1. Statistique descriptive

Une entreprise de vente des logiciels voudrait déterminer la *fonction affine* ***aX+b*** qui décrit le mieux possible le comportement de **Y** (où Y est le nombre total des licences vendues dans les 3 premières années qui suivent la mise en vente d'un nouveau logiciel), lorsque **X** varie (où X est le nombre des licences vendues dans les 6 premières semaines qui suivent la mise en vente d'un nouveau logiciel). Les coefficients **a** et **b** seraient à déterminer après vérification des 2 pré-conditions requises, sur un échantillon de 12 logiciels reporté ci-dessous.

X	233	31	118	119	193	124	137	67	86	156	124	136
Y	389	68	195	185	302	180	230	91	137	309	183	248

2. Statistique inférentielle

On s'intéresse à l'instant de panne d'un logiciel en cours de test. Soit **N** le nombre total d'erreurs contenues dans le logiciel avant le début de la phase de test, et **i** le nombres d'erreurs déjà détectées. On modélise l'instant de panne du logiciel par une variable aléatoire $\mathbf{T_i}$ de densité de probabilité :

$$f_{T_i}(t) = k(N-i+1)e^{-k(N-i+1)t}$$ où **t > 0** représente le temps et *k* est un paramètre positif.

On suppose N connu et on cherche à estimer le paramètre *k* sur un échantillon $\mathbf{T_1}, \mathbf{T_2}, ..., \mathbf{T_n}$ où on supposera les variables aléatoires $\mathbf{T_i}$ indépendantes.

a) Calculer l'espérance et la variance de T_i. Est-ce que l'échantillon $\mathbf{T_1}, \mathbf{T_2}, ..., \mathbf{T_n}$ est I.I.D. ?

b) Donner l'expression de la fonction de vraisemblance $k \to L(T_1, T_2, \ldots, T_n; k)$, puis déduire l'estimateur $\hat{k}_{MV}$ du *max. de vraisemblance* du paramètre *k*.

c) Est-ce que l'estimateur $\hat{k}_{MV}$ du paramètre *k* est <u>efficace</u> ? Donner $\hat{u}$ un estimateur efficace d'une fonction $u(k)$ de *k*. Calculer le risque statistique associé à cet estimateur $\hat{u}(k)$.

3. Question du cours

Soit $S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$ un estimateur *avec biais* du paramètre $\sigma^2 = var(X)$ d'une variable aléatoire X. A partir de $\forall a \in \mathbb{R}, \sum_{i=1}^{n}(X_i - a)^2 = \sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 + n(\bar{X} - a)^2$ montrer que $E(S^2) = \frac{n-1}{n} var(X)$.

NOTA : Le médian est noté sur 20 points.