UV Statistique pour l'Ingénieur

Cours n° 8

Statistique inférentielle : estimation

méthodes d'estimation par intervalle

Ph. LERAY - A. ROGOZAN

Estimation *par intervalle de confiance* d'un paramètre

- Soit T un estimateur ponctuel du paramètre θ d'une loi supposée connue (choisir l'estimateur T le plus précis)

- Objectif: construire un estimateur par intervalle de confiance $[T_1, T_2]$ de niveau de confiance 1-α

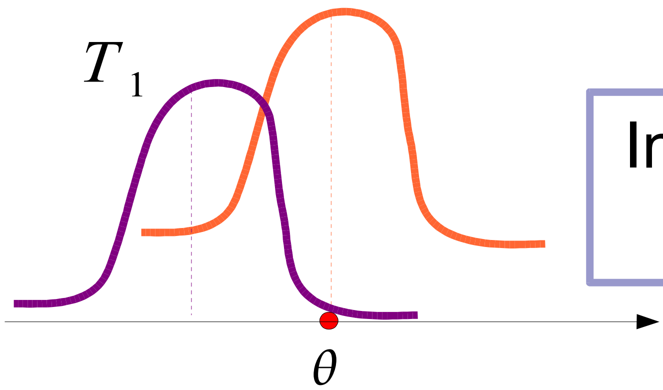
  - le risque (statistique) que le paramètre θ soit en dehors de l'intervalle de confiance estimé est égale à α

  - en répétant un grand nombre de fois l'opération d'échantillonnage (ou l'enquête), les estimations $[t_1, t_2]$ des intervalles de confiances contiendront dans (1-α)% des cas le paramètre θ

Intervalle de confiance d'un paramètre

- Soit un intervalle de confiance $[T_1, T_2]$ de niveau de confiance 1-α
  - Intervalle aléatoire : $T_1 = \varphi_1(T)$ et $T_2 = \varphi_2(T)$
  - Il n'y pas d'unicité de l'intervalle de confiance
  - Exemple :

T estimateur sans biais



Intervalle de confiance unilatéral

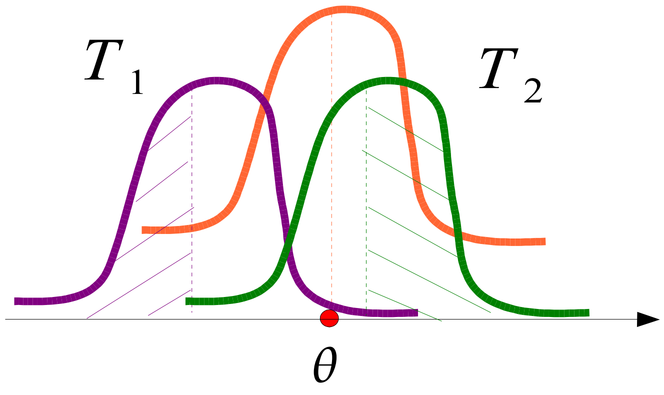
$[T_1, +\infty]$

Intervalle de confiance d'un paramètre

- Soit un intervalle de confiance $[T_1, T_2]$ de niveau de confiance 1-α

$$T_1 = \varphi_1(T)$$
$$T_2 = \varphi_2(T)$$

T estimateur sans biais



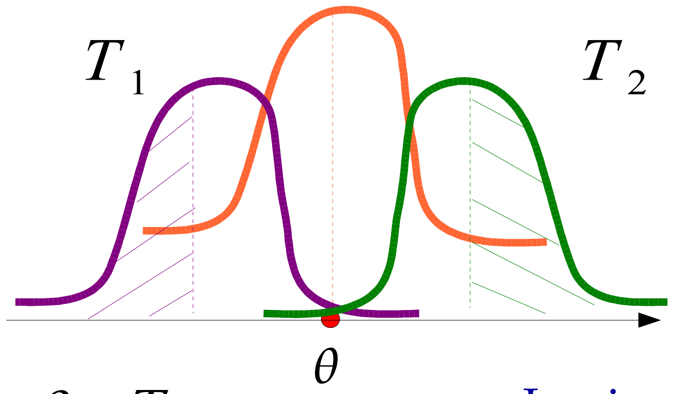
Intervalle de confiance bilatéral $[T_1, T_2]$ à risques asymétriques

Intervalle de confiance d'un paramètre

- Soit un intervalle de confiance $[T_1, T_2]$ de niveau de confiance 1-α

$$T_1 = \varphi_1(T)$$
$$T_2 = \varphi_2(T)$$

T estimateur sans biais



Intervalle de confiance <u>bilatéral</u> $[T_1, T_2]$ <u>à risques symétriques</u>

Le risque que $\theta < T_1$ est égal à α/2

Le risque que $\theta > T_2$ est égal à α/2

Propriétés de l'intervalle de confiance d'un paramètre

- Soit un intervalle de confiance $[T_1, T_2]$
  de niveau de confiance 1-α

  - si le niveau de confiance 1-α augmente,
    alors le risque statistique α doit diminuer

    => écartement de l'intervalle de confiance

  - pour un niveau de confiance 1-α fixé
    si la taille de l'échantillon *n* augmente,
    alors $Var(T)$ diminue

    => T devient plus précis
    => réduction de l'intervalle de confiance

Exemple

- Vous envisagez d'acheter le dernier PC à la mode si les tests de ce modèle à un benchmark B sont supérieurs à 0.2
- Une enquête sur 400 PC de ce modèle donne un benchmark moyen de 0.23
- Que décidez-vous ?

- Modélisation : $B \sim N(\mu, \sigma^2 = 10^{-2})$
- Enquête : $\overline{B} \sim N(\mu, \sigma^2 / 400)$

$$\frac{\overline{B} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0, 1)$$

  - fonction de répartition de la loi *N* : $P\left(-2.58 \leq \frac{\overline{B} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq 2.58\right) = 0.99$

Exemple

- $P(-2.58 \leq \frac{\overline{B}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq 2.58) = 0.99$ $\quad P(-2.58\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \overline{B}-\mu \leq 2.58\frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = 0.99$

- on cherche un intervalle de confiance sur µ

$$P(\overline{B}-2.58\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \overline{B}+2.58\frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = 0.99$$

$$\boxed{T_1 = \overline{B}-2.58\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \qquad T_2 = \overline{B}+2.58\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

- $[T_1, T_2]$ intervalle aléatoire : les bornes sont fonction de l'estimateur $T=\overline{B}$
  - application numérique : intervalle = *[0.217 , 0.243]* *... on achète !*

« Fiche recette » pour l'estimation d'un paramètre *par intervalle de confiance*

- Choisir un estimateur T de θ - le meilleur possible - dont on connaît la loi de probabilité en fonction de θ
- Déterminer la fonction pivotale $f(T,\theta)$, dont la loi de probabilité, notée P, ne dépend plus de θ (P = loi pivot)
- Déterminer l_1 et l_2 tels que $P(l_1 \leqslant f(T,\theta) \leqslant l_2) = 1-\alpha$
- En déduire, si possible, $P(T_1 \leqslant \theta \leqslant T_2) = 1-\alpha$
  où T_i sont 2 statistiques fonction de T

$$T_1 = \varphi_1(T) \quad \text{et} \quad T_2 = \varphi_2(T)$$

Déterminer les bornes l_1 et l_2 de la loi pivot P

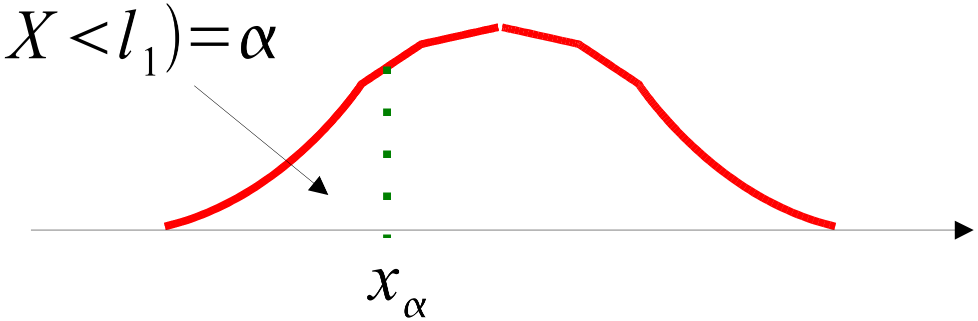
- A partir de la fonction de répartition de la loi pivot *P* de la variable aléatoire f(T,θ)

  - Intervalle de confiance unilatéral

$$P(l_1 \leqslant f(T,\theta)) = 1-\alpha \quad \Rightarrow \quad P(f(T,\theta) \leqslant l_1) = \alpha$$

$$X = f(T,\theta) \sim P$$

$$P(X < l_1) = \alpha$$



$$\boxed{l_1 = F_P^{-1}(\alpha)}$$

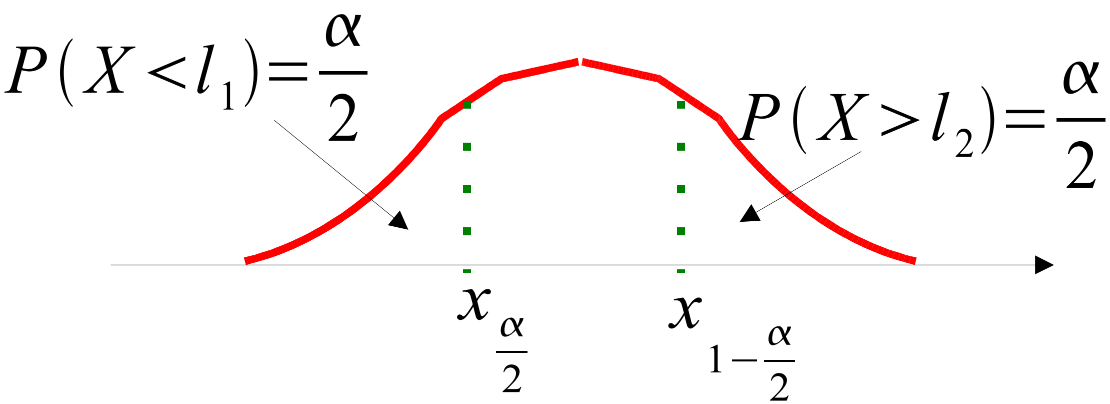
l_1 = fractile d'ordre α de la loi pivot *P*

Déterminer les bornes l_1 et l_2 de la loi pivot *P*

- A partir de la fonction de répartition de la loi pivot *P* de la variable aléatoire f(T,θ)

  - Intervalle de confiance bilatéral à risques symétriques

$$X = f(T,\theta) \sim P$$



$$\boxed{l_1 = F_P^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$

l_1 = fractile d'ordre α/2 de la loi pivot *P*

$$\boxed{l_2 = F_P^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)}$$

l_2 = fractile d'ordre 1 - α/2 de la loi pivot *P*

Quelques lois de fonctions pivotales usuelles

- $f(T=S^2, \theta=\sigma^2)$ χ^2_p loi du chi-deux à *p* d.d.l
  - (estimation par intervalle de la variance d'une loi normale)

- $f(T=\bar{X}, \theta=\mu)$ τ_p loi de student à *p* d.d.lµ
  - (estimation par intervalle de la moyenne d'une loi normale, variance inconnue)

Loi de la fonction pivotale $f(T=S^2, \theta=\sigma^2)$

- χ_p^2 loi du chi-deux à *p* degrés de liberté

$$\boxed{\frac{nS^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2} \qquad \boxed{(n-1)\frac{S^{*2}}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2}$$

- Propriétés :
  - $E(\chi_p^2)=p$
  - $Var(\chi_p^2)=2p$
  - si p>30, $\sqrt{2\chi_p^2} \sim N(\sqrt{2p-1}, 1)$

Loi du chi-deux χ^2_p à *p* degrés de liberté

- χ^2_p = loi de probabilité d'une *somme de carrés de v.a. normales centrées réduites indépendantes*

- Pourquoi d.d.l.=*n-1* dans $\dfrac{nS^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$?

$$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 \qquad \frac{nS^2}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^{n}\frac{(X_i - \overline{X})^2}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^{n} U_i^2$$

  - les U_i sont des v.a. centrées réduites, mais seulement *n-1* sont indépendantes car $\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}) = 0$

Loi de la fonction pivotale $f(T=\bar{X}, \theta=\mu)$

- τ_p loi de Student à *p* degrés de liberté

$$\boxed{\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{\frac{S^{*2}}{n}}} \sim \tau_{n-1}}$$

- Propriétés
  - $E(\tau_p)=0$
  - $Var(\tau_p)=\frac{p}{p-2}\ avec\ p>2$
  - si *p*>30, $\tau_p \rightarrow N(0, \frac{p}{(p-2)})$

Loi de Student τ_p à *p* degrés de liberté

- Soient
  - *U* une v.a. suivant une loi N(0,1)
  - V une v.a. suivant une loi χ^2_p

  alors $\tau_p = \dfrac{U}{\sqrt{\dfrac{V}{p}}}$ suit une loi de Student à *p* d.d.l

  - vérification pour la loi pivotale :

$$U = \frac{\overline{X} - \mu}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}} \qquad V = (n-1)\frac{S^{*2}}{\sigma^2} \qquad (d.d.l = n-1) \qquad \frac{\overline{X} - \mu}{\sqrt{\dfrac{S^{*2}}{n}}} \sim \tau_{n-1}$$

Exemples

- ex1 : soit une v.a. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ avec μ inconnu et σ connu
  - proposer un estimateur pour le paramètre μ ;
  - déterminer l'intervalle de confiance bilatéral de niveau de confiance $1-\alpha$, puis celui unilatéral

Exemples

- ex2 : soit une v.a. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ avec µ et σ inconnus
  - proposer un estimateur pour le paramètre σ^2 ;
  - déterminer l'intervalle de confiance bilatéral de niveau de confiance 1-α

Exemples

- ex3 : soit une v.a. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ avec μ et σ inconnus
  - proposer un estimateur pour le paramètre μ ;
  - déterminer l'intervalle de confiance bilatéral de niveau de confiance 1-α