

Exercice 1 :

On suppose que le *revenu annuel brut* d'un ingénieur informaticien peut être modéliser par une *variable aléatoire continue* R , dont la densité de probabilité s'exprime en fonction de paramètres r_0 et θ de la manière suivante :

$$f_R(r) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\pi}(r-r_0)} e^{-(\ln(r-r_0)-\theta)^2} & \text{si } r \geq r_0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

(1.1) Déterminer, pour r_0 fixé, l'estimateur $\hat{\theta}_{MV}$ du maximum de vraisemblance du paramètre θ . Cet estimateur est-il efficace ? Si oui, donner sa variance. Calculer sa réalisation sur l'échantillon donné et pour $r_0=150000$.

(1.2) Soit la variable aléatoire $Z = \ln(R - r_0)$. Calculer la fonction de repartition de Z en fonction de θ .

(1.3) En supposant que $2 \frac{nb}{\hat{b}} \sim \chi_{2n}^2$, déterminer la région critique du test suivant pour $\alpha=0,05$ et $a=1500$.

Décider, puis calculer la puissance du test. NOTA : $\sqrt{\chi_{p,\alpha}^2} - \sqrt{2p-1} \approx n_\alpha, p > 100$

(1.4) Est-ce que la règle de décision trouvée ci-dessus garantit une erreur de deuxième espèce β *minimum* pour une erreur de première espèce α *fixée* à $0,05$.

$$\begin{cases} H_0 : b = b_0 = 3.4 \\ H_1 : b = b_1 = 3.6 \end{cases}$$

Exercice 2 :

Le tableau ci-dessous donne les revenus (en euros) d'un échantillon de 7 ingénieurs informaticiens choisis au hasard dans une population donnée avant et après le 11 septembre.

Individu (k)	1	2	3	4	5	6	7
X : Revenu avant (euros)	2850	2380	2930	2860	2320	2740	2470
Y : Revenu après (euros)	2750	2360	2950	2830	2250	2690	2410
T=X-Y							

(2.1) D'après les économistes, les salaires auraient baissés *après* le 11 septembre. Tester cette hypothèse sur l'échantillon ci-dessous avec un niveau de signification $\alpha=0,05$.

(2.2) Montrer que l'on peut admettre l'hypothèse de normalité de la variable aléatoire $T=X-Y$ avec un niveau de signification $\alpha=0,05$. NOTA : Utiliser le test de Kolmogorov-Smirnov avec μ_T et σ_T^2 estimés.

Exercice 3 :

Quel est l'intérêt des tests séquentiels par rapport aux tests non-séquentiels ? Donnez un exemple d'application, autre que celui donné en cours, justifiant la mise en oeuvre d'un test séquentiel. Poser le test, puis déduire l'expression de la règle de décision en explicitant les variables aléatoires et les paramètres qui interviennent.