**ASI** **Mercredi 2 Février 2000 - 3h**

1. Exercice 1 un bon bol d'air pour l'étudiant 5 points

La capacité respiratoire d'une personne est une variable aléatoire $X$, distribuée suivant une loi normale de paramètres inconnus. On tire deux échantillons i.i.d. de taille 10 de cette loi. Le premier groupe de mesures a été effectué avant d'avoir soumis 10 individus à un traitement dont on cherche à démontrer l'efficacité. Le second groupe de mesures a été pris après avoir effectué le traitement. On cherche à savoir si ce traitement est efficace ou non.

(a) proposez une stratégie de décision.

(b) après avoir observé les résultats suivants, et pour un rique de première espèce de 10%, que décidez vous ?

| individu | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| groupe 1 | 102 | 84 | 91 | 72 | 93 | 91 | 135 | 115 | 101 | 94 |
| groupe 2 | 102 | 115 | 145 | 107 | 117 | 114 | 111 | 120 | 125 | 101 |

$\sum x_i$ groupe 1 : 978 et groupe 2 : 1157 et $\sum x_i^2$ groupe 1 : 98342 et groupe 2 : 135335

(c) En supposant que les 2 groupes ont la même variance, donnez un intervalle de confiance à 95% sur la différence $\mu_1 - \mu_2$ des espérances des capacités respiratoires avant et après le traitement.

2. Exercice 2 le chant du cygne 5 points

On reprend l'exercice précédent sans faire l'hypothèse de normalité. On note $N$ le nombre de fois où le traitement a augmenté la capacité respiratoire d'un individu. $N$ est une variable aléatoire suivant une loi binômiale de paramètres $p$ et $n = 10$.

(a) Si le traitement n'a pas d'effet, le nombre de fois où le traitement a augmenté la capacité respiratoire d'un individu doit être égale au nombre de fois où le traitement a diminué la capacité respiratoire d'un individu, et donc la proportion du nombre de fois où le traitement a augmenté la capacité respiratoire $p = \frac{1}{2}$.
Posez les hypothèses d'un test permettant de vérifier cette hypothèse.

(b) Donnez la région critique ainsi que la valeur du seuil de décision pour $\alpha^* = 10\%$. Donnez la valeur de $\alpha$ associée à votre règle de décision.

(c) Quelle serait la puissance du test si le traitement augmentait la capacité respiratoire de 7 patients sur 10.

3. Exercice 3 deux lois 5 points

   Cette fois il va falloir prendre une décision à partir de deux observations i.i.d. (on suppose que l'on dispose d'un échantillon de taille 2). Notre expert habituel affirme que ces observations sont la réalisation d'une loi normale centrée réduite (espérance nulle et variance égale à 1). Une société de consultants extérieurs, inconnue jusque là, prétend elle que ces deux observations suivent une loi uniforme sur l'intervalle [0,2].

   (a) posez les hypothèses du test
   (b) donnez en la justifiant la forme de la région critique.
   (c) proposez une valeur raisonnable pour le seuil de décision pour un risque de première espèce $\alpha^* = 5\%$.
   (d) représentez graphiquement la région critique dans le plan des observations.
   (e) que décidez-vous après avoir observé les valeurs 1,53 et 1,79
   (f) Quelle est la valeur limite de $\alpha$ qui vous aurait fait changer d'avis.

4. Exercice 4 contrôle qualité 5 points

   Une entreprise qui produit un objet technologique complexe (typiquement un bidule), observe que habituellement $p$ =2 % de sa production est défecteuse. Mais que certains jours, un dérèglement apparait dans la production qui porte le taux d'erreur à 6 %. Les spécialistes du contrôle qualité ont proposé le protocole suivant : chaque jour on prélève des appareils au hasard dans la production et on en compte le nombre $K$ qu'il faut prélever avant de touver le premier défectueux. Le but de cet exercice est de formaliser cette procédure et de proposer une règle de décision conforme à la théorie présentée en cours.

   (a) à partir de l'échantillon observé, quel est l'estimateur maximum de vraisemblance de la proportion d'objets défecteux $p$. Est-ce un estimateur efficace ? Sinon existe t'il un estimateur efficace d'une fonction de $p$ ?
   (b) proposez en le justifiant une règle de décision permettant de traiter le problème de contrôle qualité avec un risque de première espèce $\alpha$ de 10%.
   (c) quelle serait la probabilité de laisser passer un mauvais lot (puissance du test).
   (d) aujourd'hui on a observé 7 appareils qui fonctionnaient correctement avant de voir le premier défecteux : la production est-elle correcte ou dérèglée ?
   (e) que pensez vous de cette procédure ?

*rappels :*$1+x+x^2+...+x^{n-1} = \frac{1-x^n}{1-x}$; $S^* = \frac{1}{n_1+n_2-2}\left((n_1-1)S_1^* + (n_2-1)S_2^*\right)$