

- Durée : 1h30
- Calculatrice autorisée
- Documents autorisés :
 - formulaire (signé)
 - votre voisin n'est pas un document
- Barème indicatif sur 20 points
- **Les parties (1) et (2) sont à rendre sur des feuilles séparées**

1 Il pleut, il pleut ... (12 pts)

Des nuages ont été aléatoirement traités avec du nitrate d'argent. Le montant de pluie correspondant à ces nuages a ensuite été enregistré. Le but de l'expérience est de déterminer si le traitement des nuages augmente le niveau de précipitation.

Non traités	1202.6	830.1	372.4	345.5	321.2	244.3	163.0	147.8	95.0
	87.0	81.2	68.5	47.3	41.1	36.6	29.0	28.6	26.3
	26.1	24.4	21.7	17.3	11.5	4.9	4.9	1.0	
Traités	2745.6	1697.8	1656.0	978.0	703.4	489.1	430.0	334.1	302.8
	274.7	274.7	255.0	242.5	200.7	198.6	129.6	119.0	118.3
	115.3	92.4	40.6	32.7	31.4	17.5	7.7	4.1	

TAB. 1 – Niveau de perturbation pour les 2 types de nuages (non traités et traités)

1. Description

- (a) (2 points) Tracer l'histogramme respectif de chaque série de mesures (non traité et traité) en prenant un découpage en classes de la forme $[0 : 250 : 2750]$. Calculer la réalisation de la moyenne et l'écart-type empiriques pour ces deux séries de mesures (à partir des données brutes).
- (b) (2 points) Effectuer une transformation logarithmique sur les données du tableau 1. Tracer les histogrammes correspondants (découpage $[0 : 1 : 8]$) et calculer la réalisation des moyennes et écart-types empiriques (à partir des données brutes transformées).
- (c) (2 points) Tracer la "boite à moustaches" de ces données transformées.

2. Influence du traitement ?

- (a) (3 points) Soit X la variable qualitative correspondant à la présence du traitement et Y la variable continue correspondant à la quantité de pluie (après transformation logarithmique). Calculer le rapport de corrélation $S_{Y/X}$ et déterminer si le traitement a eu une influence sur les précipitations.
- (b) (3 points) En supposant maintenant que les données (transformées) de la série "traitée" (resp. non traitée) sont la réalisation d'un échantillon d'une variable aléatoire Y_t (resp. Y_{nt}) de loi normale $N(\mu_t, \sigma_t^2)$ (resp. $N(\mu_{nt}, \sigma_{nt}^2)$), quelle est la probabilité que la quantité de pluie moyenne des nuages non traités soit supérieure à celle des nuages traités.

2 Estimateurs efficaces... (8 pts)

Soit une variable aléatoire X , dont la loi dépend d'un paramètre θ . Soient T_1 et T_2 deux estimateurs indépendants de θ , sans biais, de variances respectives σ_1^2 et σ_2^2 . On considère l'estimateur $T_3 = aT_1 + (1 - a)T_2$ ($a \in \mathbf{R}$).

1. (2 points) T_3 est-il sans biais ?
2. (3 points) Pour quelle valeur de a la variance de T_3 est-elle minimale ?
3. (3 points) Les hypothèses de Cramer-Rao étant vérifiées, on suppose que T_1 et T_2 sont efficaces. Exprimer la variance de T_3 . Dédurre que 2 estimateurs indépendants T_1 et T_2 de θ ne peuvent être tous deux efficaces.

3 Distribution et répartition de la loi $N(0,1)$ (p.1/2)

z	$f(z)$	$F(z)$	z	$f(z)$	$F(z)$
0.0	0.39894	0.50000	0.40	0.36827	0.65542
0.01	0.39892	0.50399	0.41	0.36678	0.65910
0.02	0.39886	0.50798	0.42	0.36526	0.66276
0.03	0.39876	0.51197	0.43	0.36371	0.66640
0.04	0.39862	0.51595	0.44	0.36213	0.67003
0.05	0.39844	0.51994	0.45	0.36053	0.67364
0.06	0.39822	0.52392	0.46	0.35889	0.67724
0.07	0.39797	0.52790	0.47	0.35723	0.68082
0.08	0.39767	0.53188	0.48	0.35553	0.68439
0.09	0.39733	0.53586	0.49	0.35381	0.68793
0.10	0.39695	0.53983	0.50	0.35207	0.69146
0.11	0.39654	0.54380	0.51	0.35029	0.69497
0.12	0.39608	0.54776	0.52	0.34849	0.69847
0.13	0.39559	0.55172	0.53	0.34667	0.70194
0.14	0.39505	0.55567	0.54	0.34482	0.70540
0.15	0.39448	0.55962	0.55	0.34294	0.70884
0.16	0.39387	0.56356	0.56	0.34105	0.71226
0.17	0.39322	0.56749	0.57	0.33912	0.71566
0.18	0.39253	0.57142	0.58	0.33718	0.71904
0.19	0.39181	0.57535	0.59	0.33521	0.72240
0.20	0.39104	0.57926	0.60	0.33322	0.72575
0.21	0.39024	0.58317	0.61	0.33121	0.72907
0.22	0.38940	0.58706	0.62	0.32918	0.73237
0.23	0.38853	0.59095	0.63	0.32713	0.73565
0.24	0.38762	0.59483	0.64	0.32506	0.73891
0.25	0.38667	0.59871	0.65	0.32297	0.74215
0.26	0.38568	0.60257	0.66	0.32086	0.74537
0.27	0.38466	0.60642	0.67	0.31874	0.74857
0.28	0.38361	0.61026	0.68	0.31659	0.75175
0.29	0.38251	0.61409	0.69	0.31443	0.75490
0.30	0.38139	0.61791	0.70	0.31225	0.75804
0.31	0.38023	0.62172	0.71	0.31006	0.76115
0.32	0.37903	0.62552	0.72	0.30785	0.76424
0.33	0.37780	0.62930	0.73	0.30563	0.76730
0.34	0.37654	0.63307	0.74	0.30339	0.77035
0.35	0.37524	0.63683	0.75	0.30114	0.77337
0.36	0.37391	0.64058	0.76	0.29887	0.77637
0.37	0.37255	0.64431	0.77	0.29659	0.77935
0.38	0.37115	0.64803	0.78	0.29431	0.78230
0.39	0.36973	0.65173	0.79	0.29200	0.78524

Distribution et répartition de la loi $N(0,1)$ (p.2/2)

z	$f(z)$	$F(z)$
0.80	0.28969	0.78814
0.81	0.28737	0.79103
0.82	0.28504	0.79389
0.83	0.28269	0.79673
0.84	0.28034	0.79955
0.85	0.27798	0.80234
0.86	0.27562	0.80511
0.87	0.27324	0.80785
0.88	0.27086	0.81057
0.89	0.26848	0.81327
0.90	0.26609	0.81594
0.91	0.26369	0.81859
0.92	0.26129	0.82121
0.93	0.25888	0.82381
0.94	0.25647	0.82639
0.95	0.25406	0.82894
0.96	0.25164	0.83147
0.97	0.24923	0.83398
0.98	0.24681	0.83646
0.99	0.24439	0.83891
1.00	0.24197	0.84134
1.01	0.23955	0.84375
1.02	0.23713	0.84614
1.03	0.23471	0.84849
1.04	0.23230	0.85083
1.05	0.22988	0.85314
1.06	0.22747	0.85543
1.07	0.22506	0.85769
1.08	0.22265	0.85993
1.09	0.22025	0.86214
1.10	0.21785	0.86433
1.11	0.21546	0.86650
1.12	0.21307	0.86864
1.13	0.21069	0.87076
1.14	0.20831	0.87286
1.15	0.20594	0.87493
1.16	0.20357	0.87698
1.17	0.20121	0.87900
1.18	0.19886	0.88100
1.19	0.19652	0.88298

z	$f(z)$	$F(z)$
1.20	0.19419	0.88493
1.21	0.19186	0.88686
1.22	0.18954	0.88877
1.23	0.18724	0.89065
1.24	0.18494	0.89251
1.25	0.18265	0.89435
1.26	0.18037	0.89617
1.27	0.17810	0.89796
1.28	0.17585	0.89973
1.29	0.17360	0.90147
1.30	0.17137	0.90320
1.31	0.16915	0.90490
1.32	0.16694	0.90658
1.33	0.16474	0.90824
1.34	0.16256	0.90988
1.35	0.16038	0.91149
1.36	0.15822	0.91308
1.37	0.15608	0.91466
1.38	0.15395	0.91621
1.39	0.15183	0.91774
1.40	0.14973	0.91924
1.41	0.14764	0.92073
1.42	0.14556	0.92220
1.43	0.14350	0.92364
1.44	0.14146	0.92507
1.45	0.13943	0.92647
1.46	0.13742	0.92785
1.47	0.13542	0.92922
1.48	0.13344	0.93056
1.49	0.13147	0.93189
1.50	0.12952	0.93319
1.51	0.12758	0.93448
1.52	0.12566	0.93574
1.53	0.12376	0.93699
1.54	0.12188	0.93822
1.55	0.12001	0.93943
1.56	0.11816	0.94062
1.57	0.11632	0.94179
1.58	0.11450	0.94295
1.59	0.11270	0.94408

z	$f(z)$	$F(z)$
1.60	0.11092	0.94520
2.00	0.05399	0.97725
2.50	0.01753	0.99379
3.00	0.00443	0.99865
3.50	0.00087	0.99977
4.00	0.00014	1.00000