\text{On a alors } x_n = \frac{x_{n-1}}{2\cos(\theta_k) - 1} = \frac{\sin((n-1)\theta_k)}{2\cos(\theta_k) - 1}$$

Le vecteur propre associé à la valeur propre λ_k s'écrit donc sous la forme :

$$X_k = \begin{pmatrix} \sin(\theta_k) \\ \sin(2\theta_k) \\ \vdots \\ \sin(i\theta_k) \\ \vdots \\ \frac{\sin((n-1)\theta_k)}{2\cos(\theta_k) - 1} \end{pmatrix} D = \begin{pmatrix} \frac{k}{m} \left(2 - 2\cos\left(\frac{3\pi}{2n+1}\right) \right) & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \frac{k}{m} \left(2 - 2\cos\left(\frac{(2i+1)\pi}{2n+1}\right) \right) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \frac{4k}{m} \end{pmatrix}$$

Dans la base des vecteur propres :

Notons $\tilde{\Upsilon} = \begin{pmatrix} \tilde{\Upsilon}_1 \\ \vdots \\ \tilde{\Upsilon}_i \\ \vdots \\ \tilde{\Upsilon}_n \end{pmatrix}$ les dérivés des fonctions de position des masses dans la base des vecteurs propres

Notre problème revient à résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{Y} = DY \\ X = PY \end{cases} \quad \text{Formule de changement de base}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{Y}_1(t) = \frac{k}{m} \left(2 - 2\cos\left(\frac{3\pi}{2n+1}\right) \right) y_1(t) \\ \vdots \\ \dot{Y}_i(t) = \frac{k}{m} \left(2 - 2\cos\left(\frac{(2i+1)\pi}{2n+1}\right) \right) y_i(t) \\ \vdots \\ \dot{Y}_n(t) = \frac{4k}{m} y_n(t) \end{array} \right\}$$

On remarque que $\frac{k}{m} \left(2 - 2\cos\left(\frac{(2i+1)\pi}{2n+1}\right) \right) = \frac{4k}{m} \sin\left(\frac{(2i+1)\pi}{4n+2}\right)^2 = \frac{k}{m} \lambda_i$

On a alors $w_i^2 = \frac{4k}{m} \sin\left(\frac{(2i+1)\pi}{4n+2}\right)^2$

Donc $w_i = 2\sqrt{\frac{k}{m}} \sin\left(\frac{(2i+1)\pi}{4n+2}\right)$

Or on représente la longueur de la poutre par L, la section uniforme de la poutre par S, la masse spécifique volumique par r et la masse par m.

On a les relations $k = \frac{ES}{L}n$ et $m = \frac{rSL}{n}$

$$w = 2\sqrt{\frac{ESnn}{LrSL}} \sin\left(\frac{(2i+1)\pi}{4n+2}\right)$$

$$w_i = \frac{2n}{L} \sqrt{\frac{E}{r}} \sin\left(\frac{(2i+1)\pi}{4n+2}\right)$$

On étudie la limite de w_i pour n tend vers l'infini.

On pose $\alpha = \frac{2}{L} \sqrt{\frac{E}{r}}$ et $\beta = (2i+1)\pi$

$$w_i = n\alpha \sin\left(\frac{\beta}{4n+2}\right)$$

$$\sin\left(\frac{\beta}{4n+2}\right) \underset{n}{\sim} \frac{\beta}{4n}$$

Alors $w_i \underset{n}{\sim} \frac{\beta}{4n} \alpha n \underset{n}{\sim} \frac{\alpha\beta}{4}$

Finalement, on a : $w_i \xrightarrow{n} \frac{\alpha\beta}{4} = \frac{\left(\frac{2}{L} \sqrt{\frac{E}{r}}\right)((2i+1)\pi)}{4} = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{E}{r}} (2i+1)\pi$

4 Système continu

4.1 Etude d'une poutre continue longitudinale

Notre travail consiste à étudier la déformation d'une poutre dans le cas continu afin de trouver au final l'équation de la déformation. Pour ce faire, nous avons besoin de chercher le mode propre de vibration de notre poutre. En effet, il s'agit de trouver l'équation régissant le mode vibratoire d'une poutre libre à une extrémité, encastrée à l'autre.

Conditions préliminaires

Il est important de comprendre que cette étude ne peut se faire sans avoir au préalable posé certaines hypothèses. Les nôtres sont les suivantes :

- ◆ matériau élastique, linéaire et isotrope
- ◆ on travaille dans le cas des petites perturbations

Tout au long de notre étude nous utilisons :

- ◆ E représente le module de Young
- ◆ ρ représente la masse volumique
- ◆ S représente la section de la poutre
- ◆ L représente la longueur de la poutre
- ◆ α petit angle, la déformation initiale

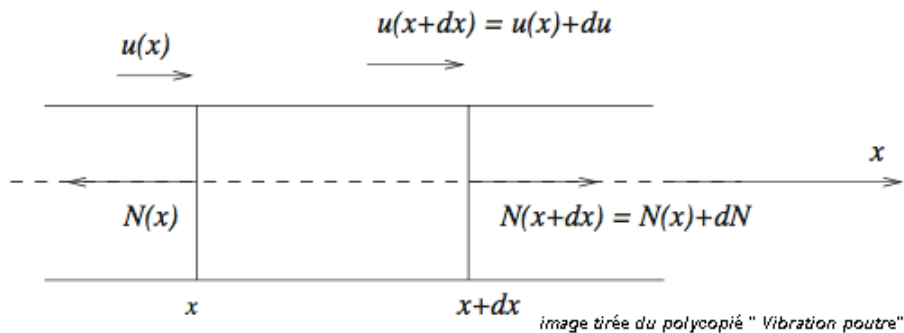
Ce sont des termes qui devront en principe apparaître dans l'équation finale.

Comme souligné précédemment, le système que nous devons étudier est une poutre continue longitudinale encastrée d'un côté et libre de l'autre. Dans le cas discret par exemple, la poutre est modélisée par une succession de ressorts. Tandis que dans le cas continu, elle doit être modélisée sur des appuis ponctuels élastiques. Dès lors il est nécessaire d'introduire un élément essentiel à notre étude : l'équation de d'Alembert sans laquelle on ne peut avancer.

$$\frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t^2}$$

Pour la retrouver dans le cas discret, ce n'est pas difficile et cela a été vu dans la partie discrète.

4.2 Equation des ondes longitudinales et démonstration du Théorème de d'Alembert



Etudions maintenant la poutre en traction. Faisons le sur le bout de la poutre. Tout d'abord, nous avons deux inconnues ; le déplacement axial $u(x, t)$ et l'effet normal $N(x, t)$. Ces deux inconnues peuvent être reliées par la loi de Hooke :

$$N = \sigma S = ES \cdot \frac{du}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{N}{S} = E \cdot \frac{\partial l}{l} = E \cdot \frac{du}{dx}$$

On applique le Principe Fondamental de la Dynamique à la partie de la poutre entre x et $x + dx$.

On a ainsi :

$$\sum F_{ext} = ma$$

Or :

$$- m = \rho S \cdot dx$$

$$- a = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

D'où :

$$\rho S \cdot dx \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = N(x + dx) - N(x) = \frac{\partial N}{\partial x} \cdot dx$$

Or il a été établi que :

$$\frac{N}{S} = E \cdot \frac{\partial u}{\partial x}$$

D'où :

$$\Leftrightarrow N = ES \cdot \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = ES \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Donc :

$$\rho S \cdot dx \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = ES \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cdot dx$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\rho}{E} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

Dans cette equation on se rend compte que le terme $\frac{E}{\rho}$ est homogène a une vitesse au carrée. En effet E s'exprime en Pascal (soit en $\text{kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$) et ρ est une masse volumique donc le quotient $\frac{E}{\rho} = [\text{m} \cdot \text{s}^{-2}]$ ainsi on pose :

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

Ainsi avec la loi de Hooke, le PFD devient :

$$\rho \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = E \cdot \frac{\partial u}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

On peut aussi écrire :

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \right) u = 0$$

On pose le changement de variable suivant :

$$- p = t - \frac{x}{c}$$

$$- q = t + \frac{x}{c}$$

On a ainsi :

$$- \frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{1}{c}$$

$$- \frac{\partial p}{\partial t} = 1$$

$$- \frac{\partial q}{\partial x} = \frac{1}{c}$$

$$- \frac{\partial q}{\partial t} = 1$$

On calcule les différents termes :

$$- \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial p} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial q} \cdot \frac{\partial q}{\partial x} - \frac{1}{c} \left(\frac{\partial}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial t} \right) = -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial}{\partial p} + \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial}{\partial q} - \frac{1}{c} \left(\frac{\partial}{\partial q} + \frac{\partial}{\partial p} \right) = \frac{-2}{c} \cdot \frac{\partial}{\partial p}$$

$$- \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial p} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial q} \cdot \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{1}{c} \left(\frac{\partial}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial t} \right) = -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial}{\partial p} + \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial}{\partial q} + \frac{1}{c} \left(\frac{\partial}{\partial q} + \frac{\partial}{\partial p} \right) = \frac{2}{c} \cdot \frac{\partial}{\partial q}$$

On obtient ainsi l'équivalence suivante :

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) = 0$$

D'où :

$$\frac{-4}{C^2} \times \frac{\partial}{\partial p} \times \frac{\partial}{\partial q} \times X = 0$$

Soit :

$$\frac{\partial^2 X}{\partial p \partial q} = 0$$

On intègre maintenant par rapport à p :

$$\frac{\partial X}{\partial q} = G(q)$$

$$\Rightarrow X(p, q) = g(q) + Kq$$

On intègre désormais par rapport à q :

$$\frac{\partial X}{\partial p} = F(p)$$

$$\Rightarrow X(p, q) = f(p) + Kp$$

En conclusion :

$$X(p, q) = f(p) + g(q)$$

$$\Rightarrow X = f\left(t - \frac{x}{c}\right) + g\left(t - \frac{x}{c}\right)$$

Nous cherchons $X(x, t) = f(x) \exp^{i\omega t}$.

On a :

$$\frac{\partial^2 X}{\partial^2 x} = \frac{1}{C^2} \times \frac{\partial^2 X}{\partial^2 t} = 0$$

Avec :

$$\frac{\partial^2 X}{\partial^2 x} = \left(\frac{\partial^2}{\partial^2 x} f(x) \right) \exp^{i\omega t}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial^2 X}{\partial^2 t} = \frac{\partial^2}{\partial^2 t} (f(x) \exp^{i\omega t}) = f(x) \times (-\omega^2) \exp^{i\omega t}$$

$$\Leftrightarrow \exp^{i\omega t} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x) + \frac{\omega^2}{C^2} f(x) \right) = 0$$

Mais $\exp^{i\omega t}$ est différent de 0, donc :

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x) + \frac{\omega^2}{C^2} f(x) = 0$$

Soit :

$$f'' + \left(\frac{\omega}{C}\right)^2 f = 0$$

La résolution nous donne donc :

$$f(t) = (A \cos\left(\frac{\omega t}{C}\right) + \beta \sin\left(\frac{\omega t}{C}\right))$$

Après explication avec M.Gleyse, ce dernier nous conseilla de résoudre l'équation en privilégiant la méthode par séparation des variables. Nous obtenons bien entendu au final des résultats similaires. Les voici :

On a ainsi la fonction : $s(x, t) = f(x) \times g(t)$.

Avec f fonction de la distance et g celle du temps.

On substitue s dans l'équation de D'Alembert :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{C^2} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} &= 0 \\ \Rightarrow f''(x)g(t) - \frac{1}{C^2} f(x)g''(t) &= 0 \\ \Rightarrow \frac{f''(x)}{f} &= \frac{1}{C^2} \frac{g''(t)}{g} = cst \end{aligned}$$

On a alors deux équations différentielles, une dépendant de x et une de t qui sont égales. Le seul résultat possible est donc une constante :

$$\begin{aligned} \frac{f''(x)}{f} &= K \\ \frac{g''(t)}{C^2 g(t)} &= K \end{aligned}$$

Donc :

$$f''(x) - Kf(x) = 0$$

$$g''(t) - KC^2g(t) = 0$$

Ainsi, si $K > 0$, $g(t) = A \exp^{CK^{1/2}t} + \beta \exp^{-CK^{1/2}t}$, cette solution est à rejeter car elle correspond soit à une solution transitoire soit à une solution divergente.

On suppose donc $K < 0$ et on pose :

- $-C^2K = \omega^2$
- $g(t) = A \cos(\omega t - \varphi)$

L'équation 1 nous donne donc :

$$f(x) = \beta \cos\left(\frac{\omega}{C}x - \psi\right)$$

Ce qui permet d'écrire :

$$s(x, t) = A\beta \cos\left(\frac{\omega}{C}x - \psi\right) \cos(\omega t - \varphi)$$

On pose alors :

- $k = \frac{\omega}{C}$ le vecteur d'onde
- $C = A\beta$

On obtient :

$$s(x, t) = C \cos(Kx - \psi) \cos(\omega t - \varphi)$$

Avec tous ces nouveaux éléments nous pouvons obtenir des informations complémentaires à l'aide de l'analyse de cette équation qui peuvent nous aider à comprendre le comportement de notre poutre. Ces informations concernent la position des ventres et des noeuds :

$$\cos(Kx - \psi) = 0 \Rightarrow Kx - \psi = (2n + 1) \frac{\pi}{2}$$

En prenant $K = \frac{2\pi}{\lambda}$, on a :

$$x_n = \frac{(2n + 1)\lambda + \psi}{K} = \frac{(2n + 1)\lambda}{4} + \frac{\psi}{K}$$

Ainsi :

La distance entre 2 noeuds est de $\frac{\lambda}{2}$

La distance entre 1 ventre et un noeud est de $\frac{\lambda}{4}$

4.3 Application

Dans notre cas, la poutre est modélisée par une corde de longueur L fixée à une extrémité. Nous supposons par ailleurs que notre corde est suffisamment tendue pour négliger le poids. Nous avons deux valeurs extrêmes pour x : $x = 0$ et $x = L$. Leurs valeurs correspondent en y à $y(0, t) = 0 = y(L, t)$ (car la poutre est encadrée).

Les conditions initiales sont les suivantes :

à $t = 0$:

- $y(x, 0) = \alpha(x)$
- $\frac{\partial y(x, 0)}{\partial t} = \beta(x)$

On cherche des solutions de l'équation de D'Alembert sous la forme d'ondes stationnaires :

$$y(x, t) = C \cdot \cos(kx - \psi) \cos(\omega t - \varphi)$$

D'après les conditions initiales, nous avons : $\cos(\psi) = 0$, $\cos(kL - \psi) = 0$, $\psi = \pi/2$, $\sin(kL) = 0$ et $kL = n\pi$
 Nous obtenons alors :

$$k = \omega/v$$

D'où :

$$\omega = n\pi c/L$$

Nous verrons plus tard que seuls les n impairs nous intéressent. Au final notre pulsation s'écrira $\omega = (2n + 1) \frac{\pi c}{L}$.

Nous avons vu auparavant que $c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$.

Soit $\omega = (2n + 1) \frac{\pi}{L} \cdot \sqrt{\frac{E}{\rho}}$

Or :

$$\lambda = cT = (c \cdot 2\pi) / \omega$$

$$L = n\lambda/2$$

On en tire que la longueur de la corde doit être égale à un nombre entier de fois la demi-longueur d'onde ($\lambda/2$).

Après tous ces éléments, nous pouvons reprendre l'équation de D'Alembert qui désigne ce que l'on appelle le mode propre et la réécrire :

$$y(x, t) = C_n \cos\left(\frac{n\pi c}{L}t - \varphi_n\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Or l'amplitude C_n est arbitraire, la solution générale de l'équation d'onde peut s'écrire sous la forme d'une superposition de tous les modes propres :

$$y(x, t) = \sum_0^n C_n \sin\left(n\pi \frac{x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi ct}{L} - \varphi_n\right)$$

Utilisons maintenant nos conditions initiales dans notre équation.

Les CI imposent :

$$y(x, 0) = \alpha(x) = \sum_0^n C_n \cos(\varphi_n) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

et la dérivée de $y(x, 0)$ est nulle car la vitesse initiale est nulle.

Etendu à l'intervalle $]-\infty, +\infty[$, ce développement en série de Fourier est celui d'une fonction impaire (absence de termes en cosinus) de période $2L$.

On développe $\alpha(x) = \sum_0^n \alpha_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ en série de Fourier :

$$\alpha_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \alpha(x) dx$$

Par identification nous avons :

$$\alpha_n = C_n \cos(\varphi_n)$$

Quand n est pair, le coefficient α_n est nul donc nous allons étudier le phénomène pour le cas impaire.

$$\alpha_{2n+1} = \frac{1}{L} \int_{-L}^L \sin\left((2n+1)\frac{\pi}{L}x\right) \alpha(x, 0) dx$$

La fonction $\alpha(x)$ représente des fonctions que l'on connaît et qui correspondent à la corde.

Dans notre cas, le professeur a fourni ces fonctions à étudier :

Conditions initiales :

— θ petit

$$— f_1(x) = \begin{cases} x & \forall x \in [0; L/2] \\ \theta(L-x) & \forall x \in [L/2; L] \end{cases}$$

$$— f_2(x) = x(1-x)^2 \text{ sur } [0; L]$$

4.4 Simulation sur maple

Nous nous sommes servi du logiciel Maple afin de pouvoir visualiser la déformation d'une poutre encastree d'un côté et libre de l'autre. Nous avons entré les conditions initiales suivantes :

Equation des ondes 1D

L'équation des ondes pour une dimension d'espace est $U_{xx} - (1/c^2)U_{tt} = 0$, avec $U(x,t)$ le déplacement vertical au point x et temps t .
avec $U(0,t)=0$ et $U(L,t)=0$ (conditions aux limites), $U(x,0)=f$ et $U_x(x,0)=0$ (condition initiale).

```
> restart, assume(n, integer); l := 1; h := l/2; c := 2; f := 1/10 * x * (1 - x)^2;
      l := 1
      h := 1/2
      c := 2
      f := 1/10 * x * (1 - x)^2
=
> Bn := simplify(2/l * int(f * sin((2*n-1) * pi * x / (2 * l)), x = 0..l));
      Bn := 32/5 * (2 * pi * n - 3 * (-1)^n - pi) / (pi^4 * (16 * n^4 - 32 * n^3 + 24 * n^2 - 8 * n + 1))
=
> S := sum(Bn * sin((2*n-1) * pi * x / (2 * l)) * cos(c * (2*n-1) * pi * t / (2 * l)), n = 1..1);
      S := 32/5 * (pi - 3) * sin(1/2 * pi * x) * cos(pi * t)
=
```

S représente le premier terme de la solution générale de l'équation de la poutre. Nous avons affiché pour différents temps la déformation. Les termes S1 à S9 sont les valeurs de ce termes à ces différents temps.

```
=
> S0 := eval(subs(t = 0.01, S));
> S1 := eval(subs(t = 0.05, S));
> S2 := eval(subs(t = 0.1, S));
> S3 := eval(subs(t = 0.15, S));
> S4 := eval(subs(t = 0.2, S));
> S5 := eval(subs(t = 0.025, S));
> S6 := eval(subs(t = 0.03, S));
> S7 := eval(subs(t = 0.035, S));
> S8 := eval(subs(t = 0.04, S));
> S9 := eval(subs(t = 0.045, S));
> #plot({S0, S1, S2, S3, S4, S5, S6, S7, S8, S9, f}, x = 0..1)
> plot({S0, S1, S2, S3, S4, S5, S6, S7, S8, S9}, x = 0..1)
```

De cette manière on remarque le déplacement de la poutre au cours d'une courte période de temps.

5 Conclusions et perspectives

Le travail étant réalisé par les deux groupes, l'heure était à mettre en commun nos résultats. Ainsi, malgré le fait que les deux méthodes utilisées divergent radicalement sur le modèle physique adopté et les ressources mathématiques utilisées, nous fûmes satisfaits de converger vers la même solution. Par conséquent cela montre que ces deux méthodes sont bien fondées et qu'elles permettent toutes deux d'étudier les déformations d'un système. Alors que nous nous sommes contentés pour ce projet de l'étude des déformations d'une poutre ou d'une barre, nous pouvons parfaitement imaginer étendre cette étude à un système mécanique entier ou à un ouvrage constructif. Ceci dit, nous pouvons nous forger une première idée de la nature du travail des ingénieurs structures entre autre. Cependant, il semble que la deuxième méthode utilisée, c'est à dire l'étude continue, soit plus appropriée à des systèmes complexes. Pour ainsi dire, l'étude discrète montre vite ses limites puisqu'il devient difficile de projeter une structure complexe en une multitude de systèmes masses-ressorts.

Pour conclure, si nous devons ne retenir qu'un des deux plans d'étude, nous retiendrions l'étude continue, de par sa relative simplicité et de sa plus grande flexibilité.

6 Bibliographie

- Rapport de P6 2014-2015 #06 Oscillateur Masses Ressorts
- https://fr.wikipedia.org/wiki/Onde_sur_une_corde_vibrante
- <http://perso.univ-lemans.fr/~jcpascal/Cours/>
- http://ensieg.dox.free.fr/1A_ENSIEG/Cours%20vibra%20meca
- http://lafamilledurefuge.free.fr/doc/S5/Vibrations/poly_vibration.pdf
- http://olivier.granier.free.fr/cariboost_files/PC-Ondes-meca.pdf