# UV Statistique pour l'Ingénieur

## Cours n° 7

## Statistique inférentielle : estimation

## méthodes d'estimation ponctuelle

Ph. LERAY - A. ROGOZAN

# *Estimation ponctuelle* d'un paramètre méthode du maximum de vraisemblance

- Objectif : Construire un estimateur d'un paramètre $\Theta$

- Avantage : Fournir des estimateurs dont on connaît la distribution asymptotique (c.a.d. leur loi quand n->∞)
  - Pratique pour l'estimation par intervalle de confiance et pour les tests d'hypothèses (à suivre)

# « Fiche recette » $\hat{\Theta}_{MV} = \max_{\Theta} L(x_1, \ldots, x_n, \Theta)$

- $L(x_1, \ldots, x_n, \Theta) = \prod_{i=1}^{N} f(x_i, \Theta)$

  $\ln L(x_1, \ldots, x_n, \Theta) = \sum_{i=1}^{N} \ln f(x_i, \Theta)$ => Calculs + simples!

- Équation de vraisemblance : $\dfrac{\partial \ln L}{\partial \Theta}(x_1, \ldots, x_n, \Theta) = 0$

- Prendre la valeur max : $\dfrac{\partial^2 \ln L}{\partial \Theta^2}(x_1, \ldots, x_n, \Theta) < 0$

- Si $\dfrac{\partial \ln L}{\partial \Theta}(X_1, \ldots, X_n, \Theta) = A(n, \Theta)(\hat{u} - u(\Theta))$

  alors $Var(\hat{u}) = \dfrac{u'(\Theta)}{A(n, \Theta)}$

# *Estimation ponctuelle* d'un paramètre méthode du maximum de vraisemblance

- Remarques :
  - L'éq° de vraisemblance ne conduit pas forcément à un estimateur $\hat{\Theta}_{MV}$ unique
  - Il peut exister un $\hat{\Theta}_{MV}$ même quand L n'est pas 2 fois dérivable (i.e. loi uniforme)
  - L'éq° de vraisemblance n'est pas forcément « résolvable » de manière formelle (et peut nécessiter l'utilisation de méthodes itératives)

# *Estimation ponctuelle* d'un paramètre méthode du maximum de vraisemblance

- Exemples :
  - Soit une v.a. $X \sim P(\lambda)$ de paramètre inconnu λ construire un estimateur $\hat{\lambda}_{MV}$
  - Soit une v.a. qui suit une loi de Weibull $f(x;\Theta)=\Theta\, x^{\Theta-1} e^{-x^{\Theta}}$

    ...

# *Estimation ponctuelle* d'un paramètre méthode du maximum de vraisemblance

- Propriétés :
  - Si $\hat{\Theta}_{MV}$ estimateur du max. de vraisemblance de $\Theta$

    alors $u(\hat{\Theta}_{MV})$ est l'estimateur du max. de vrais. de $u(\Theta)$
  - S'il existe un estimateur T efficace de $\Theta$ ou de $u(\Theta)$ et si $\hat{\Theta}_{MV}$ est une solution de l'éq° de vraisemblance

    alors $T = f(\hat{\Theta}_{MV})$
    et la solution de l'éq° de vraisemblance est unique

    (la réciproque est fausse ; ex : loi exp)

# *Estimation ponctuelle* d'un paramètre
# méthode du maximum de vraisemblance

- Propriétés de la distribution asymptotique :
  - Si $\hat{\Theta}_{MV}$ estimateur du max. de vraisemblance de $\Theta$

    $\hat{\Theta}_{MV}$ n'est pas nécessairement sans biais,
    mais il est asymptotiquement sans biais.
  - Si les conditions de Cramer-Rao sont vérifiées, $\hat{\Theta}_{MV}$ est asymptotiquement efficace
  - Sous certaines conditions (conditions de Cramer-Rao et n grand), $\hat{\Theta}_{MV}$ est asymptotiquement gaussien

    ( $\mu \rightarrow \Theta$ et $\sigma^2 \rightarrow Borne\, de\, Cramer - Rao$ )

# *Estimation ponctuelle* d'un vecteur de paramètres méthode du maximum de vraisemblance

- Objectif : Construire un estimateur d'un vecteur de paramètres $\theta_I,\ldots,\theta_p$
- « Fiche recette » : annuler les dérivées partielles de *ln L* par rapport à chacun des paramètres $\theta_i$

$$\boxed{\frac{\partial \ln L}{\partial \Theta_i}(x_1,\ldots,x_n,\Theta_i)=0 \quad pour\; i\in\{1, \quad , p\}}$$

- Exemple : Soit une v.a. $X \sim N(\mu,\sigma^2)$ ayant 2 paramètres inconnus $\mu$ et $\sigma^2$

Construire 2 estimateurs $\hat{\mu}_{MV}$ et $\hat{\sigma}^2_{MV}$

# *Estimation ponctuelle* d'un vecteur de *p* paramètres méthode des moments

- « Fiche recette » : à l'aide de *p* équations : {moment théorique de la v.a. = moment empirique de l'échantillon}
- pb. du choix des moments : *centrés* ou *non-centrés*

$$\xrightarrow[n\to\infty]{P}$$

| Moment Empirique | Moment Théorique | Équation(s) |
|---|---|---|
| $\hat{m}_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k$ | $m_k=E(X^k)$ | $m_k=\hat{m}_k$ |
| $\hat{\mu}_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (X_i-\bar{X})^k$ | $\mu_k=E(X-E(X))^k$ | $\mu_k=\hat{\mu}_k$ |

# *Estimation ponctuelle* d'un vecteur de *p* paramètres méthode des moments

- « Fiche recette » : à l'aide de *p* équations :
  {moment théorique de la v.a. = moment empirique de l'échantillon}

- pb. du choix des moments : *centrés* ou *non-centrés*

- Exemple :
  - Soit une v.a. $X \sim U_{[\Theta_1, \Theta_2]}$ de paramètres inconnus $\theta_1$ et $\theta_2$
    Construire les 2 estimateurs $\hat{\Theta}_{1m}$ et $\hat{\Theta}_{2m}$

# *Estimation ponctuelle* d'un vecteur de *p* paramètres méthode des moments

- Propriété : les estimateurs $\hat{\Theta}_m$ obtenus par la méthode des moments sont :
  - convergents $\hat{\Theta}_m \xrightarrow{P} \Theta$
  - asymptotiquement gaussiens $\sqrt{n}(\hat{\Theta}_m - \Theta) \xrightarrow{L} N(0, \sigma_m^2)$

    où la variance $\sigma_m^2$ dépend des moments utilisés