

- Durée : 1h30
- Calculatrice autorisée
- Documents autorisés :
  - formulaire (signé)
  - votre voisin n'est pas un document
- Barème indicatif sur 20 points
- **Les parties (1) et (2) sont à rendre sur des feuilles séparées**

### 1 Densité de la Terre (13 pts)

En 1798, Henry Cavendish a réalisé plusieurs séries d'expériences pour mesurer la densité de la Terre à l'aide d'une balance à torsion. Il a obtenu les 29 mesures reproduites dans le tableau 1 (Dans la 3<sup>ème</sup> question, nous supposerons que ces expériences ont été réalisées pendant 3 jours différents  $J_1, J_2, J_3$ ).

$J_1$	5.50	5.57	5.42	5.61	5.53	5.47	4.88	5.62	5.63	4.07
$J_2$	5.29	5.34	5.26	5.44	5.46	5.55	5.34	5.30	5.36	5.79
$J_3$	5.75	5.29	5.10	5.86	5.58	5.27	5.85	5.65	5.39	

TAB. 1 – Densité de la Terre mesurée lors des 29 expériences

#### 1. Description

- (a) (1 point) Tracer l'histogramme de cette série de mesures (en prenant par exemple un découpage en classes de la forme  $[4 : 0.2 : 6]$ ).
- (b) (2 points) Tracer la "boite à moustaches" de ces données.
- (c) (1 point) Calculer la moyenne et l'écart-type empiriques pour ces mesures.

#### 2. Détection des mesures aberrantes

- (a) (1 point) A l'aide de la question précédente, comment pouvez-vous simplement détecter la présence de valeurs aberrantes dans les données précédentes ?

En supposant que ces données sont la réalisation d'un échantillon d'une variable aléatoire  $Y$  de loi normale  $N(\mu, \sigma^2)$ , nous allons utiliser une autre méthode pour savoir si certaines mesures effectuées sont aberrantes

- (a) (1 point) Commencer par normaliser les données pour obtenir une variable aléatoire  $Z$  normale centrée réduite.
- (b) (1 point) Pour chaque mesure normalisée  $z$ , récupérer dans les tables ci-jointes les valeurs de la densité  $f(Z = z)$  et de la fonction de répartition  $F(Z = z)$ .
- (c) (2 points) Soit  $Z_m$  la statistique de l'échantillon désignant la valeur minimale de  $Z$ . Quelle est la formule de la densité de probabilité  $h_1(Z_m = z)$  ?

- (d) (2 points) Calculer  $h_1$  pour chaque mesure normalisée. En déduire quelles sont les mesures aberrantes "minimales" correspondant à un dysfonctionnement de l'appareil de mesure.
3. Influence du jour ?
- (a) (2 points) Soit  $X$  la variable qualitative correspondant au jour où les mesures ont été effectuées. Calculer le rapport de corrélation  $S_{Y/X}$  et déterminer si le jour des mesures a eu une influence sur les mesures effectuées.

## 2 Estimation de paramètres (7 pts)

Soit  $Y$  une variable aléatoire de loi normale  $N(\mu, \sigma^2)$  où les paramètres  $\mu$  et  $\sigma^2$  sont inconnus.

1. Estimation de  $\mu$
- (a) (1.5 points) Déterminer l'estimateur de maximum de vraisemblance de  $\mu$ .
- (b) (1.5 points) Est-ce que cet estimateur, noté  $\hat{\mu}_{MV}$ , est sans biais, convergent, efficace et exhaustif ?
- (c) (1.5 points) Déterminer la borne de Cramer-Rao de ce paramètre.
- (d) (0.5 points) Quelle est la valeur de son estimation sur les données du tableau 1 ?
2. Estimation de  $\sigma^2$
- (a) (1.5 points) Déterminer l'estimateur de maximum de vraisemblance de  $\sigma^2$ .
- (b) (0.5 points) Quelle est la valeur de son estimation sur les données du tableau 1 ?

### 3 Distribution et répartition de la loi $N(0,1)$ (p.1/2)

$z$	$f(z)$	$F(z)$	$z$	$f(z)$	$F(z)$
0.0	0.39894	0.50000	0.40	0.36827	0.65542
0.01	0.39892	0.50399	0.41	0.36678	0.65910
0.02	0.39886	0.50798	0.42	0.36526	0.66276
0.03	0.39876	0.51197	0.43	0.36371	0.66640
0.04	0.39862	0.51595	0.44	0.36213	0.67003
0.05	0.39844	0.51994	0.45	0.36053	0.67364
0.06	0.39822	0.52392	0.46	0.35889	0.67724
0.07	0.39797	0.52790	0.47	0.35723	0.68082
0.08	0.39767	0.53188	0.48	0.35553	0.68439
0.09	0.39733	0.53586	0.49	0.35381	0.68793
0.10	0.39695	0.53983	0.50	0.35207	0.69146
0.11	0.39654	0.54380	0.51	0.35029	0.69497
0.12	0.39608	0.54776	0.52	0.34849	0.69847
0.13	0.39559	0.55172	0.53	0.34667	0.70194
0.14	0.39505	0.55567	0.54	0.34482	0.70540
0.15	0.39448	0.55962	0.55	0.34294	0.70884
0.16	0.39387	0.56356	0.56	0.34105	0.71226
0.17	0.39322	0.56749	0.57	0.33912	0.71566
0.18	0.39253	0.57142	0.58	0.33718	0.71904
0.19	0.39181	0.57535	0.59	0.33521	0.72240
0.20	0.39104	0.57926	0.60	0.33322	0.72575
0.21	0.39024	0.58317	0.61	0.33121	0.72907
0.22	0.38940	0.58706	0.62	0.32918	0.73237
0.23	0.38853	0.59095	0.63	0.32713	0.73565
0.24	0.38762	0.59483	0.64	0.32506	0.73891
0.25	0.38667	0.59871	0.65	0.32297	0.74215
0.26	0.38568	0.60257	0.66	0.32086	0.74537
0.27	0.38466	0.60642	0.67	0.31874	0.74857
0.28	0.38361	0.61026	0.68	0.31659	0.75175
0.29	0.38251	0.61409	0.69	0.31443	0.75490
0.30	0.38139	0.61791	0.70	0.31225	0.75804
0.31	0.38023	0.62172	0.71	0.31006	0.76115
0.32	0.37903	0.62552	0.72	0.30785	0.76424
0.33	0.37780	0.62930	0.73	0.30563	0.76730
0.34	0.37654	0.63307	0.74	0.30339	0.77035
0.35	0.37524	0.63683	0.75	0.30114	0.77337
0.36	0.37391	0.64058	0.76	0.29887	0.77637
0.37	0.37255	0.64431	0.77	0.29659	0.77935
0.38	0.37115	0.64803	0.78	0.29431	0.78230
0.39	0.36973	0.65173	0.79	0.29200	0.78524

## Distribution et répartition de la loi $N(0,1)$ (p.2/2)

$z$	$f(z)$	$F(z)$
0.80	0.28969	0.78814
0.81	0.28737	0.79103
0.82	0.28504	0.79389
0.83	0.28269	0.79673
0.84	0.28034	0.79955
0.85	0.27798	0.80234
0.86	0.27562	0.80511
0.87	0.27324	0.80785
0.88	0.27086	0.81057
0.89	0.26848	0.81327
0.90	0.26609	0.81594
0.91	0.26369	0.81859
0.92	0.26129	0.82121
0.93	0.25888	0.82381
0.94	0.25647	0.82639
0.95	0.25406	0.82894
0.96	0.25164	0.83147
0.97	0.24923	0.83398
0.98	0.24681	0.83646
0.99	0.24439	0.83891
1.00	0.24197	0.84134
1.01	0.23955	0.84375
1.02	0.23713	0.84614
1.03	0.23471	0.84849
1.04	0.23230	0.85083
1.05	0.22988	0.85314
1.06	0.22747	0.85543
1.07	0.22506	0.85769
1.08	0.22265	0.85993
1.09	0.22025	0.86214
1.10	0.21785	0.86433
1.11	0.21546	0.86650
1.12	0.21307	0.86864
1.13	0.21069	0.87076
1.14	0.20831	0.87286
1.15	0.20594	0.87493
1.16	0.20357	0.87698
1.17	0.20121	0.87900
1.18	0.19886	0.88100
1.19	0.19652	0.88298

$z$	$f(z)$	$F(z)$
1.20	0.19419	0.88493
1.21	0.19186	0.88686
1.22	0.18954	0.88877
1.23	0.18724	0.89065
1.24	0.18494	0.89251
1.25	0.18265	0.89435
1.26	0.18037	0.89617
1.27	0.17810	0.89796
1.28	0.17585	0.89973
1.29	0.17360	0.90147
1.30	0.17137	0.90320
1.31	0.16915	0.90490
1.32	0.16694	0.90658
1.33	0.16474	0.90824
1.34	0.16256	0.90988
1.35	0.16038	0.91149
1.36	0.15822	0.91308
1.37	0.15608	0.91466
1.38	0.15395	0.91621
1.39	0.15183	0.91774
1.40	0.14973	0.91924
1.41	0.14764	0.92073
1.42	0.14556	0.92220
1.43	0.14350	0.92364
1.44	0.14146	0.92507
1.45	0.13943	0.92647
1.46	0.13742	0.92785
1.47	0.13542	0.92922
1.48	0.13344	0.93056
1.49	0.13147	0.93189
1.50	0.12952	0.93319
1.51	0.12758	0.93448
1.52	0.12566	0.93574
1.53	0.12376	0.93699
1.54	0.12188	0.93822
1.55	0.12001	0.93943
1.56	0.11816	0.94062
1.57	0.11632	0.94179
1.58	0.11450	0.94295
1.59	0.11270	0.94408

$z$	$f(z)$	$F(z)$
1.60	0.11092	0.94520
2.00	0.05399	0.97725
2.50	0.01753	0.99379
3.00	0.00443	0.99865
3.50	0.00087	0.99977
4.00	0.00014	1.00000