ASI **Lundi 15 Novembre 1999 - 1h30**

1. Exercice 1 8 points

Soit X une variable aléatoire distribué suivant une loi de bernouilli de paramètre p.

(a) Existe t'il un estimateur efficace de p ?

Soit Y une variable aléatoire distribué suivant une loi de bernouilli de paramètre $p = \sin^2 \theta$, c'est-à-dire tel que :

$$P(Y = 1) = \sin^2 \theta$$

(b) Existe t'il un estimateur efficace de θ ? Existe t'il un estimateur efficace d'une fonction de θ ?

(c) Calculez la borne de Cramer Rao de θ.

(d) Votre voisin vous propose un estimateur de θ dont la variance est égale à 0,33. Que pensez vous de cet estimateur ?

---

2. Exercice 2 Loi de Pareto 7 points

On suppose que le salaire annual brut d'un futur diplomé ASI est une variable aléatoire continue R dont la densité s'exprime en fonciton de deux paramètres r_0 et θ de la façon suivante :

$$f_R(r) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\pi}(r-r_0)} exp(-(ln(r-r_0)-\theta)^2) \text{ si } r > r_0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

(a) On suppose r_0 connu. Trouvez l'estimateur de maximum de vraisemblance $\widehat{\theta}_{\mathrm{MV}}$ de θ. Cet estimateur est-il efficace ? Si oui, donnez sa variance.

(b) On pose $Z = ln(R - r_0)$. Calculez F_Z la fonction de répartition de Z en fonction de F_R celle de R. En déduire la densité f_Z de Z en fonction de la densité de R, puis la loi de $\widehat{\theta}_{\mathrm{MV}}$.

(c) Ayant observé les salaires suivants :
8000 8500 9000 9000 9100 9300 10500 11000 12600 15000,
proposez une valeur raisonnable pour r_0. Calculez l'estimation maximum de vraissemblance de θ. Avez vous une idée de la précision de votre estimation ?

---

3. Exercice 3 7 points

Soit X une variable aléatoire continue dont la densité s'exprime en fonction des trois paramètres a, b et p de la façon suivante :

$$f_X(x) = pf_a(x) + (1-p)f_b(x)$$

où $p \in [0, 1]$ un paramètre inconnu à déterminer f_a et f_b les densité des lois uniformes sur $[0, a]$ et $[0, b]$, a et b étant supposé connus tels que $a < b$.

(a) Montrez que la vraisemblance de paramètre p est :

$$L(x_1, ..., x_n, p) = \left(\frac{p}{a} + \frac{1-p}{b}\right)^y \left(\frac{1-p}{b}\right)^{n-y}$$

où y est le nombre d'observations $< a$

(b) en déduire l'estimateur max de vraisemblance de p

(c) cet estimateur est-il efficace ? Donner sa variance.

(d) En supposant $a = 5$ et $b = 13$ et en ayant observé l'enchantillon suivant : 1 2 2 5 13 4 3 8 11 5 6 3 1 estimer p.