INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES ROUEN

Projet de Physique P6
STPI/P6/2016-2017

Oscillateur Masses Ressorts

Enseignant responsable :
Bernard Gleyse

Étudiants :
Hontschoote Etienne
Liu Yu
Huber Gaël

Date de remise du rapport : 19/06/2017

Référence du projet : STPI [1]/P6/2016 – 2017

Intitulé du projet : Projet n°8 : Oscillateur masses-ressorts

Type de projet : *Bibliographie, Modélisation*

Objectifs du projet : *L'objectif de ce projet est de modéliser le mouvement des masses d'un oscillateur harmonique avec une, deux puis n masses mobiles en deux dimensions. On cherche donc à obtenir les équations de mouvement des masses mobiles d'un système donné puis de modéliser leur mouvement numériquement, sur le logiciel Geogebra.*

Remerciements : *Nos remerciements s'adressent à M. Gleyse pour son encadrement durant toute la durée du projet.*

1. Institut National des Sciences Appliquées de Rouen
Département Sciences et Techniques Pour l'Ingénieur
685 Avenue de l'Université BP 08- 76801 Saint-Etienne-du-Rouvray
Tél : +33 2 32 95 66 21 - Fax : +33 2 32 95 66 31

Table des matières

Introduction

Ce projet physique ou P6 consiste en un travail de recherche bibliographique en groupe sur les systèmes d'oscillateurs masses-ressorts. Alors que le groupe de l'an dernier s'était occupé de l'étude en 2D d'un tel système, notre travail a consisté à ajouter le paramètre du poids à cette étude en 2 dimensions. Le travail effectué lors de l'EC P2 en première année (mécanique du point) nous a permis de plus facilement appréhender le sujet qui nous a été confié, bien que celui-ci nous a demandé des connaissances supplémentaires et donc un travail de recherche et de calcul parallèles. La mise en équation de ce système avec des nombres de ressorts et de masses variables ainsi que la représentation graphique de la position de ces masses en fonction du temps nous ont demandé, tout comme au groupe précédent, d'utiliser des matrices, un logiciel de représentation graphique (Geogebra dans notre cas) ainsi que d'apprendre à utiliser le logiciel LaTeX.

L'avancement de notre projet s'est donc décomposé en différentes parties : Tout d'abord nous avons résolu les systèmes d'équations différentielles pour les différents cas (nombre de masses/ressorts différents) en intégrant le poids et son influence sur l'état du système, ce fut la partie la plus longue. Ensuite nous avons utilisé Geogebra pour représenter le mouvement des masses, ceci nous permettant de comparer nos résultats avec l'expérimentation faite 2 ans auparavant (d'un système en 1D et sans prendre le poids en considération). Enfin la dernière partie a constitué la rédaction de notre rapport en LateX, en reprenant la structure du code utilisé par le groupe de l'année 2016.

Partie 1

Méthodologie, organisation du travail

Afin de pouvoir accomplir le travail des différentes parties efficacement, nous nous sommes partagé les tâches durant les séances de projet. De plus il a fallu choisir un correspondant permettant la communication entre le professeur et le groupe. Ce rôle a été rempli par Gaël.

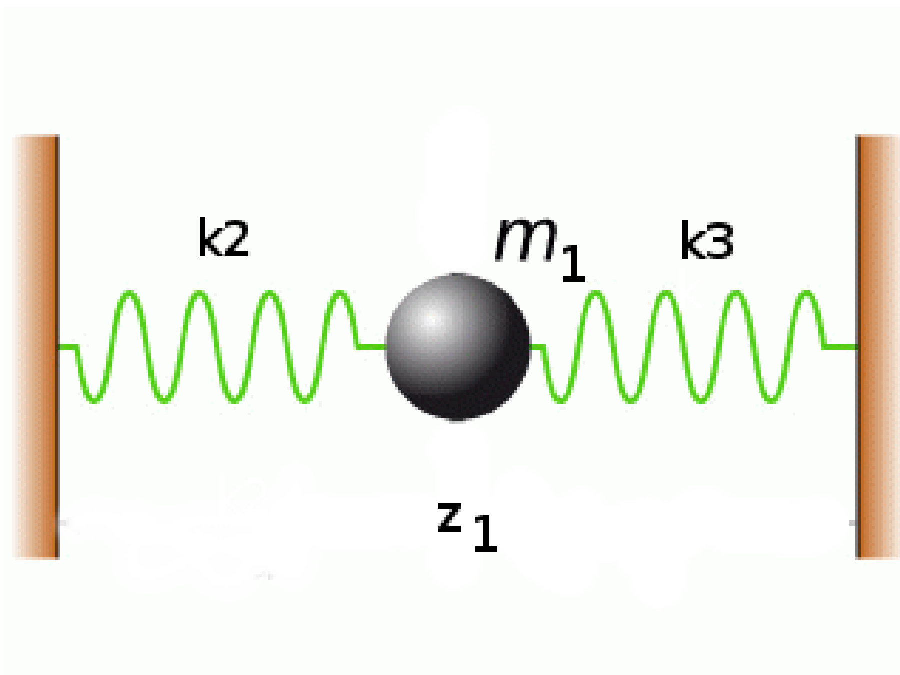
Notre organisation durant les heures de travail en classe était plutôt simple, Liu Yu s'est attelé davantage à la résolution du système à n masses, Gaël sur la partie à deux masses et Etienne sur la résolution du système à une masse dans R^2, ainsi que de la modélisation numérique avec l'aide de Gaël. Toutefois nous nous aidions mutuellement sur nos différentes parties très régulièrement, en fonction des compétences de chacun (maîtrise d'un logiciel de modélisation ou facilités pour les résolutions mathématiques...).

Une fois le projet bien avancé et la modélisation numérique réalisée, nous avons pu comparer et confronter nos résultats avec l'expérimentation faite quelques années plus tôt, en notifiant bien l'influence du poids sur les différences observées.

En dehors des heures dédiées en projets, l'utilisation d'une conservation messenger nous a permis de publier nos différents fichiers texte ou même le code LateX à utiliser pour la rédaction, ainsi que de nous distribuer les tâches. Quant à la rédaction du rapport, chacun a rédigé la partie qui lui avait été confié, Gaël et Etienne ont par ailleurs fourni un effort supplémentaire pour aider Liu Yu dans sa rédaction, du fait de la barrière de la langue toujours présente.

Partie 2

Système à une masse et 2 ressorts en bidimensionnel :



Résolution dans R² :

On pose

$$z_j = \begin{pmatrix} x_j \\ y_j \end{pmatrix}$$

Soient k2 et k3 les constantes de raideur des 2 ressorts. Soit z1 vecteur position lié à la masse 1, z2 vecteur position de la masse fixe de gauche et z3 vecteur position de la masse fixe de droite. Selon le Principe fondamental de la dynamique, on a :

$$m_1\ddot{z}_1 = k_3(z_3 - z_1) + k_2(z_2 - z_1) - m_1 g$$

On prend $k_2 = k_3$;

$$m_1\ddot{z}_1 = -2.k.z_1 + k(z_3 + z_2) + m_1 g \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Avec :

$$(z_3 + z_2) = 0$$

Donc :

$$m_1\ddot{z}_1 = -2.k.z_1$$

On obtient donc l'équation différentielle de scalaires :

$$(E) : \ddot{\theta} + \frac{2k}{m} = 0$$

$$\ddot{z}_1 + \omega^2 z_1 = 0$$

Donc :

$$\omega = \sqrt{\frac{2k}{m}}$$

La solution est donc de la forme :

$$z_1(t) = C_1 \cos(wt) + C_2 \sin(wt); \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}^2$$

Conditions initiales :

$$z_1(0) = \begin{pmatrix} x_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} \qquad ; \qquad \dot{z}_1(0) = \begin{pmatrix} \dot{x}_1(0) \\ \dot{y}_1(0 \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

$$\underline{z_1}(0) = C_1 = \begin{pmatrix} \underline{x_1}(0) \\ \underline{y_1}(0) \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

$$\underline{\dot{z}_1}(t) = -C_1\omega \sin(\omega t) + C_2\omega \cos(\omega t)$$

Donc :

$$\underline{\dot{z}_1}(0) = C_2\omega$$

On en déduit ainsi C_2 :

$$C_2 = \frac{\dot{z}_1(0)}{\omega} = \frac{1}{\omega}\begin{pmatrix} \underline{\dot{x}_1}(0) \\ \underline{\dot{y}_1}(0) \end{pmatrix}$$

$$\underline{z_1}(t) = \cos(\omega t)\begin{pmatrix} \underline{x_1}(0) \\ \underline{y_1}(0) \end{pmatrix} + \frac{\sin(\omega t)}{\omega}\begin{pmatrix} \underline{\dot{x}_1}(0) \\ \underline{\dot{y}_1}(0) \end{pmatrix}$$

On en déduit donc l'expression de $z_1(t)$:

$$z_1(t) = cos(\omega t)\begin{pmatrix} x_1(0) \\ y_1(0) \end{pmatrix} + \frac{\sin(\omega t)}{\omega}\begin{pmatrix} \dot{x_1}(0) \\ \dot{y_1}(0) \end{pmatrix} + z_{eq}$$

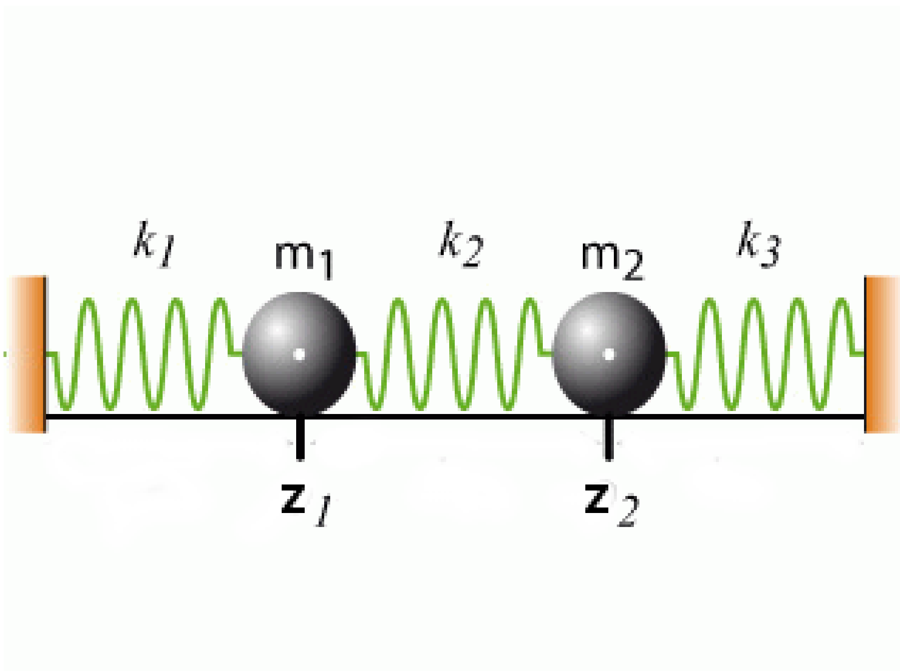
D'où l'équation finale du mouvement :

$$\boxed{z_1(t) = \cos(wt)\begin{pmatrix} x_1(0) \\ y_1(0) \end{pmatrix} + \frac{\sin(\omega t)}{\omega}\begin{pmatrix} \dot{x_1}(0) \\ \dot{y_1}(0 \end{pmatrix} + \frac{m_1 g}{2k}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}}$$

La trajectoire est donc une Ellipse.

Partie 3

Système à deux masses et trois ressorts



Mise en équation du système

Les constantes de raideur des ressorts sont toutes égales et sont notées k . Les masses sont toutes égales et sont notées m. On note z_1 la position de la première masse, et z_2 celle de la deuxième. Les accroches des ressorts au murs sont notées z_3 et z_4 et sont immobiles.
De plus,on utilise les valeurs du projet de 2013 qui a effectué les expérimentations, pour pouvoir ensuite comparer notre étude théorique à leurs manipulations.

On a donc :

$$z_j = \begin{pmatrix} x_j \\ y_j \end{pmatrix}$$

avec j qui varie de 1 à 2

On applique le principe fondamental de la dynamique au système :

$$m_1.\ddot{z}_1 = k(z_4 - z_1) + k(z_2 - z_1) - mg$$
$$m_2.\ddot{z}_2 = k(z_1 - z_2) + k(z_3 - z_2) - mg$$

On passe dans le plan complexe :

$$w_j = x_j + iy_j$$

On réécrit sous forme matricielle :
On pose $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} m.\ddot{w}_1 \\ m.\ddot{w}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k-k & k \\ k & -k-k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} k.w_4 \\ k.w_3 \end{pmatrix} .mg \begin{pmatrix} i \\ i \end{pmatrix} \tag{3.1}$$

Ce qui donne donc :

$$m. \begin{pmatrix} \ddot{w}_1 \\ \ddot{w}_2 \end{pmatrix} = -k. \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} + k. \begin{pmatrix} w_4 \\ w_3 \end{pmatrix} - mg \begin{pmatrix} i \\ i \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

On pose :

$$K = k. \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \tag{3.3}$$

Donc on ré-écrit l'équation précédente :

$$m. \begin{pmatrix} \ddot{w}_1 \\ \ddot{w}_2 \end{pmatrix} = -K. \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} + k. \begin{pmatrix} w_4 \\ w_3 \end{pmatrix} - mg \begin{pmatrix} i \\ i \end{pmatrix} \tag{3.4}$$

L'origine est posée à l'équilibre, on note alors

$$\underline{w} = w - w_{eq}$$

On a $m \begin{pmatrix} \ddot{w}_1 \\ \ddot{w}_2 \end{pmatrix} = 0$ à l'équilibre .

On cherche ensuite à déterminer la position d'équilibre W_{eq} :
On a :

$$Kw_{eq} = k \begin{pmatrix} w_4 \\ w_3 \end{pmatrix} - mg \begin{pmatrix} i \\ i \end{pmatrix}$$

$$w_{eq} = K^{-1}[k \begin{pmatrix} w_4 \\ w_3 \end{pmatrix} - mg \begin{pmatrix} i \\ i \end{pmatrix}] = \begin{pmatrix} w_{eq1} \\ w_{eq2} \end{pmatrix}$$

Avec K^{-1} qui vaut $\frac{1}{3k} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$
On a donc

$$w_{eq} = \frac{1}{3k}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}[k\begin{pmatrix}w_4\\ w_3\end{pmatrix} - mg\begin{pmatrix}i\\ i\end{pmatrix}] = \begin{pmatrix}w_{eq1}\\ w_{eq2}\end{pmatrix}$$

Pour une position quelconque on a :

$$m\begin{pmatrix}\underline{\ddot{w_1}} + \ddot{w_{1eq}}\\ \underline{\ddot{w_2}} + \ddot{w_{2eq}}\end{pmatrix} = -K\begin{pmatrix}\underline{w_1} + w_{1eq}\\ \underline{w_2} + w_{2eq}\end{pmatrix} + k\begin{pmatrix}w_4\\ w_3\end{pmatrix} - mg\begin{pmatrix}i\\ i\end{pmatrix}$$

Comme

$$Kw_{eq} = k\begin{pmatrix}w_4\\ w_3\end{pmatrix} - mg\begin{pmatrix}i\\ i\end{pmatrix}$$

On a enfin

$$m\begin{pmatrix}\underline{\ddot{w_1}}\\ \underline{\ddot{w_2}}\end{pmatrix} = -K.\begin{pmatrix}\underline{w_1}\\ \underline{w_2}\end{pmatrix}$$

$$\underline{\ddot{w}} = \frac{-k}{m}\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}\underline{w} = M\underline{w}$$

Résolution :

Calcul des valeurs propres de la matrice $\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$

Le polynôme caractéristique est

$$\begin{vmatrix}2-\lambda & -1\\ -1 & 2-\lambda\end{vmatrix} = [(2-\lambda)^2 - 1]$$

Pour $[(2-\lambda)^2 - 1] = 0$,on trouve $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 3$.

Matrice de passage :

On détaille le calcul pour $\lambda_2 = 3$:

$$\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3x\\ 3y\end{pmatrix} \tag{3.5}$$

On peut donc écrire le système d'équation :

$$\begin{cases}2x - y = 3x\\ -x + 2y = 3y\end{cases} \iff \begin{cases}x = -y\\ -y = x\end{cases}$$

On obtient un vecteur propre : $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

De la même manière, pour $\lambda_1 = 1$ on trouve un vecteur propre $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

La matrice de passage P est donc égale à : $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

et la matrice diagonale est égale à : $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

<u>Matrice M' :</u>

On sait que $M' = P^{-1}MP$

avec l'inverse de la matrice P qui vaut $P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

On trouve alors M' :

$$M' = \frac{-k}{m}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.6}$$

On reprend le système précédent en remplaçant M par M' pour changer de base :

$$\begin{pmatrix} \ddot{u}_1(t) \\ \ddot{u}_2(t) \end{pmatrix} = M'.\begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} \tag{3.7}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} \ddot{u}_1(t) \\ \ddot{u}_2(t) \end{pmatrix} = \frac{-k}{m}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} \tag{3.8}$$

On pose la constante C qui vaut : $C = \frac{k}{m}$

On a alors les équations différentielles de second ordre avec second membre suivantes :

$$\begin{cases} \ddot{u}_1(t) = -3Cu_1(t) \\ \ddot{u}_2(t) = -Cu_2(t) \end{cases}$$

En résolvant les équations on obtient :
Pour $\ddot{u}_1(t) = -3Cu_1(t)$ Et on pose $w_1 = \sqrt{3C}$
systeme réel masse 2 ressorts

$$u_1(t) = C_1\cos(w_1 t) + C_1'\sin(w_1 t)$$

Pour $\ddot{u}_2(t) = -Cu_2(t)$ Et on pose $w_2 = \sqrt{C}$

$$u_2(t) = C_2\cos(w_2 t) + \mathbb{C}_2'\sin(w_2 t)$$

Avec C_1 , C_1' , C_2 , C_2' des constantes dépendants des conditions d'expérimentation (raideur des ressorts, poids des masses)
On ré-utilise maintenant la matrice de passage pour repasser dans la base initiale, et on a donc la relation suivante :
$Pu = \underline{w}$
avec :

$$u = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\cos(\sqrt{3C}t) + \mu\sin(-\sqrt{3C}t) \\ \lambda'\cos(\sqrt{C}t) + \mu'\sin(-\sqrt{C}t) \end{pmatrix} \tag{3.9}$$

$$\underline{w} = \begin{pmatrix} w_1(t) \\ w_2(t) \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

On a alors $\underline{w}$ qui vaut :

$$\underline{w} = \begin{pmatrix} C_1\cos(w_1t) + C_1'\sin(w_1t) + C_2\cos(w_2t) + C_2'\sin(w_2t) \\ -C_1\cos(w_1t) - C_1'\sin(w_1t) + C_2\cos(w_2t) + C_2'\sin(w_2t) \end{pmatrix}$$

Pour trouver les constantes, on utilise les conditions initiales car on sait qu'à $t = 0$ on a :

$\underline{w_1}(0) = \underline{x_1}(0) + i\underline{y_1}(0)$ $\qquad \underline{\dot{w}_1}(0) = \dot{x}_1(0) + i\dot{y}_1(0)$
$\underline{w_2}(0) = \underline{x_2}(0) + i\underline{y_2}(0)$ $\qquad \underline{\dot{w}_2}(0) = \dot{x}_2(0) + i\dot{y}_2(0)$

On dérive $\underline{w}$:

$$\underline{\dot{w}} = \begin{pmatrix} -C_1\sin(w_1t) + C_1'w_1\cos(w_1t) - C_2w_2\sin(w_2t) + C_2'w_2\cos(w_2t) \\ C_1\sin(w_1t) - C_1'w_1\cos(w_1t) - C_2w_2\sin(w_2t) + C_2'w_2\cos(w_2t) \end{pmatrix}$$

Donc :

$$\begin{cases} \underline{w}_1(0) = \underline{x_1}(0) + i\underline{y_1}(0) = C_1 + C_2 \\ \underline{\dot{w}}_1(0) = \underline{\ddot{x}_1}(0) + i\underline{\ddot{y}_1}(0) = C_1'w_1 + C_2'w_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \underline{w}_2(0) = \underline{x_2}(0) + i\underline{y_2}(0) = -C_1 + C_2 \\ \underline{\dot{w}}_2(0) = \underline{\ddot{x}_2}(0) + i\underline{\ddot{y}_2}(0) = -C_1'w_1 + C_2'w_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = \underline{w_1}(0) \\ -C_1 + C_2 = \underline{w_2}(0) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2C_2 = \underline{w_1}(0) + \underline{w_2}(0) \\ 2C_1 = \underline{w_1}(0) - \underline{w_2}(0) \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1' w_1 + C_2' w_2 = \underline{\dot{w}_1}(0) \\ -C_1' w_1 + C_2' w_2 = \underline{\dot{w}_2}(0) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2C_2' w_2 = \underline{\dot{w}_1}(0) + \underline{\dot{w}_2}(0) \\ 2C1' w_1 = \underline{\dot{w}_1}(0) - \underline{\dot{w}_2}(0) \end{cases}$$

On a alors $\underline{w_1}(t)$ qui vaut :

$$\underline{w_1}(t) =$$

$$(\frac{\underline{w_1}(0) - \underline{w_2}(0)}{2}) \cos(w_1 t) + (\frac{\underline{\dot{w}_1}(0) - \underline{\dot{w}_2}(0)}{2}) \sin(w_1 t) + (\frac{\underline{w_1}(0) + \underline{w_2}(0)}{2}) \cos(w_2 t) + (\frac{\underline{\dot{w}_1}(0) + \underline{\dot{w}_2}(0)}{2}) \sin(w_2 t) \tag{3.10}$$

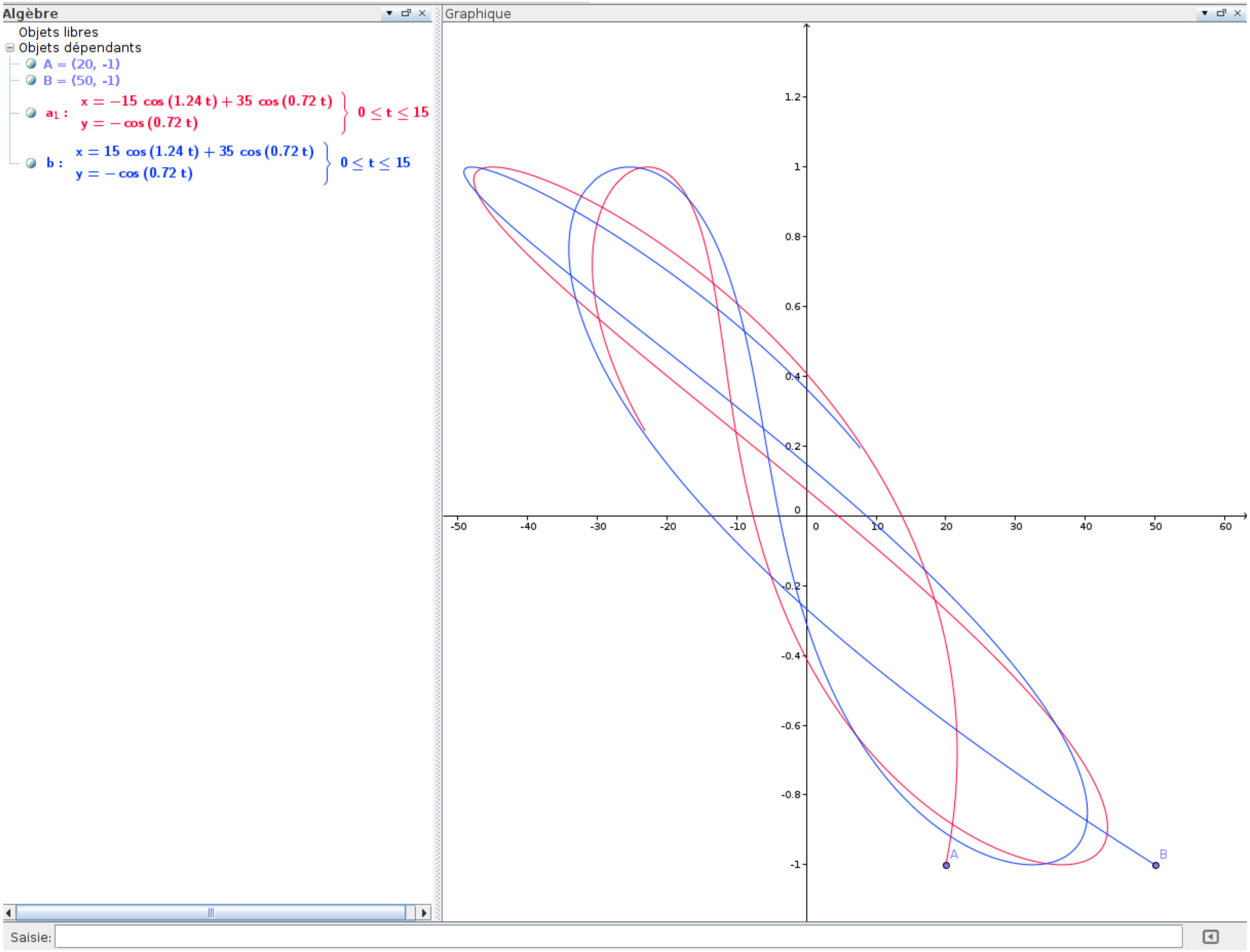
De la même manière on a $\underline{w_2}(t)$ qui vaut :

$$\underline{w_2}(t) =$$

$$-(\frac{\underline{w_1}(0) - \underline{w_2}(0)}{2}) \cos(w_1 t) - (\frac{\underline{\dot{w}_1}(0) - \underline{\dot{w}_2}(0)}{2}) \sin(w_1 t) + (\frac{\underline{w_1}(0) + \underline{w_2}(0)}{2}) \cos(w_2 t) + (\frac{\underline{\dot{w}_1}(0) + \underline{\dot{w}_2}(0)}{2}) \sin(w_2 t) \tag{3.11}$$

On peut donc représenter le mouvement des deux masses en fonction du temps grâce à un logiciel comme Géogébra, qui nous permet d'entrer le système d'équations et d'en tracer le graphe.

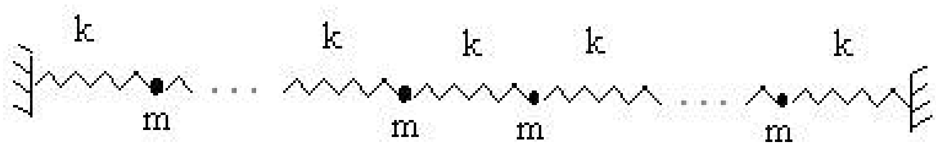
La simulation a été faite avec les constantes de raideur et les masses de 2013, c'est à dire k = 19 N/m et m=37g, et on a la courbe suivante :


Algèbre
Objets libres
Objets dépendants
A = (20, -1)
B = (50, -1)
a1 : x = −15 cos (1.24 t) + 35 cos (0.72 t)
y = − cos (0.72 t)
0 ≤ t ≤ 15
b : x = 15 cos (1.24 t) + 35 cos (0.72 t)
y = − cos (0.72 t)
0 ≤ t ≤ 15
Graphique
A
B
Saisie:

Partie 4

Système à N masses et N+1 ressorts :

Mise en équation du système



Toutes les constantes de raideurs sont égales,et les masses sont aussi égales, on note k les constantes de raideurs, et m les masses.

On commence par un bilan des forces sur toutes les masses :

$$m_1.\ddot{z_1} = k_{1,n+2}(z_{n+2} - z_1) + k_{1,2}(z_2 - z_1) - mg.\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$m_2.\ddot{z_2} = k_{1,2}(z_1 - z_2) + k_{2,3}(z_3 - z_2) - mg.\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\vdots$$

$$m_n.\ddot{z_n} = k_{n-1,n}(z_{n-1} - z_n) + k_{n,n+1}(z_{n+1} - z_n) - mg.\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

On a donc la matrice :

$$m\begin{pmatrix}\ddot{w}_1\\ \ddot{w}_2\\ \vdots\\ \ddot{w}_n\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}-k_{1,n+2}-k_{1,2} & -k_{1,2} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0\\ k_{1,2} & -k_{1,2}-k_{2,3} & k_{2,3} & 0 & \cdots & \cdots & 0\\ 0 & k_{2,3} & -k_{1,2}-k_{3,4} & k_{3,4} & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & & & & & & \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & k_{n-1,n} & -k_{n-1,n}-k_{n,n+1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}w_1\\ w_2\\ \vdots\\ w_n\end{pmatrix}-mg\begin{pmatrix}i\\ \vdots\\ i\end{pmatrix}$$

Comme toutes les constantes de raideurs sont égales, on sort les k de la matrice, on a donc :

$$m\begin{pmatrix}\ddot{w}_1\\ \ddot{w}_2\\ \vdots\\ \ddot{w}_n\end{pmatrix}=-k\begin{pmatrix}2 & -1 & 0 & \cdots & 0\\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots\\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1\\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}w_1\\ w_2\\ \vdots\\ w_n\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}w_{n+2}\\ 0\\ \vdots\\ 0\\ w_{n+1}\end{pmatrix}-mg\begin{pmatrix}i\\ \vdots\\ i\end{pmatrix}$$

On note K la matrice $-k\begin{pmatrix}2 & -1 & 0 & \cdots & 0\\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots\\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1\\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2\end{pmatrix}$

Donc on ré-écrit l'équation précédente :

$$m\begin{pmatrix}\ddot{w}_1\\ \ddot{w}_2\\ \vdots\\ \ddot{w}_n\end{pmatrix}=-K.\begin{pmatrix}w_1\\ w_2\\ \vdots\\ w_n\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}w_{n+2}\\ 0\\ \vdots\\ 0\\ w_{n+1}\end{pmatrix}-mg\begin{pmatrix}i\\ \vdots\\ i\end{pmatrix}$$

L'origine est posée à l'équilibre, on note alors

$$\underline{w}=w-w_{eq}$$

On a $m\begin{pmatrix}\ddot{w}_1\\ \ddot{w}_2\\ \vdots\\ \ddot{w}_n\end{pmatrix}=0$ à l'équilibre .

On cherche ensuite à déterminer la position d'équilibre W_{eq} :
On a :

$$KW_{eq} = k \begin{pmatrix} w_{n+2} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ w_{n+1} \end{pmatrix} - mg \begin{pmatrix} i \\ \vdots \\ i \end{pmatrix}$$

$$W_{eq} = K^{-1}[k \begin{pmatrix} w_{n+2} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ w_{n+1} \end{pmatrix} - mg \begin{pmatrix} i \\ \vdots \\ i \end{pmatrix}] = \begin{pmatrix} W_{eq1} \\ W_{eq2} \\ \vdots \\ W_{eqn} \end{pmatrix}$$

Avec K^{-1} qui vaut
Pour une position quelconque on a :

$$m \begin{pmatrix} \ddot{w}_1 + \ddot{w_{1eq}} \\ \ddot{w}_2 + \ddot{w_{2eq}} \\ \vdots \\ \ddot{w}_n + \ddot{w_{neq}} \end{pmatrix} = -K \begin{pmatrix} \underline{w_1} + w_{1eq} \\ \underline{w_2} + w_{2eq} \\ \vdots \\ \underline{w_n} + w_{neq} \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} - mg \begin{pmatrix} i \\ \vdots \\ i \end{pmatrix}$$

Comme

$$K_{w_{eq}} = k \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} - mg \begin{pmatrix} i \\ \vdots \\ i \end{pmatrix}$$

On a enfin

$$\underline{\ddot{w}} = \frac{-k}{m} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \underline{w}$$

Résolution :

Pour déterminer les valeurs propres nous utilisons le travail du groupe de 2015 (de la page 15 à 19) :

$$\boxed{\lambda_k = t_{i,i} - 2\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right),\ k \in [\![1\,;n]\!]} \tag{4.1}$$

Grâce aux valeurs propres et au travail effectué par le groupe de 2015 (de la page 20 à 23) on a pu utiliser la formule suivante pour trouver la composante en Y de la position des masses :

$$\boxed{y_i(t) = A_i \cos\left(\sqrt{\frac{4k}{m}\sin^2\left(\frac{i\pi}{2(n+1)}\right)}t\right) + B_i \sin\left(\sqrt{\frac{4k}{m}\sin^2\left(\frac{i\pi}{2(n+1)}\right)}t\right)} \tag{4.2}$$

A et B sont deux constantes que l'on va calculer par la suite.

Pour trouver la composante en X de la position des masses on utilise la formule suivante :

$$x_i(t) = \sqrt{\frac{2}{n+1}}\sum_{q=1}^{n}\left(\sin\left(\frac{iq\pi}{n+1}\right)\times y_q\right)$$

Pour calculer les constantes A et B nous utilisons la page 24 du rapport de 2015 que nous mettons en annexe, on a donc les formules suivantes pour A et B :

On a donc A_q qui vaut :

$$\boxed{\forall q \in [\![1\,;n]\!], A_q = \sum_{s=1}^{n}\left(\sqrt{\frac{2}{n+1}}\sin\left(\frac{qs\pi}{n+1}\right)x_{s,0}\right)} \tag{4.3}$$

Et on a B_q qui vaut :

$$B_q = 0$$

On a donc les équations du mouvement suivantes :

Pour $X_i(t)$ on a :

$$\boxed{x_i(t) = \frac{2}{n+1}\sum_{q=1}^{n}\left[\sin\left(\frac{iq\pi}{n+1}\right)\cos\left(\sqrt{\frac{4k}{m}\sin^2\left(\frac{q\pi}{2(n+1)}\right)}t\right)\sum_{s=1}^{n}\left[\sin\left(\frac{qs\pi}{n+1}\right)x_{s,0}\right]\right]} \tag{4.4}$$

Et pour $Y_i(t)$ on a :

$$\boxed{y_i(t) = \sqrt{\frac{2}{n+1}}.\cos\left(\sqrt{\frac{4k}{m}\sin^2\left(\frac{i\pi}{2(n+1)}\right)}t\right)\sum_{s=1}^{n}\left[\sin\left(\frac{is\pi}{n+1}\right)x_{s,0}\right]} \tag{4.5}$$

Partie 5

Conclusion

Ce projet s'est avéré très intéressant dans la mesure où il a constitué une approche concrète du métier d'un ingénieur. En effet en tant que futurs ingénieurs, nous allons devoir mener à bien divers projets, ce qui nécessite organisation, respect des délais et surtout travail en équipe. Afin de travailler efficacement nous nous sommes donc concertés pour distribuer les différentes parties à traiter de notre projet.
De plus, ce projet nous a permis d'appliquer concrètement des notions et connaissances vues et acquises lors de notre parcours STPI. Les modules P2 pour l'outil physique et M4 pour l'outil mathématique nous ont en effet aidé à avancer dans ce projet. Également, ce travail nécessitant une rigueur et une attention particulières de par sa longueur et de son raisonnement, nous avons dû choisir et nous mettre d'accord sur les notations à utiliser entre autres, afin d'avoir un compte-rendu lisible et cohérent. Par le biais de ce projet, nous avons aussi eu l'opportunité d'apprendre à utiliser de nouveaux logiciels, ainsi nous avons été amenés à utiliser Géogebra pour la modélisation de nos équations, et l'éditeur de texte LateX pour la rédaction de notre compte-rendu.
Ainsi, ce projet fut un très bon moyen d'utiliser à la fois des connaissances scientifiques vues lors de notre parcours à l'INSA, mais aussi de mettre à l'épreuve une fois encore nos compétences humaines sur le travail en équipe et toute l'organisation qui découle d'un tel projet, autant de compétences nécessaires pour un ingénieur efficace.

Partie 6

Bibliographie

Documents internet

Documentation mathématique et physique

— **Exercice 1 masse 2 ressorts, avec correction.** http://lpsc.in2p3.fr/schien/teaching/Mec201_1617/TD3_Oscillations_corrige_PHY12ab_2014.pdf

— **Animation système 1 masse 1 ressort.** http://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve_tulloue/Meca/Oscillateurs/oscillateur_horizontal.php

— **Cours équations différentielles ressorts** http://gerald.philippe.free.fr/files/2012/Ressorts%20et%20equations%20differentielles.pdf

Logiciels

— Editeur Latex **Texmaker** http://www.xm1math.net/texmaker/index_fr.html

— Modéliseur numérique **Géogebra** https://www.geogebra.org/?lang=fr

Partie 7

Annexe

Calculs détaillés 2015

3.2 Résolution

Comment trouver les valeurs propres d'une matrice tridiagonale réelle symétrique

Soit T $= \dfrac{k}{m}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & -1 & 2 & -1 & 0 \\ \vdots & & \ddots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ (T$\in M_{n,n}(\mathbb{R})$).

La matrice T est *symétrique réelle*, ses valeurs propres sont donc réelles et simples (donc n valeurs propres distinctes).

De plus, si on note $r_i = \sum_{j=1, i\neq j}^{n} |t_{i,j}|$, avec $i \in [\![1;n]\!]$, on a finalement, pour $i=1$ et $i=n$:

$$r_1 = r_n = |-1| + |0| + |0| + ... = 1 \tag{3.3}$$

Par ailleurs, pour $i \neq 1$ et $i \neq n$ ($i \in [\![2; n-1]\!]$) :

$$r_i = |0| + ... + |0| + |-1| + |-1| + |0| + |0| + ... = 2 \tag{3.4}$$

Théorème 1 *Toute valeur propre de T appartient à la réunion de boules fermées de centre t_{ii} et de rayon r_i.*

On déduit de cette propriété que, si λ valeur propre de T, $|\lambda - t_{ii}| \leq r_i$ ($r_i = 2$, $i \neq 1$, $i \neq n$). Cela correspond à la définition d'une boule dans $\mathbb{R}$, de centre t_{ii} et de rayon r_i.

15

Comme $\lambda \in \mathbb{R}$ (matrice de Hessenberg), il existe $\theta \in [0;\pi]$ *unique* tel que :

$$\lambda = t_{ii} - 2\cos(\theta) \text{ , avec } \lambda \geq 0$$

Dans notre cas, on a ainsi $t_{ii} = 2$. Or, par définition d'une valeur propre, on a :

$$TX = (t_{ii} - 2\cos(\theta))X$$

Soit, sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & -1 & 2 & -1 & 0 \\ \vdots & & \ddots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (2 - 2\cos(\theta)) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\iff \underbrace{\begin{pmatrix} 2\cos(\theta) & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & 2\cos(\theta) & -1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & -1 & 2\cos(\theta) & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & -1 & 2\cos(\theta) & -1 & 0 \\ \vdots & & \ddots & -1 & 2\cos(\theta) & -1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 & 2\cos(\theta) \end{pmatrix}}_{T_{2\cos(\theta)}} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0$$

Il suffit donc de déterminer les valeurs de $\theta \in [0;2\pi]$ pour lesquelles $T_{2\cos(\theta)}$ n'est pas inversible, ou encore lorsque $\det(T_{2\cos(\theta)}) = 0$.

Propriété 1 *Le déterminant d'une matrice tridiagonale A est donné par :*

$$\det A^{(n)} = a_{n,n} \det A^{(n-1)} - a_{n-1,n}a_{n,n-1} \det A^{(n-2)}$$

Dans notre cas, on pose :

$$\Delta_n = \det(T_{2\cos(\theta)}) = 2cos(\theta) \times \Delta_{n-1} - \Delta_{n-2} \qquad (n \geq 2)$$

Ainsi, on obtient :

$$\begin{cases} \Delta_0 = 1 \\ \Delta_1 = 2\cos(\theta) \end{cases}$$

On reconnait dans la formule une "suite" de déterminant récurrente d'ordre 2. On utilise donc les méthodes propres à ces suites pour obtenir le déterminant en fonction de n uniquement. Dans un premier temps, nous allons donc ainsi chercher le polynôme caractéristique de cette équation, puis déterminer ses racines.

Soit le polynôme caractéristique suivant :

$$r^2 = 2\cos(\theta)r - 1$$

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2 - 4ac \\ &= 4\cos^2(\theta) - 4 \\ &= 4[\cos^2(\theta) - 1] \\ &= -4\sin^2(\theta) \\ &= [2i\sin(\theta)]^2\end{aligned} \tag{3.5}$$

Les solutions sont :

$$\begin{aligned}r_1 &= \frac{-2\cos(\theta) - 2i\sin(\theta)}{2} \\ &= e^{i\theta} \\ r_2 &= \frac{-2\cos(\theta) + 2i\sin(\theta)}{2} \\ &= e^{-i\theta}\end{aligned} \tag{3.6}$$

Cas 1

$$\forall\theta \in]0\,;\pi[, \Delta_n = \alpha e^{in\theta} + \beta e^{-in\theta} \tag{3.7}$$

Déterminons α et β

$$\begin{cases} \beta = 1 - \alpha \quad \text{car } \Delta_0{=}1 \\ \alpha e^{i\theta} + (1-\alpha)e^{-i\theta} = 2\cos(\theta) \end{cases}$$

$$\begin{aligned}&\iff \alpha\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right) = 2\cos(\theta) - e^{-i\theta} \\ &\iff \alpha = \frac{2\cos(\theta) - e^{-i\theta}}{e^{i\theta} - e^{-i\theta}} \\ &\iff \alpha = \frac{2i\left(2\cos(\theta) - e^{-i\theta}\right)}{2i\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right)} \\ &\iff \alpha = \frac{2\cos(\theta) - e^{-i\theta}}{2i\sin(\theta)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\iff \alpha = \frac{2\cos(\theta) - (\cos(-\theta) + i\sin(-\theta))}{2i\sin(\theta)} \\ &\iff \alpha = \frac{\cos(\theta) + i\sin(\theta)}{2i\sin(\theta)} \\ &\iff \alpha = \frac{e^{i\theta}}{2i\sin(\theta)}\end{aligned}$$

$$\beta = 1 - \alpha$$
$$\beta = \frac{2i\sin(\theta) - e^{i\theta}}{2i\sin(\theta)}$$

$$\beta = \frac{-\cos(\theta) + i\sin(\theta)}{2i\sin(\theta)}$$
$$\beta = -\frac{e^{-i\theta}}{2i\sin(\theta)}$$

d'où

$$\begin{aligned}\Delta &= \frac{e^{i\theta}}{2i\sin\theta}e^{in\theta} - \frac{e^{-i\theta}}{2i\sin\theta}e^{-in\theta}\\ &= \frac{e^{i(n+1)\theta} - e^{-i(n+1)\theta}}{2i\sin\theta}\end{aligned}$$

d'où

$$\boxed{\Delta_n = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)}} \tag{3.8}$$

Cas 2 : $\theta = 0$

Pour $\theta = 0$ (donc $\cos\theta = 1$), le polynôme caractéristique devient :

$$r^2 - 2r + 1 = 0$$

Soit :

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2 - 4ac\\ &= 4 - 4\\ &= 0\end{aligned} \tag{3.9}$$

La racine du polynôme est donc $r_0 = \frac{2}{2} = 1$. Soit finalement :

$$\boxed{\Delta_n = (\alpha + n\beta) \times r_o^n = \alpha + n\beta} \tag{3.10}$$

Déterminons α et β

$$\begin{cases}\Delta_0 = 1\\ \Delta_1 = 2\cos(\theta)\end{cases}$$

Par identification :

$$\begin{cases}\alpha = 1\\ \alpha + \beta = 2\cos(\theta)\end{cases}$$

Or, dans notre cas, $\theta = 0$, donc :

$$\alpha + \beta = 2\cos(\theta) \iff \alpha + \beta = 2 \iff \beta = 1$$

D'où

$$\boxed{\text{Si} \quad \theta = 0, \ \Delta_n = (1 + n)} \tag{3.11}$$

Or $\forall n \in \mathbb{N},\ \Delta_n > 0$ d'où 0 n'est pas solution de l'équation $\Delta = 0$

Cas 3 : $\theta = \pi$

Pour $\theta = \pi$ (donc $\cos\theta = -1$), le polynôme caractéristique devient :

$$r^2 + 2r + 1 = 0$$

Soit :

$$\begin{aligned} \Delta &= b^2 - 4ac \\ &= 4 - 4 \\ &= 0 \end{aligned} \tag{3.12}$$

La solution du polynôme est donc $r_0 = -\frac{2}{2} = -1$. Soit finalement :

$$\boxed{\Delta_n = (\alpha + n\beta) \times (-1)^n} \tag{3.13}$$

Déterminons α et β

$$\begin{cases} \Delta_0 = 1 \\ \Delta_1 = 2\cos(\theta) \end{cases}$$

Par identification :

$$\begin{cases} \alpha = 1 \\ \alpha - \beta = -2 \end{cases}$$

Or, dans notre cas, $\theta = \pi$, donc $\beta = -3$
D'où

$$\boxed{\text{Si }\ \theta = \pi,\ \Delta_n = (1 - 3n) \times (-1)^n} \tag{3.14}$$

Or $\Delta_n = 0 \iff (1 - 3n) \times (-1)^n = 0 \iff n = \frac{1}{3}$ Or $n \in \mathbb{N}$ d'où l'équation n'a pas de solution si $\theta = \pi$

Ainsi $\Delta_n = 0 \iff \theta \in]0;\pi[$ et $\sin((n+1)\theta) = 0$ d'où

$$\boxed{\theta_k = \frac{k\pi}{n+1}} \tag{3.15}$$

d'où les valeurs propres sont les nombres

$$\boxed{\lambda_k = t_{i,i} - 2\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right),\ k \in [\![1\,;n]\!]} \tag{3.16}$$

Détermination des vecteurs propres

Dans cette partie, on cherche à déterminer les vecteurs propres associés à une valeur propre. Toutes les valeurs propres sont racines simples du polynôme caractéristique (autrement dit, le cardinal des valeurs propres et égal au degré du polynôme caractéristique). On en conclut que chaque espace propre est de dimension 1.

Obtention des vecteurs propres

Posons $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ le vecteur propre de T pour la valeur propre

$$\lambda_k = t_{i,i} - 2\cos(\theta_k) \text{ où } \theta_k = \frac{k\pi}{n+1}$$

Par définition, il vérifie l'équation $TX = \lambda_k X$, c'est-à-dire $T_{2\cos(\theta_k)}X = 0$

Explicitons le calcul :

$$\begin{pmatrix} 2\cos(\theta) & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & 2\cos(\theta) & -1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & -1 & 2\cos(\theta) & -1 & \ddots & \vdots \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 & 2\cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2\cos(\theta_k))x_1 - x_2 \\ -x_1 + (2\cos(\theta_k))x_2 - x_3 \\ \vdots \\ -x_{i-1} + (2\cos(\theta_k))x_i - x_{i+1} \\ \vdots \\ -x_{n-1} + (2\cos(\theta_k))x_n \end{pmatrix} = 0 \tag{3.17}$$

On note Y la matrice résultant du produit de $T_{2\cos(\theta_k)}$ et X

Si $x_1 = 0$, il vient alors $x_2 = 0$ et, par récurrence, $\forall 1 \leqslant i \leqslant n, x_i = 0$, c'est-à-dire $X_k = 0$ ce qui est impossible car un vecteur propre ne peut pas être nul. Il vient donc $x_1 \neq 0$ et x_1 peut être choisi arbitrairement dans $\mathbb{R}^*$.

On pose donc $x_1 = sin(\theta_k)$

Le coefficient y_1 donne l'équation suivante

$$\begin{aligned} &(2\cos(\theta_k))x_1 - x_2 = 0 \\ &\iff x_2 = (2\cos(\theta_k))\sin(\theta_k) \\ &\iff x_2 = \sin(2\theta_k) \text{ d'après la formule de l'arc double} \end{aligned} \tag{3.18}$$

Pour x_3

$$\begin{aligned} &-x_1 + (2\cos(\theta_k))x_2 - x_3 = 0 \\ &\iff x_3 = x_1 - (2\cos(\theta_k))x_2 \\ &\iff x_3 = -\sin(\theta_k) + 2\cos(\theta_k)\sin(2\theta_k) \\ &\iff x_3 = \sin(3\theta_k) \end{aligned} \tag{3.19}$$

Propriété 2 *Formule de trigonométrie*

$$2\sin((i-1)\theta_k)\cos(\theta_k) - \sin((i-2)\theta_k) = \sin(i\theta_k)$$

20

d'où, en considérant l'équation donnée par la i^e composante de la matrice Y, il vient

$$\begin{aligned} & -x_{i-2} + (2\cos(\theta_k))x_{i-1} - x_i = 0 \\ \iff & x_i = x_{i-2} - (2\cos(\theta_k))x_{i-1} \\ \iff & x_i = \sin(i\theta_k) \end{aligned} \tag{3.20}$$

Le vecteur propre associé à la valeur propre λ_k s'écrit donc sous la forme

$$X_k = \begin{pmatrix} \sin(\theta_k) \\ \sin(2\theta_k) \\ \vdots \\ \sin(i\theta_k) \\ \vdots \\ \sin(n\theta_k) \end{pmatrix} \tag{3.21}$$

On rappelle que $\theta_k = \dfrac{k\pi}{n+1}$

orthonormalisation de la base des vecteurs propres

Théorème 2 (Théorème spectral) *Si T est une matrice symétrique de taille $n*n$ dans $\mathbb{R}^n$ munit du produit scalaire habituel. Elle peut s'écrire sous la forme $T = PDP^{-1}$ où D est une matrice diagonale dans la base des vecteurs propres et P la matrice de passage de la base canonique vers la base orthonormée des vecteurs propres. P est donc la matrice d'une isométrie, c'est-à-dire ${}^tPP = Id \iff P^{-1} = {}^tP$*

Enfin, dans notre cas particulier, en effectuant le calcul de ${}^tP$ on trouve P.

Ainsi, $P^{-1} = {}^tP = P$

Afin de simplifier les calculs, on va donc chercher à normer les vecteurs.

Soit V_k le vecteur normé. $V_k = \dfrac{X_k}{||X_k||}$ Or

$$\begin{aligned} \|X_k\|^2 &= X_k \cdot X_k \\ &= \sum_{j=1}^{n} \sin^2(j\theta_k) \\ &= \sum_{j=1}^{n}(1 - \cos^2(j\theta_k) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{j=0}^{n}(1 - \frac{\cos(2j\theta_k)+1}{2}) \\ &= \sum_{j=0}^{n}(1 - \frac{\cos(2j\theta_k)}{2} - \frac{1}{2}) \\ &= \sum_{j=0}^{n}\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n}\cos(2j\theta_k) \\ &= \sum_{j=0}^{n}\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n}\mathrm{Re}(e^{2ij\theta_k}) \end{aligned}$$

$$= \frac{n+1}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{Re}(\underbrace{\sum_{j=0}^{n} e^{2ij\theta_k}}_{=0})$$

$$= \frac{n+1}{2}$$

$$\text{d'où } \|X_k\| = \sqrt{\frac{n+1}{2}}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } \forall k \in [\![1\,;n]\!], V_k = \sqrt{\frac{2}{n+1}}X_k} \tag{3.22}$$

$$\boxed{\text{d'où } \forall (i,j) \in [\![1\,;n]\!]^2, p_{i,j} = \sqrt{\frac{2}{n+1}}\sin(\frac{ij\pi}{n+1})} \tag{3.23}$$

Explicitons les termes de la matrice de passage P.

$$P = \sqrt{\frac{2}{n+1}}\begin{pmatrix} \sin(\frac{\pi}{n+1}) & \sin(\frac{2\pi}{n+1}) & \dots & \dots & \dots & \sin(\frac{n\pi}{n+1}) \\ \sin(\frac{2\pi}{n+1}) & \sin(\frac{4\pi}{n+1}) & \dots & \dots & \dots & \sin(\frac{2n\pi}{n+1}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \sin(\frac{ij\pi}{n+1}) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \sin(\frac{(n-1)\pi}{n+1}) & \sin(\frac{2(n-1)\pi}{n+1}) & \dots & \dots & \dots & \sin(\frac{n(n-1)\pi}{n+1}) \\ \sin(\frac{n\pi}{n+1}) & \sin(\frac{2n\pi}{n+1}) & \dots & \dots & \dots & \sin(\frac{n^2\pi}{n+1}) \end{pmatrix} \tag{3.24}$$

On remarque bien que ${}^tP = P$

Ainsi, on peut exprimer la matrice diagonale D dans la base B des vecteurs propres, sans oublier la constante $\frac{k}{m}$ que l'on avait sorti de la matrice au début.

$$D = \begin{pmatrix} \frac{k}{m}(2-2\cos(\frac{\pi}{n+1})) & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & \dots & \vdots \\ \vdots & \frac{k}{m}(2-2\cos(\frac{i\pi}{n+1})) & & & \\ \vdots & & \ddots & 0 & \\ 0 & \dots & 0 & \frac{k}{m}(2-2\cos(\frac{n\pi}{n+1})) & \end{pmatrix} \tag{3.25}$$

Résolution

Dans la base des vecteurs propres

Notons $\ddot{Y} = \begin{pmatrix} \ddot{y}_1 \\ \vdots \\ \ddot{y}_i \\ \vdots \\ \ddot{y}_n \end{pmatrix}$ les dérivées secondes des fonctions de position des masses dans la base des vecteurs propres. On rappelle que X est le vecteur dont les composantes sont les fonctions de position des masses dans la base canonique.

Notre problème revient à résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} \ddot{Y} = DY \\ X = PY \text{ formule de changement de base} \end{cases} \tag{3.26}$$

En calculant la première équation du système, il vient un système de n équations différentielles de degré 2 *non liées*, c'est-à-dire solvables facilement.

$$\begin{cases} \ddot{y_1}(t) = \frac{k}{m}\left(2 - 2\cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right)\right) y1(t) \\ \vdots \\ \ddot{y_i}(t) = \frac{k}{m}\left(2 - 2\cos\left(\frac{i\pi}{n+1}\right)\right) yi(t) \\ \vdots \\ \ddot{y_n}(t) = \frac{k}{m}\left(2 - 2\cos\left(\frac{n\pi}{n+1}\right)\right) yn(t) \end{cases} \tag{3.27}$$

Résolvons l'équation $\ddot{y_i}(t) = \frac{k}{m}\left(2 - 2\cos\left(\frac{i\pi}{n+1}\right)\right) yi(t)$

On remarque que $\frac{k}{m}\left(2 - 2\cos\left(\frac{i\pi}{n+1}\right)\right) = \frac{4k}{m}\sin^2\left(\frac{i\pi}{2(n+1)}\right) = \frac{k}{m}\lambda_i$

On trouve ainsi

$$\boxed{y_i(t) = A_i \cos\left(\sqrt{\frac{4k}{m}\sin^2\left(\frac{i\pi}{2(n+1)}\right)}t\right) + B_i \sin\left(\sqrt{\frac{4k}{m}\sin^2\left(\frac{i\pi}{2(n+1)}\right)}t\right)} \tag{3.28}$$

c'est-à-dire

$$y_i(t) = A_i \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\lambda_i t\right) + B_i \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\lambda_i t\right)$$

Retour à la base canonique

D'après la formule de changement de base $X = PY$, il vient

$$\boxed{x_i(t) = \sum_{q=1}^{n} p_{i,q} y_p(t)} \tag{3.29}$$

x_i représente donc la position de la masse i par rapport à sa position de repos, et ce exprimé dans la base canonique. En effectuant le calcul, il vient :

$$\begin{aligned} x_i(t) &= \sum_{q=1}^{n}\left(\sqrt{\frac{2}{n+1}}\sin\left(\frac{iq\pi}{n+1}\right) \times \left(A_q\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\lambda_q t\right) + B_q \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\lambda_q t\right)\right)\right) \\ x_i(t) &= \sqrt{\frac{2}{n+1}}\sum_{q=1}^{n}\left(\sin\left(\frac{iq\pi}{n+1}\right) \times \left(A_q\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\lambda_q t\right) + B_q \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\lambda_q t\right)\right)\right) \end{aligned} \tag{3.30}$$

Déterminons les constantes

Cas des constantes A_q

Notons $X(0) = \begin{pmatrix} x_{1,0} \\ \vdots \\ x_{n,0} \end{pmatrix}$ le vecteur contenant les positions initiales des masses par rapport à leur position d'équilibre. On remarque de plus que $Y(0) = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix}$ (en effet, $\sin(0) = 0$ et $\cos(0) = 1$)

D'après la formule de changement de base, on a

$$Y(0) = P^{-1}X(0) \tag{3.31}$$

Or, d'après le théorème spectral, on sait que $P^{-1} = P$ d'où

$$\boxed{Y(0) = PX(0)} \tag{3.32}$$

d'où

$$A_q = \sum_{s=1}^{n} p_{q,s}x_{s,0}$$

$$\boxed{\forall q \in [\![1\,;n]\!], A_q = \sum_{s=1}^{n}\left(\sqrt{\frac{2}{n+1}}\sin\left(\frac{qs\pi}{n+1}\right)x_{s,0}\right)} \tag{3.33}$$

Cas des constantes B_q

On considère que les masses sont lâchées sans vitesse initiale, d'où $\forall q \in [\![1\,;n]\!], \dot{x}_{q,0} = 0$. Ce résultat noté sous forme matricielle devient $\dot{X}(0) = 0$. D'après la formule de changement de base, il vient donc

$$\dot{Y}(0) = 0 \tag{3.34}$$

d'où $\forall q \in [\![1\,;n]\!], y_q(0) = 0$.

Or, $\forall q \in [\![1\,;n]\!]$,

$$\dot{y}_q(t) = -A_q\sqrt{\lambda_q}\sin\left(\sqrt{\lambda_q}t\right) + B_q\sqrt{\lambda_q}\cos\left(\sqrt{\lambda_q}t\right) \tag{3.35}$$

d'où

$$\dot{y}_q(0) = B_q\sqrt{\lambda_q} = 0 \tag{3.36}$$

Or $\sqrt{\lambda_q} \neq 0$ d'où,

$$\boxed{\forall q \in [\![1\,;n]\!], B_q = 0} \tag{3.37}$$

Ainsi, en injectant les valeurs des constantes dans l'équation de $x_i(t)$, il vient :

$$x_i(t) = \sqrt{\frac{2}{n+1}}\sum_{q=1}^{n}\left[\sin\left(\frac{iq\pi}{n+1}\right)\left(\sum_{s=1}^{n}\left[\sqrt{\frac{2}{n+1}}\sin\left(\frac{qs\pi}{n+1}\right)x_{s,0}\right]\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}\lambda_q t}\right)\right)\right]$$