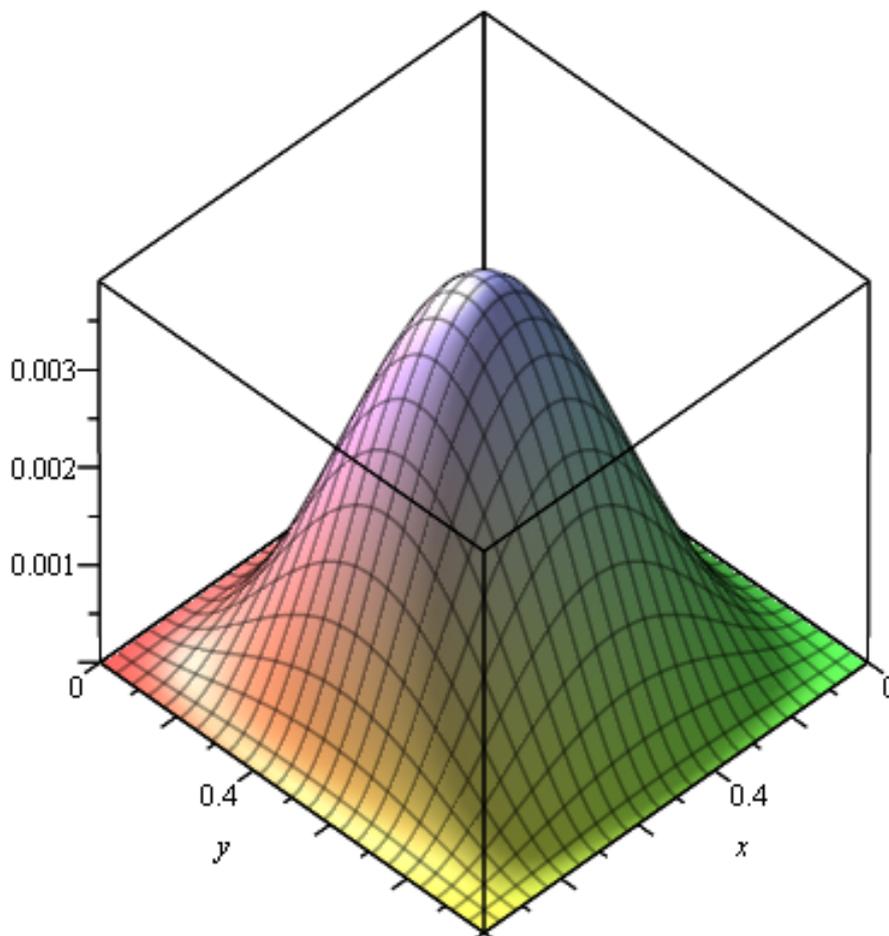


Déformation d'une membrane.



Etudiants :

Quentin GRENIER

Simon HELLOT

Pierre NALAIS

Sébastien ROCA

Enseignant-responsable du projet :

Bernard GLEYSE

Date de remise du rapport : **19/06/2017**

Référence du projet : **STPI/P6/2017 – 007**

Intitulé du projet : **Déformation d'une membrane.**

Type de projet : **Bibliographie, modélisation.**

Objectifs du projet :

L'objectif du projet est d'étudier la déformation d'une membrane à l'aide d'opérateurs mathématiques. Dans un premier temps nous avons étudié la déformation d'une membrane grâce au Laplacien, et ce, en fonction du temps. Dans un second temps, nous avons analysé et modélisé la déformation d'une membrane avec une combinaison linéaire du Laplacien et du Bilaplacien.

Mots-clefs du projet : **Membrane, Laplacien, modélisation, analyse.**

Table des matières

1	Introduction	5
2	Le laplacien.	6
2.1	Étude stationnaire pour le laplacien.	6
2.1.1	Analyse numérique.	6
2.2	Étude de la déformation en fonction du temps.	8
2.2.1	Etude analytique.	8
3	Le bilaplacien.	13
3.1	Étude numérique.	13
4	Combinaison linéaire du laplacien et du bilaplacien.	15
4.1	Étude mathématique.	15
4.2	Étude numérique.	16
5	Méthodologie et organisation du travail.	20
6	Conclusion.	21
A	Listing des programmes réalisés.	23
B	Codes.	24

Chapitre 1

Introduction

Dans ce projet, nous devons étudier la déformation d'une membrane rectangulaire, soumise à une pression. Afin d'en étudier les caractéristiques, nous allons modéliser sa déformation grâce au laplacien et au bilaplacien. Avec les rapports des projets précédents, nous allons tenter d'exprimer une combinaison linéaire des deux formules vues les années précédentes.

Afin d'arriver à notre objectif principal, nous avons réalisé une étude mathématique, informatique et physique des différents laplacien. Pour commencer, nous avons travaillé sur le laplacien. Ensuite, nous avons réalisé l'étude du bi-laplacien. Enfin, nous avons étudié une combinaison du laplacien et bilaplacien comme modèle de déformation de membrane.

Chapitre 2

Le laplacien.

Dans cette partie, nous allons réaliser l'étude d'une déformation de membrane, d'un point de vue physique, avec une modélisation, et mathématique avec le laplacien. Dans un premier temps, l'étude sera faite dans le cas stationnaire. Dans un second temps, nous étudierons la déformation dans le cas de l'évolution.

2.1 Étude stationnaire pour le laplacien.

La première étude du laplacien est faite dans le cas stationnaire. Nous étudions la déformation de la membrane sans évolution au cours du temps.

La membrane étudiée est une surface plane, carrée et élastique. On étudie la déformation de la membrane suite à une pression transversale. Les bords de la membrane sont fixés, tel que la déformation aux bords soit nulle. La surface d'étude varie en fonction de la pression appliquée sur cette dernière. Sa surface est représentée par la fonction u , solution d'une équation de Poisson de la forme :

$$-c_1 \Delta u = f \tag{2.1}$$

2.1.1 Analyse numérique.

Dans la formule de Poisson, nous identifions Δu comme étant l'application à l'opérateur Δ de la fonction u , c_1 est la tension appliquée à la membrane et f représente le terme source (pression sur la membrane par exemple ; source de la déformation, à l'origine).

La fonction f est a deux variables x et y . On cherche une solution approché $f_{i,j}$ au noeud $(x_i; y_j)$ du maillage de $\Omega = [0, L_x][0, L_y]$. De ce fait, nous approchons la membrane à un maillage. Nous étudions donc des valeurs discrètes sur chaque point d'intersection. Les côtés de la membrane sont définis avec L_x la longueur et L_y la largeur.

De ce fait, nous obtenons deux pas pour passer d'un noeud à l'autre : k et h . Nous prenons N et M représentant respectivement le nombre de division pour

chaque côté. Nous obtenons donc :

$$h = \frac{L_x}{N+1} \text{ et } k = \frac{L_y}{M+1}$$

Dans cette sous-partie, nous allons trouver une solution approchée de la solution.

Le laplacien s'écrit de la façon suivante : $\Delta u_{x,y} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$. On va donc chercher les valeurs numériques de $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i; y_i)$ et de $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i; y_j)$. Pour cela, nous allons calculer les accroissements locaux de u , en x et en y .

Après une combinaison de $u(x_{i+1}; y_j)$ et $u(x_{i-1}; y_j)$, en négligeant les restes, nous trouvons :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i; y_i) \simeq \frac{1}{h^2} [u(x_{i+1}; y_j) - 2u(x_i; y_j) + u(x_{i-1}; y_j)] \quad (2.2)$$

La simplification de Taylor :

Et pour la combinaison de $u(x_i; y_{j+1})$ et de $u(x_i; y_{j-1})$, nous avons, tout en négligeant les restes, nous avons :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i; y_j) \simeq \frac{1}{k^2} [u(x_i; y_{j+1}) - 2u(x_i; y_j) + u(x_i; y_{j-1})] \quad (2.3)$$

D'après $-c_1 \Delta u = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = f$, si on remplace $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ par ce que nous avons trouvé, on a donc :

$$\begin{aligned} f_{i,j} &= -c_1 \frac{1}{h^2} (u(x_{i+1}; y_j) - 2u(x_i; y_j) + u(x_{i-1}; y_j)) \\ &\quad - c_1 \frac{1}{k^2} (u(x_i; y_{j+1}) - 2u(x_i; y_j) + u(x_i; y_{j-1})) \end{aligned} \quad (2.4)$$

Pour faciliter l'étude mathématique, nous prenons comme valeurs : $M = N$, $h = k$, et $c_1 = 1$. Notre membrane est donc un carré, et sa tension vaut 1 afin de simplifier les calculs. Mais attention ! Cette valeur est à prendre en compte normalement !

Après simplification, nous obtenons l'équation suivante :

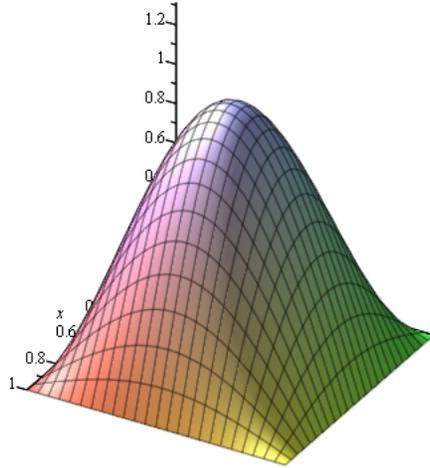
$$(-\Delta u)_{i,j} = -u_{i+1,j} - u_{i,j+1} + 4u_{i,j} - u_{i-1,j} - u_{i,j-1} = h^2 f_{i,j} \quad i, j = 1, \dots, N \quad (2.5)$$

La condition aux limite est : $u_{0,j} = 0 \quad j = 0, \dots, N+1$, $u_{i,0} = 0 \quad i = 0, \dots, N+1$, $u_{N+1,j} = 0 \quad j = 0, \dots, N+1$ et $u_{i,N+1} = 0 \quad i = 0, \dots, N+1$.

Avec cette équation, nous pouvons écrire la matrice, solution de u .

Il existe différentes méthodes pour résoudre cette matrice comme : la méthode de Gauss, ou encore, la méthode de Cholesky.

On peut obtenir la solution exacte du problème de Poisson (cf rapport 2015).



2.2 Étude de la déformation en fonction du temps.

Pour ce second cas d'étude du laplacien, nous nous plaçons dans le cas où nous essayons de visualiser la déformation de la membrane au cours du temps.

Afin de pouvoir comparer nos résultats, nous étudions le même type de membrane avec les mêmes conditions aux limites. Mais cette fois-ci, elle sera rectangulaire, fixée aux bords. Ce rectangle a pour sommets OABC ; O de coordonnées (0,0), A : (a,0), B : (0,b) et C : (a,b).

On se donne des conditions initiales : position et vitesse initiales.

2.2.1 Etude analytique.

Dans le cas stationnaire, l'équation de Poisson est la suivante :

$$-c_1 \Delta U = f \quad (2.6)$$

Or ici, nous nous intéressons uniquement au cas de l'évolution dont l'équation de Poisson est la suivante :

$$-c_1 \Delta U = f = 0$$

On se propose d'étudier les petits mouvements d'une membrane, plane dans sa position d'équilibre. On rapporte l'espace à un repère orthonormé (O, Ox, Oy, Oz), le plan (Ox,Oy) étant le plan d'équilibre. Nous supposons que le point de la membrane qui, à l'instant initial se trouve en $m(x,y)$ du plan d'équilibre, prend à l'instant t, les coordonnées x,y et $z = h(x,y,t)$. On montre que la fonction h doit satisfaire l'équation :

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} \quad (2.7)$$

qui est aussi l'équation générale de propagation des ondes dans un milieu à deux dimensions.

Nous chercherons des solutions élémentaires sous la forme :

$$h(x, y, t) = f(x, y)g(t) \quad (2.8)$$

Les fonctions f et g doivent donc satisfaire l'équation

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)g = \frac{1}{c^2}f \frac{d^2 g}{dt^2} \quad (2.9)$$

On isole la variable t , puis par analogie avec le cas des cordes vibrantes, sachant que la valeur commune des deux membres doit être constante, nous prendrons cette constante négative, de valeur $-\omega^2$, de sorte que les fonctions g et f doivent vérifier respectivement les équations :

$$g'' + c^2\omega^2 g = 0 \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \omega^2 f = 0 \quad (2.11)$$

On en tire d'abord que g est de la forme $g(t) = A\cos(c\omega t) + B\sin(c\omega t)$ où A et B sont des constantes. Pour transformer l'équation aux dérivées partielles, on opérera différemment suivant les conditions aux limites.

Ici nous nous intéresserons au cas d'une membrane carrée. Dans ce cas, nous supposons qu'à sa position d'équilibre, la membrane vibrante occupe, dans le plan (Ox, Oy) , le carré $OABC$ dont le sommet A a pour coordonnées $(a,0)$ et le sommet C est le point $(0,a)$. La membrane reste fixée aux côtés du carré. Les conditions aux limites sont donc pour l'équation (1) :

$$h(0, y, t) = 0 \quad ; \quad h(a, y, t) = 0 \quad ; \quad h(x, 0, t) = 0 \quad ; \quad h(x, b, t) = 0$$

Ce qui entraîne les conditions aux limites pour l'équation :

$$f(0, y) = 0 \quad ; \quad f(b, y) = 0 \quad \text{avec} : \quad 0 \leq y \leq b \quad (2.12)$$

$$f(x, 0) = 0 \quad ; \quad f(x, a) = 0 \quad \text{avec} : \quad 0 \leq x \leq a \quad (2.13)$$

En raison de la symétrie des rôles joués par les variables x et y , on cherche des solutions élémentaires de l'équation, sous la forme :

$$f(x, y) = u(x)v(y)$$

Nous ne détaillons pas les calculs, mais finalement nous obtenons pour l'équation :

$$f(x, y) = \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \times \sin\left(\frac{p\pi}{b}y\right)$$

Cette dernière est une solution qui sera associée à la fonction $g(t)$ de la forme $w = \pi((\frac{n}{a})^2 + (\frac{p}{b})^2)^{\frac{1}{2}}$

Nous avons donc pour l'équation la solution élémentaire :

$$h(x, y, t) = (A \cos(c((\frac{n}{a})^2 + (\frac{p}{b})^2)^{\frac{1}{2}} \pi t) + B \sin(c((\frac{n}{a})^2 + (\frac{p}{b})^2)^{\frac{1}{2}} \pi t)) \times \sin(\frac{n\pi}{a} x) \times \sin(\frac{p\pi}{b} y) \quad (2.14)$$

A et B pourront dépendre de n et p. On les notera $A_{n,p}$ et $B_{n,p}$. Par superposition de solutions élémentaires, on obtient une solution plus générale de l'équation sous la forme d'une série double :

$$h(x, y, t) = \sum_{n,p=1}^{\infty} (A_{n,p} \cos(c((\frac{n}{a})^2 + (\frac{p}{b})^2)^{\frac{1}{2}} \pi t) + \sum_{n,p=1}^{\infty} B_{n,p} \sin(c((\frac{n}{a})^2 + (\frac{p}{b})^2)^{\frac{1}{2}} \pi t)) \times \sin(\frac{n\pi}{a} x) \times \sin(\frac{p\pi}{b} y) \quad (2.15)$$

Si aux conditions aux limites, on ajoute les conditions initiales :

$$h(x, y, 0) = h_0(x, y) \quad 0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq b \quad (2.16)$$

$$h_t(x, y, 0) = h_1(x, y) \quad 0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq b \quad (2.17)$$

On aura à choisir les coefficients $A_{n,p}$, $B_{n,p}$ de la série de façon à ce que

$$\sum_{n,p=1}^{\infty} A_{n,p} \sin(\frac{n\pi}{a} x) \times \sin(\frac{p\pi}{b} y) = h_0(x, y) \quad (2.18)$$

$$c\pi \sum_{n,p=1}^{\infty} B_{n,p} ((\frac{n}{a})^2 + (\frac{p}{b})^2)^{\frac{1}{2}} \times \sin(\frac{n\pi}{a} x) \times \sin(\frac{p\pi}{b} y) = h_1(x, y) \quad (2.19)$$

Il est possible d'expliciter les coefficients $A_{n,p}$ et $B_{n,p}$. On les cherche en utilisant les relations d'orthogonalité. On a :

$$\int_0^a \int_0^b h(x, y, t) \times f(x, y) dx dy = N_{n,p} (B_{n,p} \sin(cwt) + A_{n,p} \cos(cwt)) \quad (2.20)$$

Avec $N_{n,p}$ une constante.

On dérive pour trouver une seconde relation :

$$\int_0^a \int_0^b h'(x, y, t) \times f(x, y) dx dy = cw N_{n,p} (B_{n,p} \cos(cwt) - A_{n,p} \sin(cwt)) \quad (2.21)$$

A $t = 0$, on a :

$$h(x, y, 0) = h_0(x, y)$$

$$h'(x, y, 0) = h'_o(x, y)$$

On résout le système à $t = 0$, on obtient :

$$A_{n,p} = \frac{1}{N_{n,p}} \int_0^a \int_0^b h_o(x, y) \times f(x, y) dx dy \quad (2.22)$$

$$B_{n,p} = \frac{1}{cw \times N_{n,p}} \int_0^a \int_0^b h'_o(x, y) \times f(x, y) dx dy \quad (2.23)$$

Pour trouver la constante $N_{n,p}$, on résout le système avec la condition initiale ; à savoir : La membrane est fixée aux bords de l'étude, sachant : $f(x, y) = \sin(\frac{n\pi}{a}x) \times \sin(\frac{p\pi}{b}y)$.

On sait que :

$$\begin{aligned} N_{n,p} &= \int_0^a \int_0^b f^2(x, y) dx dy = \int_0^a \int_0^b \sin^2(\frac{n\pi}{a}x) \times \sin^2(\frac{p\pi}{b}y) \times dx dy \\ &= \int_0^a \sin^2(\frac{n\pi}{a}x) \times dx \times \int_0^b \sin^2(\frac{p\pi}{b}y) \times dy \end{aligned} \quad (2.24)$$

En utilisant : $\sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$, on obtient :

$$\int_0^a \frac{1 - \cos(2 \times \frac{n\pi}{a}x)}{2} \times dx \times \int_0^b \frac{1 - \cos(2 \times \frac{p\pi}{b}y)}{2} * dy \quad (2.25)$$

On résout le système avec les primitives et on trouve :

$$N_{n,p} = (\frac{1}{2}a + 2[\frac{\sin(\frac{2n\pi}{a}x)}{2}]_0^a) \times (\frac{1}{2}b + 2[\frac{\sin(\frac{2p\pi}{b}y)}{2}]_0^b) \quad (2.26)$$

$$N_{n,p} = (\frac{1}{2}a + \sin(2n\pi)) \times (\frac{1}{2}b + \sin(2p\pi))$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sin(2n\pi) = 0$$

$$N_{n,p} = \frac{1}{4}ab \quad (2.27)$$

Donc :

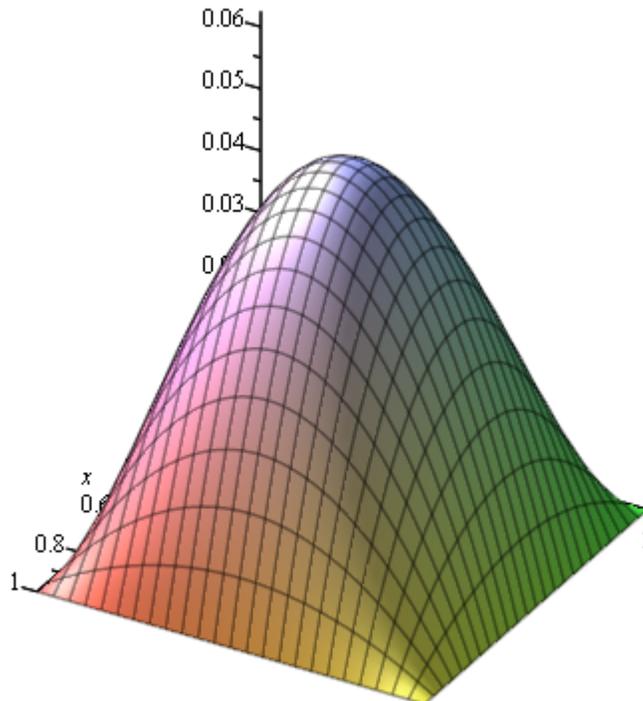
$$A_{n,p} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b h_o(x, y) \times f(x, y) dx dy \quad (2.28)$$

Et :

$$B_{n,p} = \frac{4}{cw \times ab} \int_0^a \int_0^b h'_o(x, y) \times f(x, y) dx dy \quad (2.29)$$

Maintenant que nous avons nos valeurs pour $A_{n,p}$ et $B_{n,p}$, nous pouvons exprimer l'équation de $h(x, y, t)$:

$$h(x, y, t) = \left[\sum_{n,p=1}^{\infty} \left(\frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b h_o(x, y) \times f(x, y) dx dy \right) \cos\left(c \left(\left(\frac{n}{a} \right)^2 + \left(\frac{p}{b} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \pi t \right) + \sum_{n,p=1}^{\infty} \left(\frac{4}{cw \times ab} \int_0^a \int_0^b h'_o(x, y) \times f(x, y) dx dy \right) \left(\sin\left(c \left(\left(\frac{n}{a} \right)^2 + \left(\frac{p}{b} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \pi t \right) \right) \times \sin\left(\frac{n\pi}{a} x\right) \times \sin\left(\frac{p\pi}{b} y\right) \right]$$



Chapitre 3

Le bilaplacien.

Dans cette partie, nous allons étudier le même type de déformation, mais avec un nouvel opérateur : le bilaplacien. L'équation de ce dernier est de la forme $c_2 \Delta^2 u = f$.

L'étude physique de ce système est la même que pour le précédent : on approche la membrane à un maillage, et on calcule les valeurs discrètes sur chaque intersection.

3.1 Étude numérique.

Le bilaplacien est laplacien du laplacien : Δu . Il s'écrit : $\Delta(\Delta u)$ ou $\Delta^2 u$. L'équation à résoudre est donc :

$$c_2 \Delta^2 u = f \quad (3.1)$$

Avec $\Delta^2 u$: la solution et opérateur du bilaplacien, et c_2 la tension appliquée à la membrane et f représente le terme source (pression sur la membrane par exemple ; source de la déformation à l'origine).

Comme pour le laplacien, on impose la condition initiale suivante $u = 0$. De plus, on ajout la condition initiale suivante : $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$. Ce qui revient à dire que la membrane est fixée aux bords (aucun mouvement à ces endroits).

Afin de trouver une solution approchée de f , nous allons calculer $-\Delta U$. Puis, nous appliquerons : $U = -\Delta u$. On aura alors : $-\Delta(-\Delta u) = \Delta^2 u$, soit le bilaplacien.

Pour $-\Delta U$, on trouve :

$$-\Delta U = -\frac{1}{h^2}(U_{x_{i+1},y_j} - 2 \times U_{x_i,y_j} + U_{x_{i-1},y_j}) + \frac{1}{k^2}(U_{x_i,y_{j+1}} - 2 \times U_{x_i,y_j} + U_{x_i,y_{j-1}}) = f \quad (3.2)$$

D'où le résultat suivant :

$$(\Delta^2 u)_{i,j} = \frac{1}{k^4} u_{i,j-2} + \frac{2}{h^2 k^2} u_{i-1,j-1} - \left(\frac{4}{h^2 k^2} + \frac{4}{k^4} \right) u_{i,j-1} + \frac{2}{h^2 k^2} u_{i+1,j-1} + \frac{1}{h^4} u_{i-2,j}$$

$$\begin{aligned}
 & -\left(\frac{4}{h^2k^2} + \frac{4}{k^4}\right)u_{i-1,j} + \left(\frac{8}{h^2k^2} + \frac{6}{h^4} + \frac{6}{k^4}\right)u_{i,j} - \left(\frac{4}{h^2k^2} + \frac{4}{k^4}\right)u_{i+1,j} + \frac{1}{h^4}u_{i,j-2} \\
 & + \frac{2}{h^2k^2}u_{i-1,j+1} - \left(\frac{4}{h^2k^2} + \frac{4}{k^4}\right)u_{i,j+1} + \frac{2}{h^2k^2}u_{i+1,j+1} + \frac{1}{k^4}u_{i,j+2}
 \end{aligned}$$

On impose $h = k$. Nous avons donc une membrane carrée. Le bilaplacien donne alors :

$$\begin{aligned}
 (\Delta^2 u)_{i,j} &= \frac{1}{h^4}u_{i,j-2} + \frac{2}{h^4}u_{i-1,j-1} - \frac{8}{h^4}u_{i,j-1} + \frac{2}{h^4}u_{i+1,j-1} + \frac{1}{h^4}u_{i-2,j} \\
 & - \frac{8}{h^4}u_{i-1,j} + \frac{20}{h^4}u_{i,j} - \frac{8}{h^4}u_{i+1,j} + \frac{1}{h^4}u_{i+2,j} \\
 & + \frac{2}{h^2k^2}u_{i-1,j+1} - \frac{8}{h^4}u_{i,j+1} + \frac{2}{h^4}u_{i+1,j+1} + \frac{1}{h^4}u_{i,j+2}
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

Puis, vient la factorisation par h^4 :

$$\begin{aligned}
 h^4(\Delta^2 u)_{i,j} &= \frac{h^4 f}{c_2} = u_{i+2,j} + u_{i-2,j} + u_{i,j+2} - 8 \times (u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1}) \\
 & + 2 \times (u_{i+1,j+1} + u_{i+1,j-1} + u_{i-1,j+1} + u_{i-1,j-1}) + 20u_{i,j} + u_{i,j-2}
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

Les conditions limites sont : $u = 0$ et $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$.

Nous obtenons une équation, avec laquelle nous pouvons écrire une matrice, solution de u . Une résolution de cette dernière nous permet d'obtenir des valeurs pour le crois(s)ement des mailles. On peut la résoudre avec la technique de Gauss par exemple.

Pour obtenir la solution exacte du problème, se référer au rapport 2016.

Chapitre 4

Combinaison linéaire du laplacien et du bilaplacien.

Pour cette dernière partie, nous étudions le même système que dans les deux analyses précédentes. Une membrane élastique, dont les bords sont fixés. Une pression est appliquée sur cette dernière. L'étude se fera sur la déformation de la membrane, dû à une pression ; cela grâce à une combinaison linéaire du laplacien et du bilaplacien. On prend $\Omega = [0, 1]^2$.

4.1 Étude mathématique.

La combinaison linéaire du laplacien et du bilaplacien est de la forme :

$$c_2 \Delta^2(u) - c_1 \Delta(u) = f \quad (4.1)$$

Avec $c_2 = c_1 = 1$.

Avec, f est une fonction (terme source) qui dépend de x, y tel que $f(x, y) = c_2 \Delta^2(u(x, y)) - c_1 \Delta(u(x, y))$, Δu la solution et opérateur du laplacien, $\Delta^2 u$ la solution et opérateur du bilaplacien, et c_1 et c_2 sont les tensions appliquées à la membrane.

Comme pour le laplacien et le bilaplacien, on impose la condition limite : la membrane est fixée aux bords (aucun mouvement à ces endroits). Autrement dit, $u = \frac{\partial u}{\partial n} = 0$ sur le bord du système. Ce sont les mêmes conditions aux limites que le bilaplacien.

On prend le terme source suivant :

$$\begin{aligned} f(x, y) = & 22.y - 44.y + 22x^4 - 44x^3 - 12x^2y^4 + 24x^2y^3 + 12xy^4 - 24xy^3 \\ & - 12x^4y^2 + 24x^3y^2 + 12x^4y - 24x^3y + 70 \times (y^2 + x^2) - 276 \times (x^2y + xy^2) \\ & + 288xy + 264x^2y^2 - 48 \times (x + y) + 8 \end{aligned}$$

On obtient la solution $u = x^2 \times y^2 \times (1 - x)^2 \times (1 - y)^2$.

4.2 Étude numérique.

Pour un noeud $x_i; y_j$ du maillage donné précédemment, en utilisant les développements de Taylor, on a :

$$\begin{aligned}
 (\Delta^2 u - \Delta u)_{i,j} = & \frac{1}{h^4} u_{i,j-2} + \frac{2}{h^4} u_{i-1,j-1} + \frac{2}{h^4} u_{i+1,j-1} + \frac{1}{h^4} u_{i-2,j} \\
 & - \frac{7}{h^4} (u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} + u_{i+1,j}) \\
 & + \frac{2}{h^4} u_{i-1,j+1} + \frac{2}{h^4} u_{i+1,j+1} + \frac{1}{h^4} u_{i,j+2} + \frac{16}{h^4} u_{i,j} = f_{i,j}
 \end{aligned} \quad (4.3)$$

A l'intérieur de la membrane, $i, j = 2, \dots, N - 1$.

$$\begin{aligned}
 i, j \quad 2, 2 = & \frac{1}{h^4} u_{2,0} + \frac{2}{h^4} u_{1,1} + \frac{2}{h^4} u_{3,1} + \frac{1}{h^4} u_{0,2} + \frac{7}{h^4} (u_{1,2} + u_{2,3} + u_{2,1} + u_{3,2}) \\
 & + \frac{2}{h^4} u_{1,3} + \frac{2}{h^4} u_{3,3} + \frac{1}{h^4} u_{2,4} + \frac{16}{h^4} u_{2,2} = f_{2,2} \\
 - \\
 i, j \quad 3, 2 = & \frac{1}{h^4} u_{3,0} + \frac{2}{h^4} u_{2,1} + \frac{2}{h^4} u_{4,1} + \frac{1}{h^4} u_{1,2} - \frac{7}{h^4} (u_{2,2} + u_{3,3} + u_{3,1} + u_{4,2}) \\
 & + \frac{2}{h^4} u_{2,3} + \frac{2}{h^4} u_{4,3} + \frac{1}{h^4} u_{3,4} + \frac{16}{h^4} u_{3,2} = f_{3,2} \\
 i, j \quad 4, 2 = & \frac{1}{h^4} u_{4,0} + \frac{2}{h^4} u_{3,1} + \frac{2}{h^4} u_{5,1} + \frac{1}{h^4} u_{2,2} - \frac{7}{h^4} (u_{3,2} + u_{4,3} + u_{4,1} + u_{5,2}) \\
 & + \frac{2}{h^4} u_{3,3} + \frac{2}{h^4} u_{5,3} + \frac{1}{h^4} u_{4,4} + \frac{16}{h^4} u_{4,2} = f_{4,2} \\
 i, j \quad 5, 2 = & \frac{1}{h^4} u_{5,0} + \frac{2}{h^4} u_{4,1} + \frac{2}{h^4} u_{6,1} + \frac{1}{h^4} u_{3,2} - \frac{7}{h^4} (u_{4,2} + u_{5,3} + u_{5,1} + u_{6,2}) \\
 & + \frac{2}{h^4} u_{4,3} + \frac{2}{h^4} u_{6,3} + \frac{1}{h^4} u_{5,4} + \frac{16}{h^4} u_{5,2} = f_{5,2} \\
 i, j \quad 6, 2 = & \frac{1}{h^4} u_{6,0} + \frac{2}{h^4} u_{5,1} + \frac{2}{h^4} u_{7,1} + \frac{1}{h^4} u_{4,2} - \frac{7}{h^4} (u_{5,2} + u_{6,3} + u_{6,1} + u_{7,2}) \\
 & + \frac{2}{h^4} u_{5,3} + \frac{2}{h^4} u_{7,3} + \frac{1}{h^4} u_{6,4} + \frac{16}{h^4} u_{6,2} = f_{6,2} \\
 i, j \quad 2, 3 = & \frac{1}{h^4} u_{2,1} + \frac{2}{h^4} u_{1,2} + \frac{2}{h^4} u_{3,2} + \frac{1}{h^4} u_{0,3} + \frac{7}{h^4} (u_{1,3} + u_{2,4} + u_{2,2} + u_{3,3}) \\
 & + \frac{2}{h^4} u_{1,4} + \frac{2}{h^4} u_{3,4} + \frac{1}{h^4} u_{2,5} + \frac{16}{h^4} u_{2,3} = f_{2,3}
 \end{aligned}$$

On prend $h = \frac{1}{8}$, tel que $N = 7$.

On met cette équation récurrente sous forme d'un système linéaire avec la matrice notée A.

A se construit, en notant I la matrice identité, tel que :

$$A = \begin{pmatrix} G & K & I & 0 & 0 \\ K & G & K & I & 0 \\ I & K & G & K & I \\ 0 & I & K & G & K \\ 0 & 0 & I & K & G \end{pmatrix}$$

La matrice A est de taille 25*25. Le matrice I est de taille 5*5
Nous avons G et K tels que :

$$G = \begin{pmatrix} 16 & -7 & 1 & 0 & 0 \\ -7 & 16 & -7 & 1 & 0 \\ 1 & -7 & 16 & -7 & 1 \\ 0 & 1 & -7 & 16 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & 16 \end{pmatrix}$$

$$K = \begin{pmatrix} -7 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -7 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -7 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -7 \end{pmatrix}$$

G et K de taille 5*5.

Pour obtenir la matrice de la combinaison linéaire du bilaplacien et du laplacien dans le cas où $c_1 = 1$ et $c_2 = 1$, on résout

$$M = M_{bilaplacien} - M_{laplacien}$$

On résout le problème pour une solution donnée qui respecte les conditions limites aux bords c'est à dire la membrane est fixée.

$$p(x, y) = x^2 y^2 (1 - x)^2 (1 - y)^2$$

Pour obtenir le vecteur force avec précision. On cherche à calculer :

$$c_2 \Delta^2 p - c_1 \Delta p = (h^4 - h^2) f \tag{4.4}$$

Pour obtenir la force f, on utilise le logiciel maple pour calculer le membre de gauche. Pour cette étude, nous avons fixé le pas h à 8. On trouve alors un vecteur force à 25 coordonnées.

```

2, 2, 1.830078125000000000
3, 2, 2.610656738281250000
4, 2, 2.894531250000000000
5, 2, 2.610656738281250000
6, 2, 1.830078125000000000
2, 3, 2.610656738281250000
3, 3, 4.046295166015625000
4, 3, 4.549072265625000000
5, 3, 4.046295166015625000
6, 3, 2.610656738281250000
2, 4, 2.894531250000000000
3, 4, 4.549072265625000000
4, 4, 5.125000000000000000
5, 4, 4.549072265625000000
6, 4, 2.894531250000000000
2, 5, 2.610656738281250000
3, 5, 4.046295166015625000
4, 5, 4.549072265625000000
5, 5, 4.046295166015625000
6, 5, 2.610656738281250000
2, 6, 1.830078125000000000
3, 6, 2.610656738281250000
4, 6, 2.894531250000000000
5, 6, 2.610656738281250000
6, 6, 1.830078125000000000

```

On remarque que la force est symétrique et a un minimum aux bords et maximum au centre en $(\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$. Une fois qu'on obtient ce vecteur force, on résout le système linéaire de matrice de la forme $Au = B$ avec $A = M$ et $B = (h^4 - h^2) f$.

```

M = ( M_bilap - h^2 * M_lap )
u = linsolve (M, h^4*f )

```

Avec matlab on utilise la fonction linsolve et on trouve la solution de u. On peut donc comparer le u trouvé avec matlab avec la solution exacte calculée avec maple en utilisant le polynôme p.

```

u =
2, 2, 0.0012359619140625000000 0.000463413998889
3, 2, 0.0019311904907226562500 0.000910501386347
4, 2, 0.0021972656250000000000 0.001085831223869
5, 2, 0.0019311904907226562500 0.000910501386347
6, 2, 0.0012359619140625000000 0.000463413998889
2, 3, 0.0019311904907226562500 0.000910501386347
3, 3, 0.0030174851417541503906 0.001787693189934
4, 3, 0.0034332275390625000000 0.002132036485751
5, 3, 0.0030174851417541503906 0.001787693189934
6, 3, 0.0019311904907226562500 0.000910501386347
2, 4, 0.0021972656250000000000 0.001085831223869
3, 4, 0.0034332275390625000000 0.002132036485751
4, 4, 0.0039062500000000000000 0.002542859714199
5, 4, 0.0034332275390625000000 0.002132036485751
6, 4, 0.0021972656250000000000 0.001085831223869
2, 5, 0.0019311904907226562500 0.000910501386347
3, 5, 0.0030174851417541503906 0.001787693189934
4, 5, 0.0034332275390625000000 0.002132036485751
5, 5, 0.0030174851417541503906 0.001787693189934
6, 5, 0.0019311904907226562500 0.000910501386347
2, 6, 0.0012359619140625000000 0.000463413998889
3, 6, 0.0019311904907226562500 0.000910501386347
4, 6, 0.0021972656250000000000 0.001085831223869
5, 6, 0.0019311904907226562500 0.000910501386347
6, 6, 0.0012359619140625000000 0.000463413998889

```

Notre solution calculée est 3 fois plus petite que la solution exacte. On peut attribuer cet différence à une erreur de modélisation. On a reproduit la même étude avec le laplacien et le bilaplacien séparément et les solutions de maple et matlab concordent pour le laplacien. Cependant, la modélisation du bilaplacien pose problème on retrouve un facteur 3 entre la solution exacte calculée avec maple et la solution numérique calculée avec matlab. On remarque que les valeurs du laplacien sont beaucoup plus faibles que celles du bilaplacien, on en déduit que le bilaplacien est le terme dominant.

Chapitre 5

Méthodologie et organisation du travail.

Pour commencer, nous avons effectué tous ensemble des recherches bibliographiques en lien avec notre thématique, ainsi qu'une observation des rapports des années précédentes, afin de nous aider à mieux cerner le sujet. Nous nous sommes ensuite réparti le travail en fonction de nos différentes compétences. Sachant que Simon était en thématique ASI/GM, il avait donc plus de facilités avec les parties mathématiques et informatiques du projet ; Pierre en MECA/GM, Quentin et Sébastien en CFI/MRI avaient plus de facilités avec l'analyse physique. De ce fait, Pierre et Quentin se sont penchés sur la modélisation mathématique par une approche physique du laplacien dans le cas de l'évolution et ont donc réalisé, sous Maple, cette étude, celui du cas stationnaire ayant déjà été réalisé par un groupe lors des années précédentes. Simon s'est chargé de trouver une combinaison linéaire entre le laplacien et le bilaplacien et l'a ensuite adapté sous un programme Maple. Sébastien a récupéré les rapports des groupes des années précédentes et a commencé à rédiger le notre. Mr GLEYSE nous a appris comment utiliser Maple afin de pouvoir modéliser nos études. Nous nous sommes ensuite retrouvés en dehors des heures de cours pour avancer sur le projet et le rapport. Enfin l'aide et les explications de Mr GLEYSE nous ont été d'une grande utilité pour l'aboutissement de ce projet.

Chapitre 6

Conclusion.

Lors du déroulement du projet, nous avons axé notre étude du projet suivant trois axes : mathématique, numérique et physique. Nous avons vérifié les modèles des années précédentes et en avons proposé deux nouveaux, celle de l'étude du laplacien dans le cas de l'évolution avec une membrane carrée, ainsi que l'étude de la combinaison linéaire du laplacien et du bilaplacien. Nous avons tenté à chaque fois de justifier la validité de chaque modèle. Des compétences en programmation ont été nécessaires pour la manipulation des programmes Maple et Matlab, ainsi qu'en mathématique afin de comprendre les formules sur les séries de Fourier et le développement de Taylor.

Au delà des connaissances scientifiques, ce projet nous a été profitable sur le plan personnel et humain. Il nous a permis de développer des capacités d'organisation, de communication et de discipline, qualités indispensables à tout ingénieur.

En ce qui concerne la poursuite de ce projet, nous avons pensé qu'une piste vers une étude du bilaplacien dans le cas de l'évolution était envisageable ainsi qu'affiner le cas de la combinaison linéaire en faisant varier les constantes c_1 et c_2 .

Bibliographie

http://www-ljk.imag.fr/membres/Guillaume.James/sujet_TP_MN_09.pdf
<http://www.phys.ens.fr/~dormy/Palais/node1.html>
http://www.ufrmeca.univ-lyon1.fr/~buffat/COURS/COURSDF_HTML/node32.html
<http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.49.79&rep=rep1&type=pdf>
http://math.univ-lyon1.fr/~herbach/download/Rapport_stage_LATP.pdf
http://math.univ-lyon1.fr/~saleh/Docs/MEF/CoursUFE_KhaledSaleh.pdf
<http://www-solar.mcs.st-and.ac.uk/~alan/MT3601/Fundamentals/node60.html>
<http://www.ipgp.fr/~dormy/Palais/node1.html>
<https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00826561/document>
http://www.ufrmeca.univ-lyon1.fr/~buffat/COURS/COURSDF_HTML/node32.html
<http://perso.uclouvain.be/gaetan.compere/docs/TFE2005.pdf>
http://perso.univ-lemans.fr/~jcpascal/Cours/ENSIM2A_Vibrations&Acoustique_2.pdf
<http://www.phys.ens.fr/~dormy/Palais/v3.html>
<http://www.phys.ens.fr/~dormy/Palais/node1.html>
<https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00826561/document>
<http://perso.ens-lyon.fr/jean-christophe.geminard/FILES/qpuydt.pdf>
<http://www.les-mathematiques.net/phorum/read.php?4,808439,808853>

Annexe A

Listing des programmes réalisés.

- Quatre programmes ont été utiles dans le cadre de ce projet :
- laplacien-simple.pas
 - Evolution.mw
 - combinaison-lineaire.mw
 - matrice-2525.m

Annexe B

Codes.

$$a := 1; b := 1; c := 5; f := x.(1-x).y.(1-y); \text{assume}(n, \text{integer}) : \text{assume}(m, \text{integer}) :$$

$$\begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 5 \\ x.(1-x).y.(1-y) \end{matrix} \tag{1}$$

$$\lambda_{nm} := c^2 \cdot \pi^2 \cdot \left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} \right);$$

$$25 \pi^2 (m^2 + n^2) \tag{2}$$

$$b_{nm} := \text{simplify} \left(\frac{4}{(a \cdot b)} \cdot \text{int} \left(\text{int} \left(f \cdot \sin \left(\frac{n \cdot \text{Pi} \cdot x}{a} \right) \cdot \sin \left(\frac{m \cdot \text{Pi} \cdot y}{a} \right), x=0..a \right), y=0..b \right) \right);$$

$$\frac{16 \left((-1)^{m+n} + (-1)^{1+m} + (-1)^{1+n} + 1 \right)}{n^3 \pi^6 m^3} \tag{3}$$

$$u_{nm} := b_{nm} \cdot \cos(\text{sqrt}(\lambda_{nm}) \cdot t) \cdot \sin \left(\frac{n \cdot \text{Pi} \cdot x}{a} \right) \cdot \sin \left(\frac{m \cdot \text{Pi} \cdot y}{b} \right);$$

$$\frac{16 \left(\left(\frac{(-1)^{m+n} + (-1)^{1+m} + (-1)^{1+n} + 1}{n^3 m^3} \right) \cdot \cos(5 \pi (\sqrt{m^2 + n^2}) \cdot t) \right) \cdot \sin(n \pi x) \sin(m \pi y)}{\pi^6} \tag{4}$$

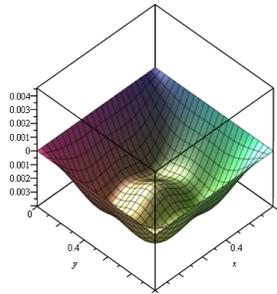
$$u11 := \text{sum}(\text{sum}(u_{nm}, n=1..5), m=1..5);$$

$$\frac{64 \cos(5 \pi \sqrt{2} t) \sin(\pi x) \sin(\pi y)}{\pi^6} + \frac{64 \cos(5 \pi \sqrt{10} t) \sin(3 \pi x) \sin(\pi y)}{\pi^6} + \frac{64 \cos(5 \pi \sqrt{26} t) \sin(5 \pi x) \sin(\pi y)}{\pi^6} + \frac{64 \cos(5 \pi \sqrt{10} t) \sin(\pi x) \sin(3 \pi y)}{\pi^6}$$

$$+ \frac{64 \cos(5 \pi \sqrt{18} t) \sin(3 \pi x) \sin(3 \pi y)}{\pi^6} + \frac{64 \cos(5 \pi \sqrt{34} t) \sin(5 \pi x) \sin(3 \pi y)}{\pi^6} + \frac{64 \cos(5 \pi \sqrt{26} t) \sin(\pi x) \sin(5 \pi y)}{\pi^6}$$

$$+ \frac{64 \cos(5 \pi \sqrt{34} t) \sin(3 \pi x) \sin(5 \pi y)}{\pi^6} + \frac{64 \cos(5 \pi \sqrt{50} t) \sin(5 \pi x) \sin(5 \pi y)}{\pi^6} \tag{5}$$

animate3d(u11, x=0..a, y=0..b, t=6.9970..7.0015)



```

program deformationMembrane;
const q=50 ;
Type matrice = array [1..q,1..q] of Real;
matrice2 = array [1..q] of Real ;
var A,L,Lt : matrice;
b,Y,X : matrice2; i,j,m,p ;
rang: Integer ;
K, N, valeur, valeur2 : real ;

procedure initialiserMatrice(dim : integer ; var A : Matrice);
var i, j : Integer;
begin
    For i:= 1 to dim do
        For j := 1 to dim do
            A[i, j] := 0;
        end;
    end;

procedure affichage_matrice (mat: matrice);
var i,k:Integer ;
begin
    For i:= 1 to p do
        begin
            writeln();
            For k:=1 to p-1 do
                write(mat[i,k]:4:1,' | ');
            write(mat[i,p]:4:1) ;
        end;
    end;

procedure affichage_matrice2 ( mat: matrice2);
var k:Integer ;
begin
    writeln();
    For k:=1 to p do
        writeln(mat[k],'|');
    end;
begin
    writeln('Rang de la matrice? rang ',q,' maximum et
    ↪ entier') ;
    readln(p);
    initialiserMatrice(p, A);
    write('Valeur pour la diagonale du bloc central : ');
    readln(valeur);
    For i := 1 to p do
        A[i, i] := valeur;
    write('Valeur pour les diagonales sup et inf du bloc
    ↪ central : ');

```

```

readln(valeur2);
For i := 1 to p do
  if (i MOD 3) <> 0 then
  begin
    A[i + 1, i] := valeur2;
    A[i, i + 1] := valeur2;
  end;
write('Valeur pour les diagonales des blocs sup et inf :
→ ');
readln(valeur);
rang := 4;
For i := 1 to (1 + p - rang) do
begin
  A[i, rang + i - 1] := valeur;
  A[rang+1-1,i] := valeur;
end;
writeln('tapez 1 pour taper le vecteur b');
readln(i);
if i=1 then
  for j:=1 to p do
  begin
    readln(K);
    b[j]:=K;
  end
else
for j:=1 to p do
begin
  readln(K);
  X[j]:=K;
end;
for i:=1 to p do
begin
  b[i]:=0;
  for j:=1 to p do
    b[i]:=b[i]+A[i,j]*X[j]
end;
writeln();
writeln('A = ');
affichage_matrice(A);

writeln();
writeln('X=');
affichage_matrice2(X) ;

writeln();
writeln();

```

```

writeln('b = ');
affichage_matrice2(b) ;

For i := 1 to p do
    For j := 1 to p do
        L[i,j] := 0 ;
affichage_matrice( A);
L[1,1] := sqrt(A[1,1]);
affichage_matrice( L);
For i := 2 to p do
    For j := 1 to i do
        begin
            If j>1 then
                begin
                    K:=0 ;
                    N:=0 ;
                    For m := 1 to j-1 do
                        begin
                            K := K + sqrt(L[j,m]) ;
                            N := N + L[i,m]*L[j,m] ;
                        end;
                    If j = i then
                        begin
                            L[j,j] := sqrt( A[j,j] -
→ K);

                            end
                        Else
                            if L[j, j] <> 0 then
                                L[i,j] := (A[i,j] -
→ N)/(L[j,j])

                            else
                                writeln('ERREUR : DIVISON
→ PAR ZERO');
                            end
                        Else
                            begin
                                If j = i then
                                    L[j,j] := sqrt( A[j,j])
                                Else
                                    if L[j, j] <> 0 then
                                        L[i,j] :=
→ (A[i,j])/(L[j,j])

                                    else
                                        writeln('ERREUR :
→ DIVISON PAR ZERO');
                            end;
                end;
        end;
    end;
end;

```

```

        end;
writeln('L =');
    affichage_matrice( L);
    writeln();
    For i := 1 to p do
        For j := 1 to p do
            Lt[i,j] := L[j,i];
        writeln();
        writeln('Lt =');
        affichage_matrice(Lt);
    writeln();
    Y[1] := b[1]/L[1,1] ;
    For i:= 2 to p do
        begin
            K := 0 ;
            For j := 1 to i-1 do
                K := K + L[i,j]*Y[j] ;
            Y[i] := (b[i]-K)/L[i,i] ;
        end;
        writeln();
        writeln('Y =');
        affichage_matrice2(Y) ;
    writeln() ;
    X[p] := Y[p]/Lt[p,p] ;
    For i := p-1 downto 1 do
        begin
            K := 0 ;
            For j := i to p do
                K := K + Lt[i,j]*X[j] ;
            X[i] := (Y[i]-K)/(Lt[i,i]);
        end;
        writeln('X=');
        affichage_matrice2(X) ;
        writeln();
        readln();
    end.

```