

UV Traitement du signal

Cours 9

Filtrage numérique

ASI 3

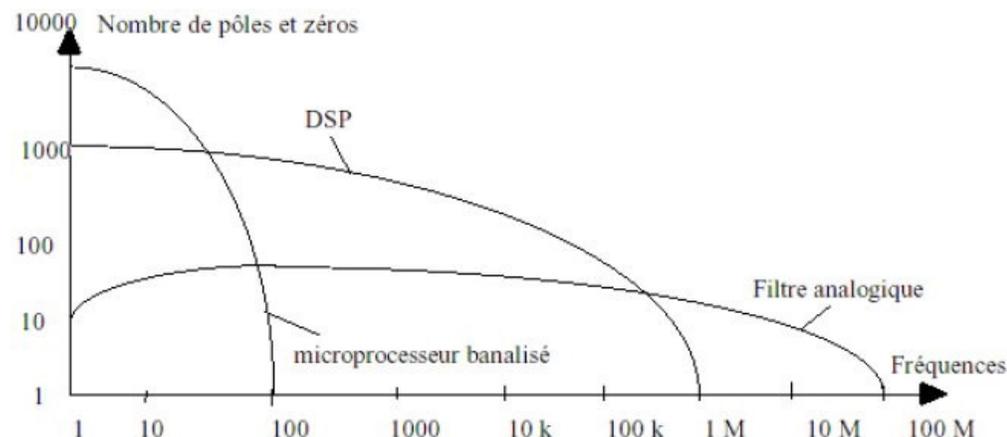
Contenu du cours

- Introduction
- Caractérisations des filtres numériques
 - ◆ Réponse impulsionnelle,
 - ◆ Equation aux différences,
 - ◆ Fonction de transfert en z
- Etude des filtres RIF
 - ◆ Caractéristiques et propriétés
 - ◆ Synthèse des filtres RIF
- Synthèse des filtres RII
 - ◆ Méthode de l'invariance impulsionnelle
 - ◆ Transformation bilinéaire

Pourquoi des filtres numériques ?

□ 2 critères pour comparer :

- ◆ nombre de poles et de zéros
- ◆ rapidité

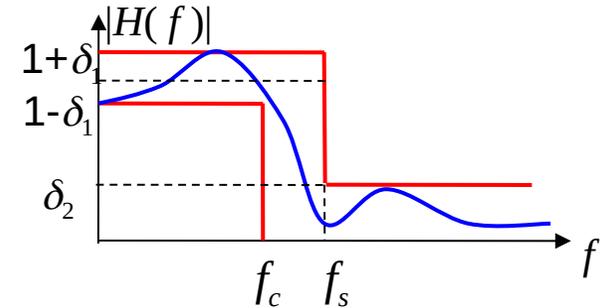


□ Avantages du numérique:

- ◆ Reproductibilité
- ◆ Souplesse (changement de coefficients)
- ◆ Simulations exactes
- ◆ Insensibilité au bruit
- ◆ Stabilité des caractéristiques avec le temps, la T°, etc.

Filtres numériques : problématique

Synthèse de filtres : étant donné un gabarit, comment trouver les coefficients de $h(n)$ ou $H(z)$?



◆ Avec les contraintes suivantes sur $h(n)$: $h(n) = 0 \quad \forall n < 0$

➤ Causalité du filtre

Le filtre est causal ssi la réponse impulsionnelle est causale

➤ Stabilité

Le filtre est stable ssi la réponse impulsionnelle est absolument sommable $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h(n)| < \infty$

◆ Pour $H(z)$, les contraintes sont :

Un filtre numérique linéaire et causal est stable ssi tous les pôles $\lambda_i \in \mathbb{C}$ de $H(z)$ sont à l'intérieur du cercle unité

En considérant un filtre causal, la RDC est donnée par $RDC = \{z \in \mathbb{C} / |z| > \max(|\lambda_i|)\}$

Comment réaliser le filtre ?

La méthodologie dépend du type de filtre : RIF ou RII

Caractérisations d'un filtre numérique



➤ Problème : $h(n)$ potentiellement infini !

□ Deux solutions = deux types de filtres

◆ Réponse impulsionnelle finie (RIF) : limitation à M du nombre d'échantillons

➤ Réponse impulsionnelle : Filtre causal => $y(n) = h(n) * x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) x(n-k)$ *Toujours stables*

➤ Equation aux différences : $N=0$ => $y(n) = \sum_{r=0}^M b_r x(n-r)$ *réponse non réursive*

◆ Réponse impulsionnelle infinie (RII) : mémorisation des sorties

➤ Réponse impulsionnelle infinie : Filtre causal => $y(n) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k) x(n-k)$ *stabilité à vérifier*

➤ Mémorisation du signal de sortie => la réponse impulsionnelle infinie peut se calculer en un temps fini

➤ Équation aux différences : $N \geq 1$ => $y(n) = -\sum_{k=1}^N a_k y(n-k) + \sum_{r=0}^M b_r x(n-r)$ *réponse réursive*

Filtre à réponse impulsionnelle finie (RIF)

□ Propriétés

◆ Stabilité inconditionnelle

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} b_n z^{-n}$$

Les filtres à réponse impulsionnelle finie sont toujours stables car ils n'admettent pas de pôles.

◆ Approximation

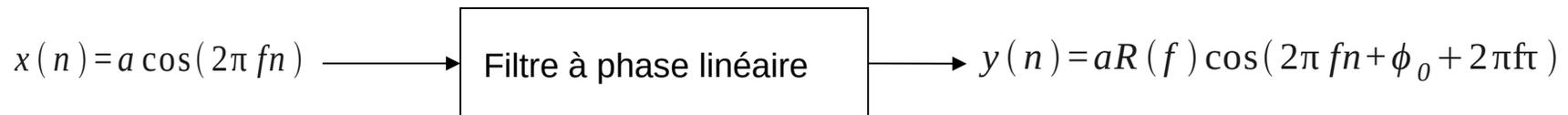
Toute fonction de filtrage numérique stable et causale peut être approchée par la fonction de transfert d'un filtre RIF

◆ Phase linéaire

Les filtres RIF peuvent générer des filtres à phase linéaire

Si un filtre est à phase linéaire, sa réponse fréquentielle est de la forme

$$H(f) = R(f) e^{-j\phi(f)} \quad \text{ou} \quad \phi(f) = \phi_0 + 2\pi f\tau \quad \text{Avec } \tau : \text{ constante}$$



On montre qu'un filtre FIR est à phase linéaire si ses coefficients sont symétriques

$$h(n) = h(N - 1 - n)$$

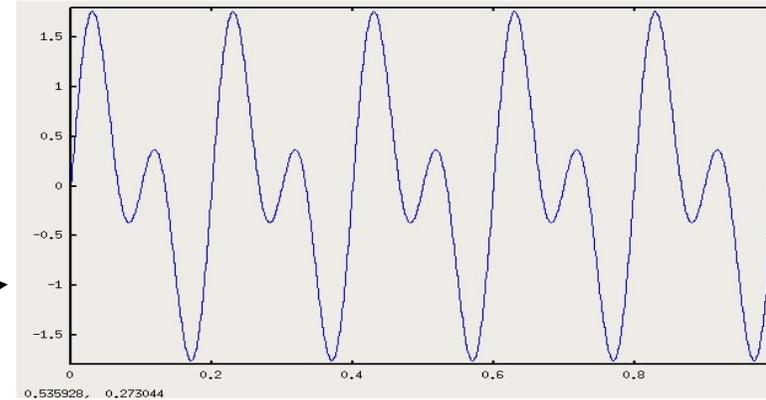
Filtre à réponse impulsionnelle finie (RIF)

Exemple de filtre à phase linéaire/non linéaire

f0 = 1
t=0:0.001:1;

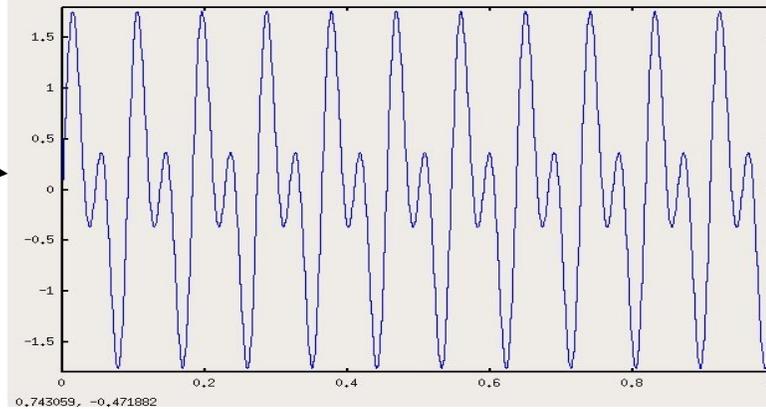
% soit le signal x :

```
x=sin(2*pi*f0*t) + sin(4*pi*f0*t);  
plot (t,x);
```



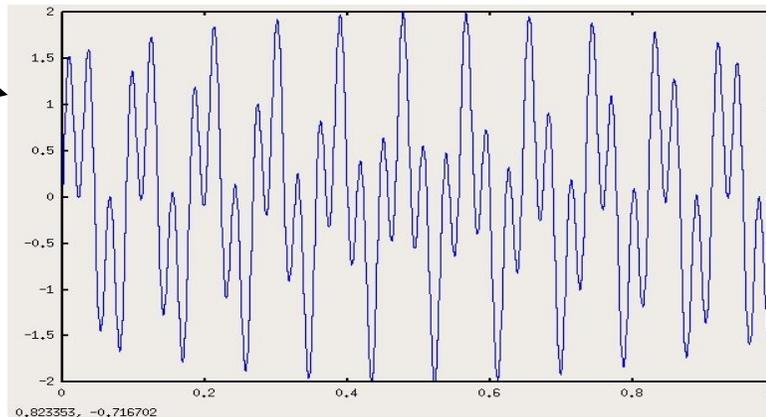
% déphasage linéaire : f -> 2f+1

```
x=sin(2*pi*(2*f0+1)*t) + sin(4*pi*(2*f0+1)*t);  
plot (t,x);
```



% déphasage non linéaire :

```
x=sin(2*pi*(2*f0+1)*t) + sin(4*pi*(2*f0+7)*t);  
plot (t,x);
```



- Déphasage linéaire : conserve l'allure générale du signal
- Déphasage non linéaire : modifie totalement le signal

Filtre à réponse impulsionnelle finie (RIF)

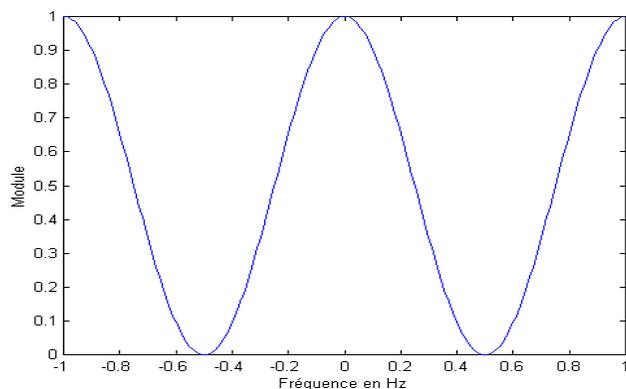
Exemple

Soit le filtre défini par la relation entrée-sortie suivante : $y(n) = \frac{1}{4}(x(n) + 2x(n-1) + x(n-2))$

Réponse impulsionnelle

$$h(n) = \frac{1}{4}(\delta(n) + 2\delta(n-1) + \delta(n-2)) \quad \xrightarrow{\text{(Voir TD)}} \quad H(f) = e^{-j2\pi f} \cos^2(\pi f)$$

• Module $|H(f)| = \cos^2(\pi f)$

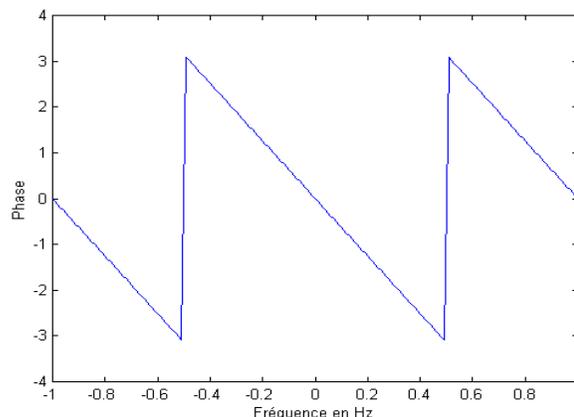


Filtre passe-bas

Réponse fréquentielle

$$H(f) = e^{-j2\pi f} \cos^2(\pi f)$$

• Phase $\arg(H(f)) = -2\pi f$



On remarque que la phase est linéaire par rapport à f

Il existe de nombreuses méthodes de synthèse de filtre RIF :

- ◆ Méthode de la fenêtre, Optimisation par moindres carrés, Calcul des coefficients par approximation de tchebycheff, Par TFD récursive, etc.

Synthèse de filtre RIF

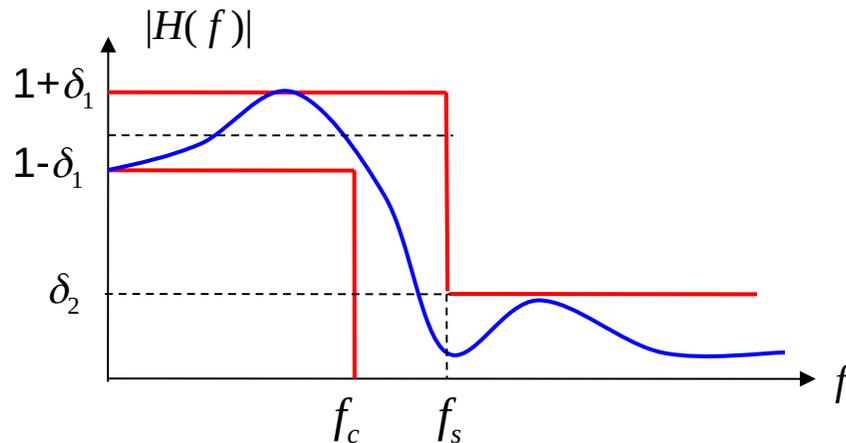
□ Méthode de la fenêtre

■ Problématique

A partir du gabarit fréquentiel, effectuer la synthèse d'un **filtre RIF réalisable** (causalité) à phase linéaire → contrainte de symétrie des coefficients

$$h(n) = h(N - 1 - n) \quad \text{avec} \quad 0 \leq n \leq \frac{N-1}{2}$$

■ Gabarit réel continu



Filtre caractérisé par :

- la bande passante BP
- la bande atténuée (ou coupée)
- la largeur ΔF de la zone de transition
- l'amplitude des oscillations en bande passante δ_1
- l'amplitude des ondulations en bande atténuée δ_2

$\Delta F = f_s - f_c$: largeur de la bande de transition

Synthèse de filtre RIF

□ Méthode de la fenêtre : méthodologie

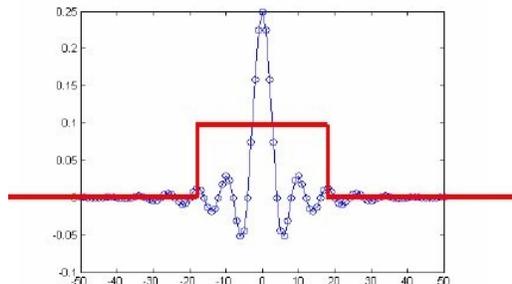
- A partir du **gabarit réel** du filtre, déterminer la longueur de la RIF : $N \approx \frac{2}{3} \log_{10} \left(\frac{1}{10 \delta_1 \delta_2} \right) \frac{F_e}{\Delta f}$
(rmq : bande de transition + importante que les oscillations)
- A partir du **gabarit idéal** du filtre, on peut déterminer les coefficients du filtre par TFTD⁻¹.

$$h(n) = \int_{-1/2}^{1/2} H(f) e^{j2\pi fn} df$$

$h(n)$ symétrique car $H(f)$ réel \rightarrow phase linéaire
en revanche, $h(n)$ est potentiellement infini

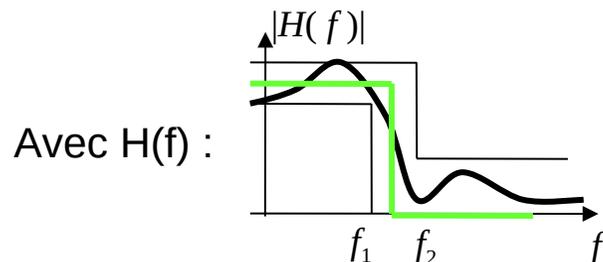
➤ Limitation de la réponse impulsionnelle à N échantillons (troncature)

Pondération de la réponse impulsionnelle idéale $h(n)$ par une suite discrète $w(n)$: $h_N(n) = h(n) \cdot w(n)$



Exemple : $w(n)$ est la fenêtre rectangulaire.
En fréquence, on a donc :

$$H_N(f) = H(f) * W(f) \quad \text{avec} \quad W(f) = \frac{\sin(N\pi f)}{\sin(\pi f)}$$



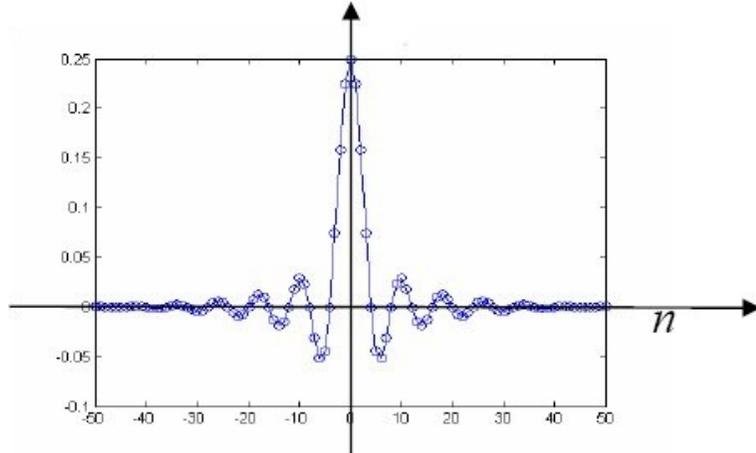
$$h(n) = \int_{-Fe/2}^{Fe/2} H(f) e^{j2\pi fn} df \longrightarrow h(n) = \int_{-B/2}^{B/2} H(f) e^{j2\pi fn} df \quad \text{avec} \quad B = \frac{f_1 + f_2}{2}$$

$$\longrightarrow h(n) = \frac{\sin(\pi Bn)}{\pi n}$$

Synthèse de filtre RIF

□ Méthode de la fenêtre : méthodologie

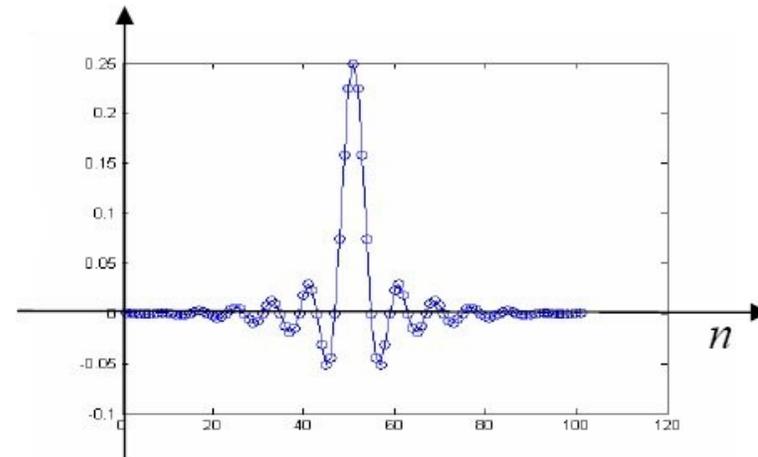
- On a trouvé la réponse $h_N(n)$, mais celle ci est centrée sur 0
- Donc elle n'est pas causale !



Facile à implémenter car numérique.
(mémoires à décalage)

Solution :

En la retardant de $N/2$
échantillons, la réponse
impulsionnelle devient causale !



Mathématiquement, cela revient à multiplier $H_N(f)$ par un exponentiel complexe

=> déphasage, mais déphasage linéaire $\pi N f$

Synthèse de filtre RIF

□ Méthode de la fenêtre : effets de la limitation du nombre d'échantillons à N

$$h_N(n) = h(n) \cdot w(n)$$

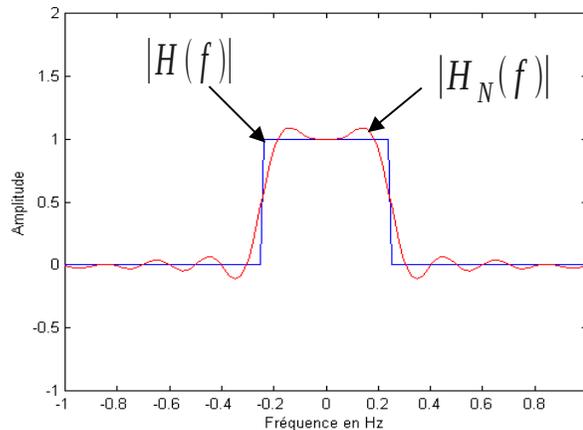
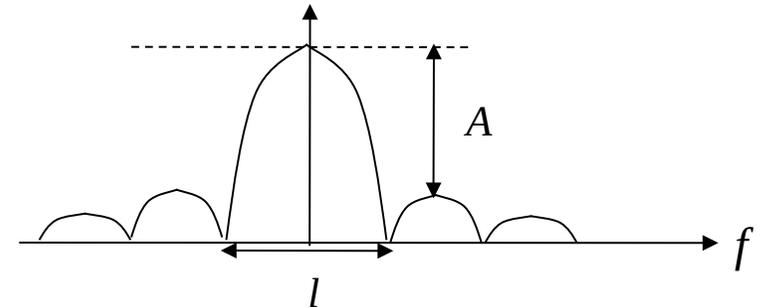
$$H_N(f) = H(f) * W(f)$$

Fenêtre de pondération

Réponse idéale

Réponse obtenue par limitation du nb d'échantillon à N

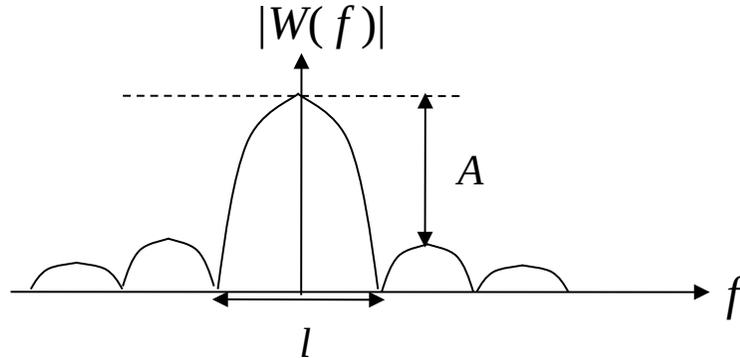
- Allure de $W(f)$ pour une fenêtre rectangulaire



- La pondération temporelle introduit des ondulations et limite la raideur de coupure du filtre. Un compromis est à faire entre la raideur et l'amplitudes des ondulations.
- Cette méthode donne des ondulations de même amplitude dans la bande passante et dans la bande atténuée.

Synthèse de filtre RIF : méthode de la fenêtre

Choix de la fenêtre de pondération



Critères de qualité :

l : largeur du lobe principal

A : amplitude des lobes secondaires

Remarque

Relation entre la longueur N de la fenêtre et la bande de transition ΔF du filtre obtenu

$$N \cdot \Delta F = c^{ste}$$

	A_{dB}	l	ΔF	δ_2 (dB)
Rectangulaire	-13	$4/N$	$0.9/N$	-21
Hanning	-31	$8/N$	$3.1/N$	-44
Hamming	-41	$8/N$	$3.3/N$	-53
Blackman	-57	$12/N$	$5.5/N$	-74

Propriétés des fenêtres

- ① Si N croît, l décroît \rightarrow bande de transition ΔF faible
- ② A est indépendant de la longueur de la fenêtre
- ③ On ne peut pas réduire simultanément A et l

Réglages

- ① δ_2 désirée \rightarrow choix type de fenêtre
- ② ΔF désirée \rightarrow choix de N

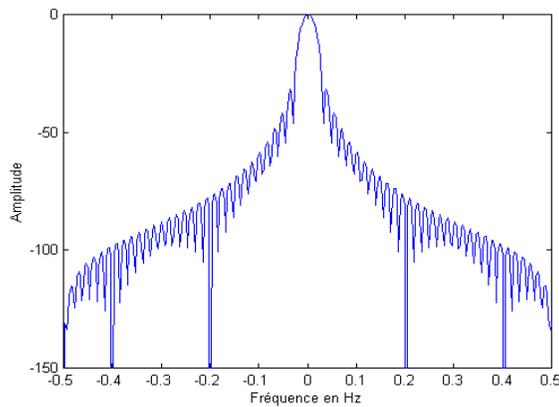
Synthèse de filtre RIF : méthode de fenêtre

Choix de la fenêtre

- Types de fenêtre utilisée de longueur N ou d'ordre $N-1$

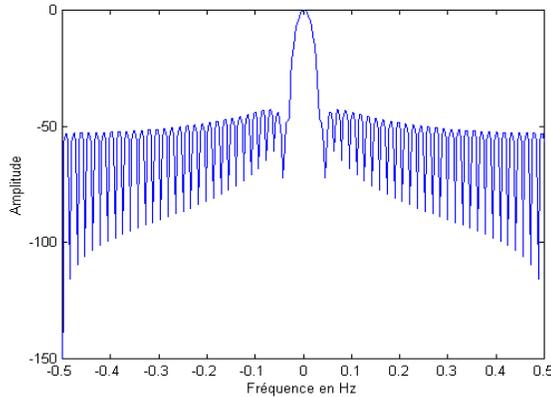
Hanning

$$w(n) = 0.5 - 0.5 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right)$$



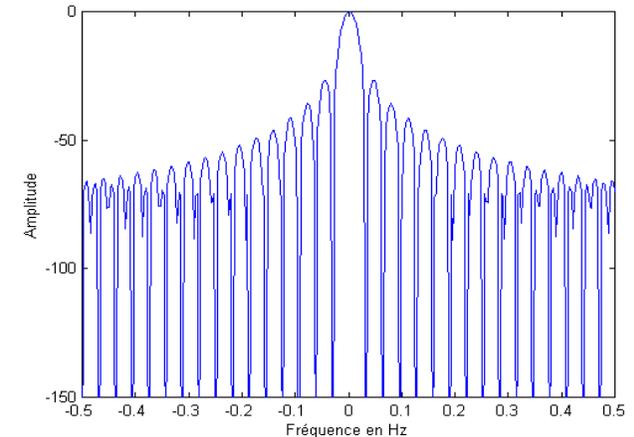
Hamming

$$w(n) = 0.54 - 0.46 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right)$$



Bartlett

$$w(n) = 1 - \frac{2\left(n - \frac{N-1}{2}\right)}{N-1}$$



Synthèse de filtre RIF

□ Il existe d'autres méthodes :

◆ Méthode itérative par TFD :

- Initialiser $h(n)$ sur N points au hasard
- 1) Calculer la TFD sur N_0 points avec $N_0 > N$, et forcer les valeurs de $H(k)$ n'étant pas dans le gabarit
- 2) Faire une TFD^{-1} sur N_0 points et ne conserver que N points autour de l'origine
- 3) recommencer en 1) jusqu'à ce qu'un critère d'erreur soit satisfait

=> Démo !

◆ Moindres carrés

- Idée : calculer les coefficients de $h(n)$ de manière à ce que la fonction de transfert approche la fonction voulue par un critère de moindres carrés.

◆ Calcul des coefficients par approximation de tchebycheff

- Approximation de la fonction de transfert par un polynôme au sens de tchebycheff, ce qui permet d'obtenir des ondulations d'amplitude constante

◆ ...

Réalisation des filtres numériques

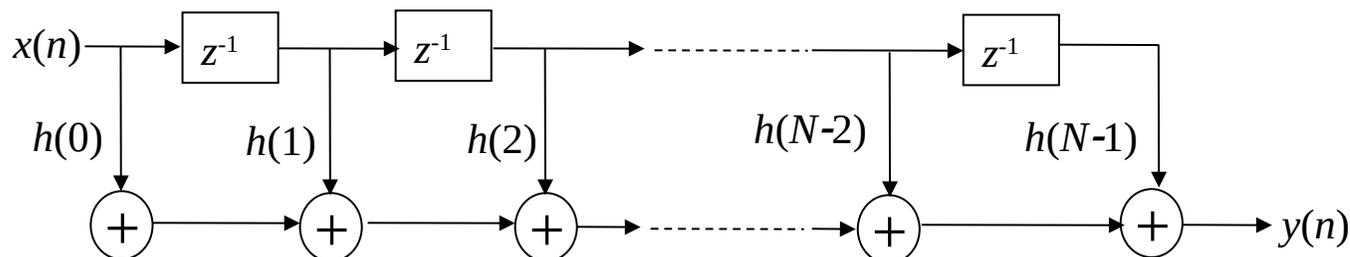
□ Réalisation de filtres RIF

◆ Filtre causal à réponse impulsionnelle finie de longueur N :
$$y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(n-k)h(k)$$

◆ 3 opérations élémentaires :

- Retard (registre à décalage)
- Opérateurs arithmétiques + et *
- Registres pour la pondération

◆ Réalisation non-réursive



Filtre à réponse impulsionnelle infinie (RII)

□ Synthèse des filtres RII

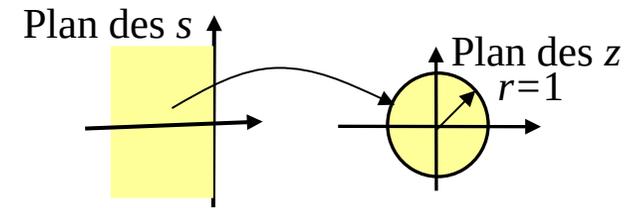
■ Principe

- Calculer un filtre analogique $H(s)$
- Transformer le filtre analogique en un filtre numérique équivalent $H(z)$

■ Contraintes

- Transformer une fraction rationnelle $H(s)$ en une fraction rationnelle $H(z)$
- Conserver la stabilité du filtre analogique

- Transformer le demi-plan complexe gauche en l'intérieur du cercle unité
- Transformer l'axe des imaginaires en cercle unité



■ Méthodes

- Conservation de la réponse impulsionnelle du filtre analogique ("numérisation")
- Transformation bilinéaire

Filtre RII : synthèse

□ Méthode de l'invariance impulsionnelle

- Principe : passer de la TL à la TZ équivaut à échantillonner la réponse impulsionnelle d'un filtre analogique connu

$$H_a(s) \xrightarrow{\text{TL}^{-1}} h_a(t) \xrightarrow{\text{échantillonnage}} h_d(nT_e) = h_a(t)|_{t=nT_e}$$

■ Réponse en fréquence

L'échantillonnage de $h_a(t)$ entraîne une périodisation du spectre $H_d(f) = \frac{1}{T_e} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} H_a\left(f + \frac{k}{T_e}\right)$

Condition de Shannon à respecter par conséquent

- Pôles : Correspondance entre les pôles de $H(s)$ et les pôles de $H(z)$: $b \rightarrow e^{bT_e}$

Exemple : soit le filtre analogique défini par :

$$H(s) = \frac{1}{s-b} \xrightarrow{\text{TL}^{-1}} h(t) = e^{bt} \xrightarrow{\text{échantillonnage}} h(nT_e) = e^{bnT_e} \xrightarrow{\text{TZ}} H(z) = \frac{1}{1 - e^{bT_e} z^{-1}} = \frac{z}{z - e^{bT_e}}$$

Si $\text{Re}(b) < 0$, alors $|\exp(b)| < 1$: conservation de la stabilité

remarque : il n'est pas nécessaire de passer par $h(nT_e)$, qui est infini !

■ Précautions

La réponse du filtre numérique sera proche de celle du filtre analogique dans la bande $[-F_e/2, F_e/2]$ si le filtre analogique a une réponse fréquentielle nulle en dehors de cette bande. Cette méthode est utile seulement dans le cas de filtres analogiques à bande limitée.

Filtre RII : synthèse

Transformation bilinéaire

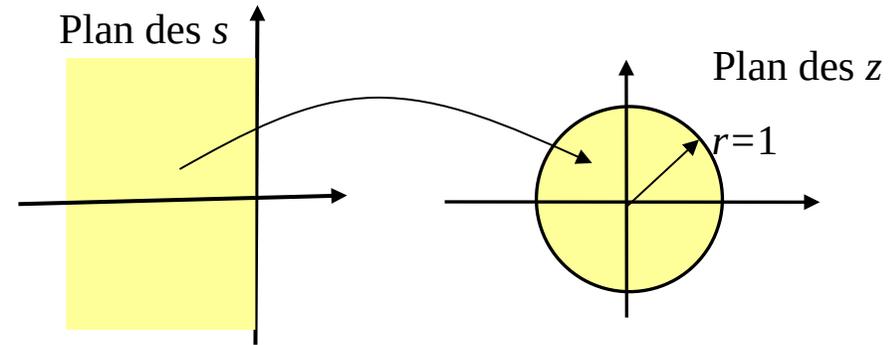
Passer de $H(s) \rightarrow H(z)$ avec $s = \frac{2}{T_e} \cdot \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$ (1)

T_e : fréquence d'échantillonnage

Pôles

$$z = \frac{2/T_e + s}{2/T_e - s}$$

Si s a une partie réelle négative, z est de module inférieur à 1 \Rightarrow conservation de la stabilité



Déformation des fréquences

La transformation entraîne une relation non linéaire entre les fréquences f_a du domaine analogique et les fréquences f_d du domaine numérique : Distortion harmonique

$$\pi f_a = \frac{1}{T_e} \tan(\pi f_d T_e) \quad (2)$$

$$f_d = \frac{1}{\pi T_e} \tan^{-1}(\pi f_a T_e) \quad (3)$$

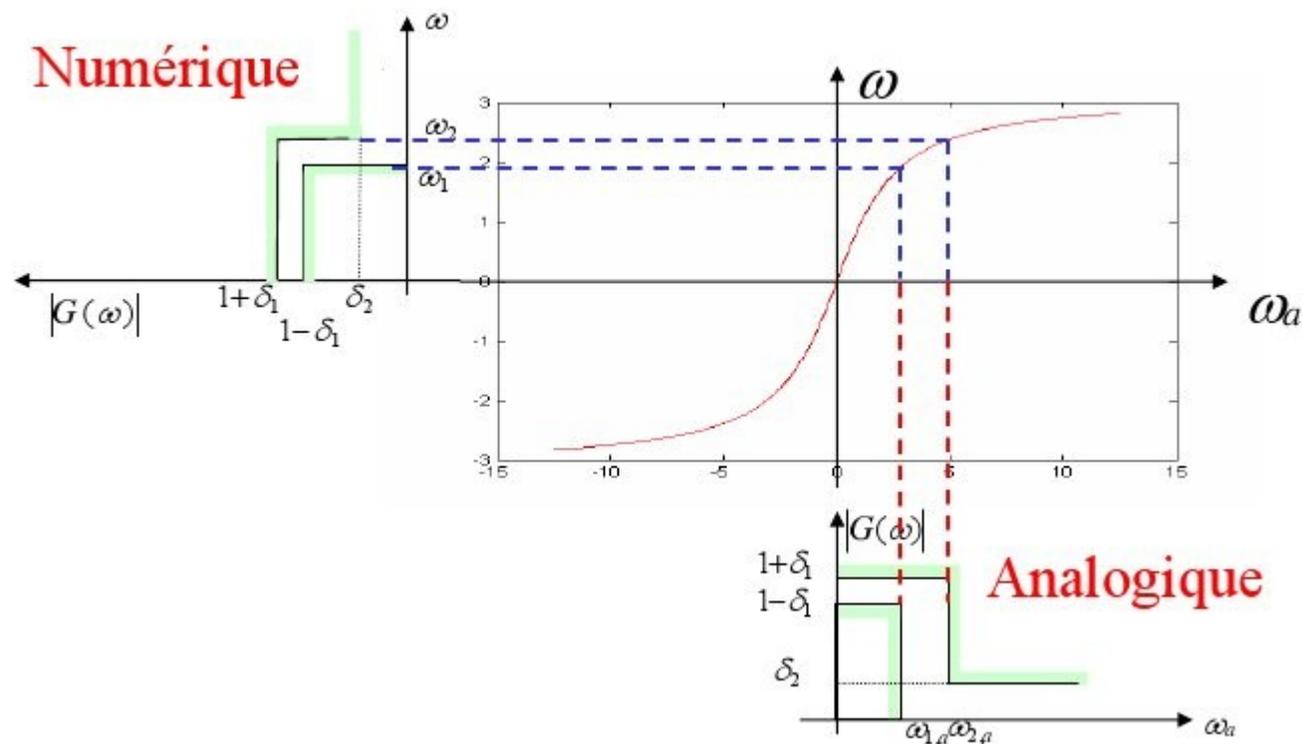
Méthodologie

- Définir le gabarit du filtre numérique
- Convertir ce gabarit en un gabarit correspondant au filtre analogique par la relation (2)
- Faire la synthèse du filtre analogique (Butterworth, Tchebychev ...) $\rightarrow H_a(s)$
- Transformer $H_a(s)$ en $H_d(z)$ en utilisant (1)

Filtre RII : synthèse

Transformation bilinéaire

Illustration de la déformation des fréquences



$$\pi f_a T_e = \frac{1}{T_e} \tan(\pi f_d T_e)$$
$$\downarrow$$
$$f_d = \frac{1}{\pi T_e} \tan^{-1}(\pi f_a T_e)$$

Transformation bilinéaire

Exemple

On utilise des fonctions modèles classiques de types filtres de Butterworth, Tchebychev....

Soit un filtre de Butterworth analogique

$$H(s) = \frac{\omega_c^2}{s^2 + \sqrt{2}\omega_c s + \omega_c^2}$$

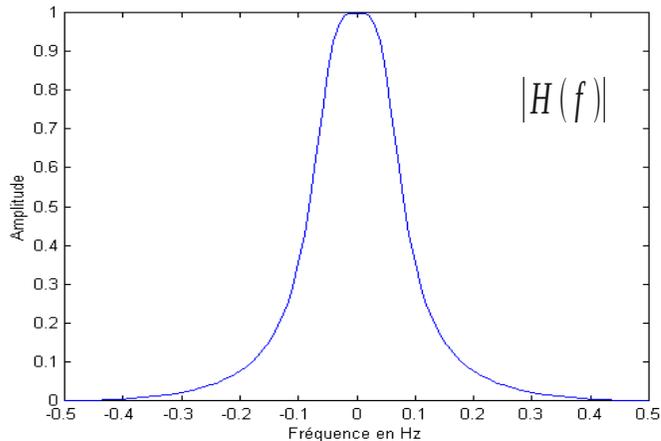
On applique la transformation bilinéaire

$$s = \frac{2}{T_e} \cdot \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$$

Après calcul et en prenant $\omega_c = 2$

$T_e = 2$

$$H(z) = \frac{0.0302(z^2 + 2z + 1)}{z^2 - 1.4514z + 0.5724}$$



Fréquence de coupure du filtre analogique

$$F_c = 0.318 \text{ Hz}$$

Fréquence de coupure du filtre numérique

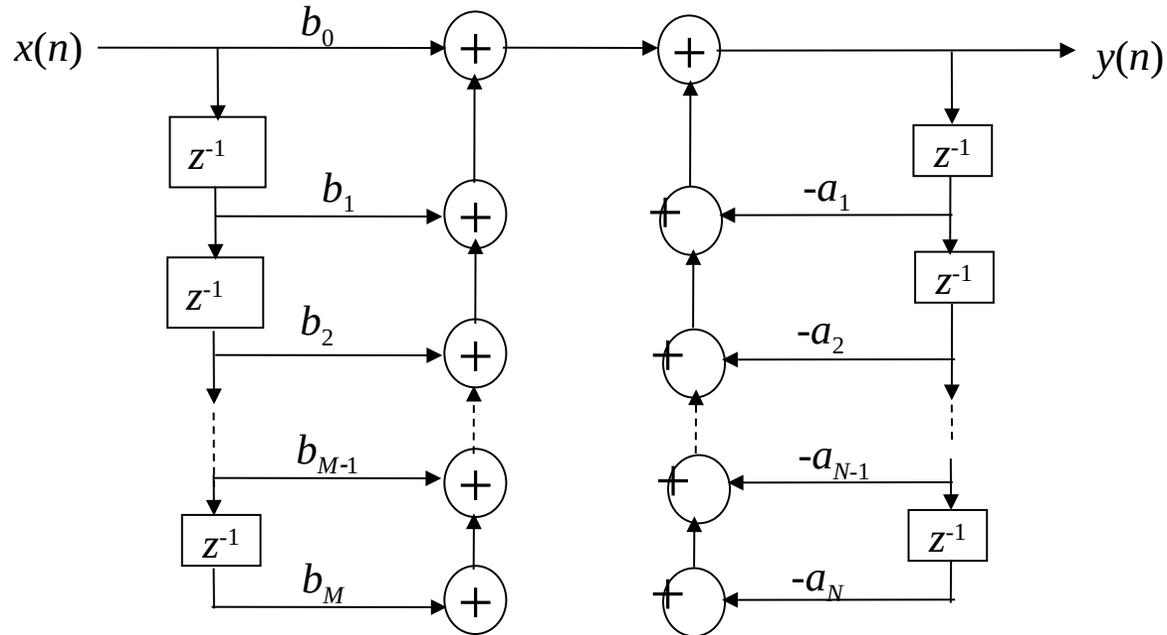
$$F_c = \frac{1}{2\pi} \tan^{-1}(0.318 * 2\pi) \longrightarrow F_c = 0.176 \text{ Hz}$$

Classification des filtres numériques

□ Réalisation des filtres

◆ Réalisation récursive

Filtre causal à réponse impulsionnelle infinie :
$$y(n) = -\sum_{k=1}^N a_k y(n-k) + \sum_{r=0}^M b_r x(n-r)$$



Comparaison RIF - RII

- Conclusion sur les filtres

RIF

Toujours stable.
Phase linéaire.
Facile à concevoir.
La durée des transitoires = longueur du filtre.

RII

Peuvent être instables.
Phase non linéaire.
Nécessitent moins d'opérations et de places mémoires.
Plus efficaces que RIF

- Bibliographie

1. S. Mitra, "Digital Signal Processing : A computer based approach", McGraw Hill Edt, 1998.
2. Y. Thomas, "Signaux et Systèmes Linéaires", Edition Masson, 1994.
3. M. Bellanger, " Traitement numérique du signal", Edition Dunod, 1993.
4. G. Blanchet, M. Charbit "Traitement numérique du signal", Edition Hermès, 1998
5. A. Quinquis "Le traitement du signal sous Matlab", Edition Hermès, 2000

Table de la TZ

$x(n)$	$X(z)$	Région de convergence
$\delta(n)$	1	tous z
$u(n)$	$\frac{1}{1 - z^{-1}}$	$ z > 1$
$a^n u(n)$	$\frac{1}{1 - az^{-1}}$	$ z > a $
$na^n u(n)$	$\frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2}$	$ z > a $
$-a^n u(-n - 1)$	$\frac{1}{1 - az^{-1}}$	$ z < a $
$-na^n u(-n - 1)$	$\frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2}$	$ z < a $

Exercice

Soit un système linéaire

Lorsqu'on présente l'entrée $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n \Gamma(n) + 2^n \Gamma(-n-1)$

La sortie est : $y[n] = 6\left(\frac{1}{2}\right)^n \Gamma(n) - 6\left(\frac{3}{4}\right)^n \Gamma(n)$

Calculer la FT du système et déterminer si le système est stable et causal

On doit trouver : $H(z) = \frac{z-2}{z-3/4} \quad 3/4 < |z| < 2$

Le pôle est à l'intérieur du cercle unité → stable.

La RDC est une couronne → système causal