UV Traitement du signal

Cours 8

Systèmes linéaires discrets

Définition et caractérisations (temporelle et fréquentielle)

ASI 3

Contenu du cours

Introduction

- Définition d'un système discret
- Classification des systèmes discrets

Caractérisation temporelle des systèmes linéaires discrets

- Notion de convolution linéaire de signaux discrets
- Réponse impulsionnelle d'un système (stabilité, réponse à une entrée quelconque)
- Système linéaire discret décrit par une équation aux différences

Réponse fréquentielle des systèmes linéaires discrets

- Caractérisation des SLID par la fonction de transfert
- Transformée en z
  - Définition
  - Propriétés
  - SLID et Transformée en z
  - Pôles et zéros
  - Stabilité d'un SLID

Introduction

Définition d'un système discret

Un système discret est une entité qui réalise la conversion d'une suite discrète $\{x(n)\}$ en entrée en une autre suite discrète $\{y(n)\}$ en sortie.

Signal d'entrée $x(n)$ → Système discret T → Signal de sortie ou réponse $y(n)$

Notation : $y(n) = T[x(n)]$

Classification des systèmes

- Système statique ou sans mémoire

  L'échantillon de sortie $y(n)$ à l'instant n ne dépend que de l'échantillon de l'entrée $x(n)$ au même instant

  Exemple :

  $$y(n) = ax^2(n) + b$$

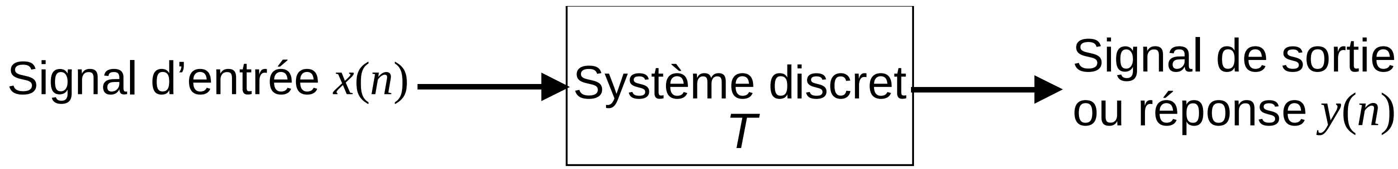
- Système dynamique ou avec mémoire

  L'échantillon $y(n)$ est fonction des échantillons de l'entrée aux instants antérieurs ou égaux à n et/ou des échantillons de sortie antérieurs à l'instant n

  Exemple : $y(n) = a_1 y(n-1) + a_2 \sqrt{y(n-2)} + b_0 x^2(n) + b_1 x(n-1)$

Introduction

❑ Exemple de systèmes dynamiques : « Voice transformer »



- Effet « écho » : ajout au signal d'entrée le même son retardé

$$y(t)=x(t)+x(t-t_0)$$

- Effet « réverbération » : addition d'échos successifs avec retards et filtrages différents (atténuations)

$$y(t)=x(t)+\sum_{n=0}^{nbechos}\frac{A}{2^n}x(t-nt_0)$$

- Effet « voix de robot » : addition d'un tremolo

$$y(t)=x(t)+\sin(2\pi f_0 t)$$

- Effet « flanger », « chorus », « wha wha », etc.

Introduction

Classification des systèmes

- **Linéarité**

Si $x(n)=a_1x_1(n)+a_2x_2(n)$ alors $y(n)=a_1T\left[x_1(n)\right]+a_2T\left[x_2(n)\right]$

- **Causalité**

La réponse $y(n)$ du système à l'instant $n=k_0$ ne dépend que des entrées $x(n)$ aux instants $n\leq k_0$

- **Invariance temporelle**

Si $y(n)=T\left[x(n)\right]$ alors $y(n-n_0)=T\left[x(n-n_0)\right]$ $\quad \forall n, n_0 \in \mathbb{Z}$

<u>Exemples</u>

- $y(n)=x(n)-x(n-1)$ est un système invariant
- $y(n)=nx(n)$ est un système variant

- **Stabilité BIBO (Bounded Input, Bounded Output)**

Un système discret est dit stable si en réponse à une entrée bornée, sa sortie est bornée

$$\exists\, M_x / \left|x(n)\right|<M_x \Rightarrow \exists\, M_y / \left|\, y(n)=T\left[x(n)\right]\right|<M_y \qquad \forall n\in\mathbb{Z}$$

Convolution linéaire de signaux discrets

Définition

On appelle produit de convolution linéaire de deux signaux discrets $x(n)$ et $h(n)$, l'expression

$$\boxed{x(n)*h(n)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)h(n-k)}$$

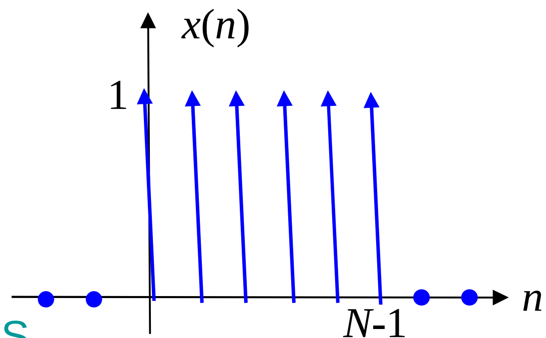
- Cas de signaux causaux ($x(n)=0,\ h(n)=0$ pour $n<0$)

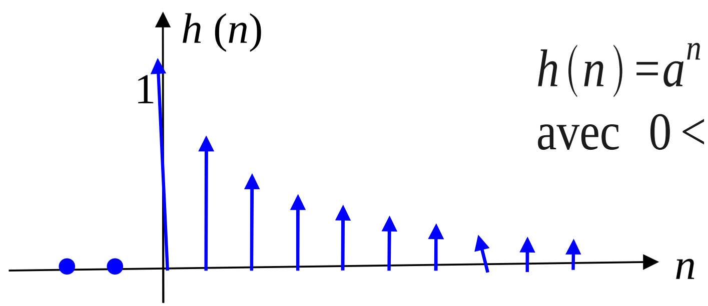
$$x(n)*h(n)=\sum_{k=0}^{n} x(k)h(n-k)$$

⚠ Ne pas confondre la convolution linéaire et la convolution circulaire des signaux discrets

Exemple

Calculer le produit de convolution linéaire des signaux suivants





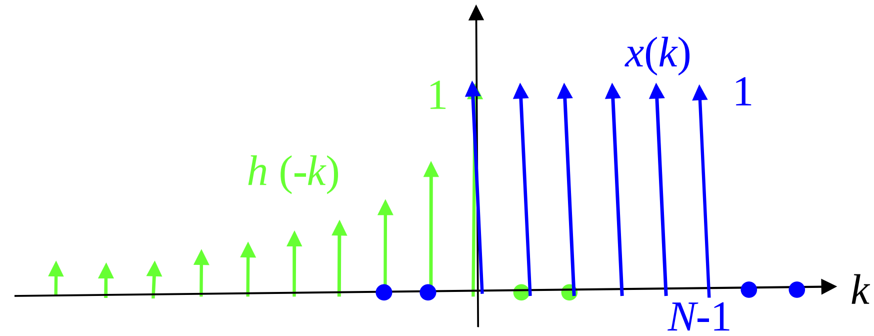
$$h(n)=a^n\,\Gamma(n)$$
avec $0<a<1$

Convolution linéaire de signaux discrets

Exemple (suite et fin)

Posons $z(n) = x(n) * h(n)$. Les 2 signaux étant causaux, on a

$$z(n) = \sum_{k=0}^{n} x(k) h(n-k)$$



Convolution linéaire de signaux discrets

Propriétés (idem analogique)

- Commutativité

$$x(n)*h(n)=x(n)*h(n)$$

- Associativité

$$x(n)*h(n)*z(n)=x(n)*\left(h(n)*z(n)\right)=\left(x(n)*h(n)\right)*z(n)$$

- Distributivité par rapport à l'addition

$$h(n)*\left(x(n)+z(n)\right)=h(n)*x(n)+h(n)*z(n)$$

- Elément neutre du produit de convolution : impulsion de Dirac

$$x(n)*\delta(n)=x(n)$$

et aussi :

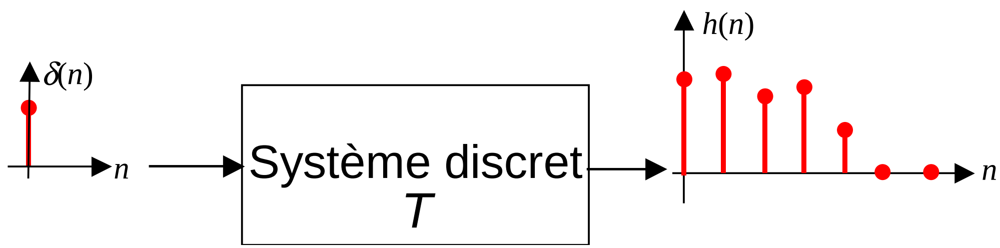
- Durée d'un signal issu du produit de convolution linéaire

Si $x(n)$ est de durée N_1 et $h(n)$ de durée N_2, alors $x(n)*h(n)$ est de durée N_1+N_2-1

Etude de système linéaire invariant discret (SLID)

- Caractérisation d'un SLID : réponse impulsionnelle

La réponse impulsionnelle d'un système discret est sa réponse à une entrée sous forme d'impulsion de Dirac



$$h(n) = T[\delta(n)]$$

- Avantages de la réponse impulsionnelle : idem analogique
  - caractérisation complète du système
  - permet de calculer la sortie du système discret pour des signaux d'entrée quelconques en utilisant la convolution linéaire de signaux discrets

Preuve !

Réponse d'un SLID à une entrée quelconque

Application de la convolution linéaire

$$x(n) \longrightarrow \boxed{\text{Système T}} \longrightarrow y(n) = ?$$

Décomposition du signal discret $x(n)$

$$x(n) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} x(k)\,\delta(n-k)$$

Réponse du système

$$y(n) = T\left[x(n)\right] \quad \Rightarrow \quad y(n) = T\left[\sum_{k \in \mathbb{Z}} x(k)\,\delta(n-k)\right]$$

Propriété de linéarité du système discret

$$y(n) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} x(k)\,T\left[\delta(n-k)\right]$$

L'opérateur T [.] agit sur les termes dépendant de la variable temporelle n

Propriété d'invariance temporelle du système

$$T\left[\delta(n-k)\right] = h(n-k)$$

Réponse impulsionnelle décalée

On en déduit

$$y(n) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} x(k)\,h(n-k) \quad \Rightarrow \quad y(n) = x(n) * h(n)$$

La réponse d'un système discret linéaire invariant à une entrée quelconque $x(n)$ est la convolution <u>linéaire</u> de $x(n)$ avec la réponse impulsionnelle $h(n)$ du système.

Réponse impulsionnelle d'un SLID

Stabilité et réponse impulsionnelle

Stabilité = garantir que la sortie d'un système est bornée si son entrée est bornée

Un système linéaire discret invariant est stable ssi sa réponse impulsionnelle est absolument sommable

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |h(n)| < +\infty$$

Causalité et réponse impulsionnelle

Un système linéaire discret invariant est causal ssi sa réponse impulsionnelle $h(n)$ est causale

$$h(n) = 0 \quad \forall n < 0$$

- Remarque : si le système est causal, on a

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} x(k)h(n-k)$$

Exemple

Etudier la causalité et la stabilité du système linéaire caractérisé par la réponse impulsionnelle

$$h(n) = a^n \Gamma(n)$$

Autre caractérisation d'un SLID

❑ Equation aux différences linéaire à coefficients constants

Système régi par une équation aux différences d'ordre N

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = \sum_{r=0}^{M} b_r x(n-r) \longrightarrow y(n) = -\sum_{k=1}^{N} \frac{a_k}{a_0} y(n-k) + \sum_{r=0}^{M} \frac{b_r}{a_0} x(n-r)$$

➢ Avantages

- Calcul de la sortie du système sans connaissance de la réponse impulsionnelle $h(n)$

- Calcul de la sortie $y(n)$ à partir des N sorties décalées $y(n-k)$, des M entrées décalées $x(n-r)$ et de l'entrée courante $x(n)$. Mais ceci nécessite la *connaissance des conditions initiales du système*

- Quelle que soit la longueur de la réponse impulsionnelle $h(n)$ (finie ou infinie), le nombre d'opérations nécessaires au calcul de $y(n)$ est fini (comparativement au calcul par convolution linéaire)

➢ Inconvénients

- Caractéristiques du système plus difficile à déterminer; ex. : stabilité

❑ Exemple de système caractérisé par une équation aux différences :

$$y(n) - ay(n-1) = cx(n)$$

Autre caractérisation d'un SLID

- Equation aux différences linéaire à coefficients constants

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = \sum_{r=0}^{M} b_r x(n-r) \qquad \text{avec } a_0 = 1$$

- $N=0$ $\longrightarrow$ $$y(n) = \sum_{r=0}^{M} b_r x(n-r)$$
  - $y(n)$ dépend de l'entrée courante $x(n)$ et des M entrées précédentes $x(n-r)$
  - Système à *réponse non récursive*
  - La réponse impulsionnelle est finie $\longrightarrow$ $h(n) = \sum_{r=0}^{M} b_r \delta(n-r)$

  On parle de système à *Réponse Impulsionnelle Finie (RIF)*

- $N \geq 1$ $\longrightarrow$ $$y(n) = -\sum_{k=1}^{N} a_k y(n-k) + \sum_{r=0}^{M} b_r x(n-r)$$
  - $y(n)$ dépend de l'entrée courante $x(n)$, des M entrées précédentes $x(n-r)$ mais aussi des N sorties précédentes $y(n-k)$
  - *Système à réponse récursive*
  - Système à *Réponse Impulsionnelle Infinie (RII)*

SLID et Transformée de Fourier à Temps Discret

$$x(n) \longrightarrow \boxed{\text{Système T}} \longrightarrow y(n)$$

❑ Réponse fréquentielle des SLID

$$y(n) = h(n) * x(n)$$

En utilisant le théorème de Plancherel, on a

$$Y(f) = H(f) . X(f)$$

Remarque : convolution <u>linéaire</u> => *f* <u>continue</u>

$H(f)$: $\boxed{\text{TFTD}}$ de la réponse impulsionnelle ou fonction de transfert du système discret

$$H(f) \nearrow \text{Module } |H(f)| \quad \text{: spectre d'amplitude}$$

$$H(f) \searrow \text{Argument } \Phi(f) = \arg(H(f)) \quad \text{: spectre de phase}$$

Transformée en z (TZ)

Définition

La TZ est la généralisation de la TFTD. Soit un signal discret $x(n)$. Sa TZ est définie par

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n).z^{-n} \qquad \text{avec} \qquad z\in\mathbb{C}$$

Rappel : la TFTD de x(n) est :

$$X(f)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)e^{-j2\pi nf}$$

Condition d'existence de la TZ

La transformée existe si la série converge. L'ensemble des valeurs de la variable complexe z pour lesquelles la série converge est appelée Région De Convergence (RDC)

$$RDC=\left\{z\in\mathbb{C} / \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left|x(n).z^{-n}\right|<+\infty\right\}$$

Exemple

Calculer la TZ de $x(n)=\Gamma(n)$

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n).z^{-n} \longrightarrow X(z)=\sum_{n=0}^{+\infty} z^{-n} \longrightarrow X(z)=\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=0}^{N-1} z^{-n}$$

$X(z)=\lim_{N\to+\infty}\dfrac{1-z^{-N}}{1-z^{-1}}$ La limite est finie si $\left|z^{-1}\right|<1$ i.e. $|z|>1$ $\longrightarrow$ $X(z)=\dfrac{1}{1-z^{-1}}$ pour $|z|>1$

Transformée en z

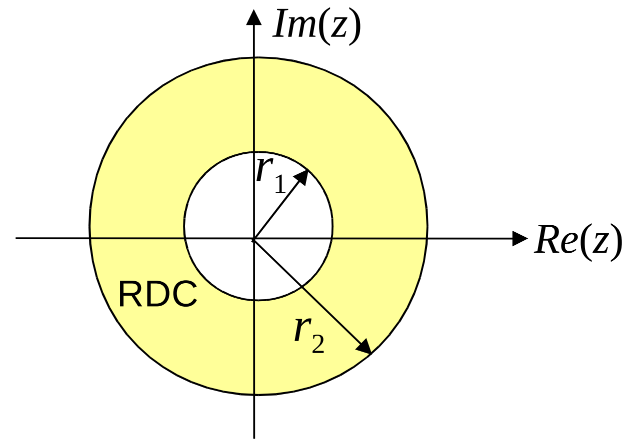
Région de convergence

De façon générale, on montre que la RDC est un anneau de convergence défini par

$$0 \leq r_1 \leq |z| \leq r_2 \leq +\infty$$

avec $r_1 = \lim\limits_{n \to +\infty} |x(n)|^{1/n}$ et $r_2 = \lim\limits_{n \to +\infty} |x(-n)|^{-1/n}$

(Vérifions que ça marche avec $x(n) = \Gamma(n)$)

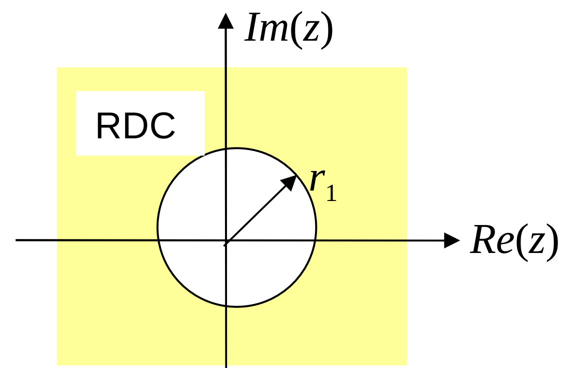


Remarques

- Si r1 > r2, la série ne converge pas
- Signal défini à droite $\exists n_0 / x(n) = 0 \quad \forall n < n_0$

  (signal causal pour n_0=0)

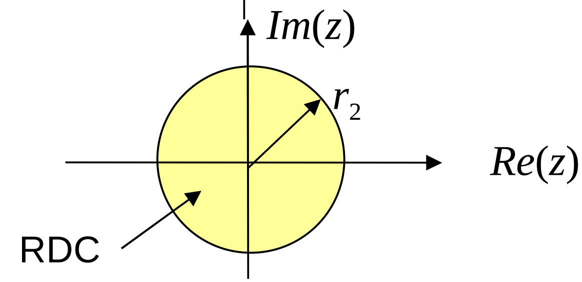
  $r_2 = +\infty$ RDC = région extérieure au cercle de rayon r_1



- Signal défini à gauche $\exists n_0 / x(n) = 0 \quad \forall n > n_0$

  (signal anticausal pour n_0=0)

  $r_1 = 0$ RDC = disque de rayon r_2



Transformée en z : propriétés

Soit $x(n)$, un signal discret. Soit $X(z)$ sa TZ avec la RDC : $r_1 \leq |z| \leq r_2$

Linéarité

$$ax(n)+by(n) \rightarrow aX(z)+bY(z)$$

La RDC est au moins l'intersection de la RDC de $X(z)$ et de la RDC de $Y(z)$

Changement d'échelle en z

$$a^n x(n) \rightarrow X\left(\frac{z}{a}\right)$$

RDC : $|a| r_1 \leq |z| \leq |a| r_2$

Retournement du temps

$$x(-n) \rightarrow X(z^{-1})$$

RDC : $\frac{1}{r_2} \leq |z| \leq \frac{1}{r_1}$

Théorème de la valeur finale

$$\lim_{n\rightarrow+\infty} x(n) = \lim_{z\rightarrow 1} (z-1)X(z)$$

Décalage temporel

$$x(n-n_0) \rightarrow z^{-n_0} X(z) \quad \forall n_0$$

La RDC est identique à l'exception de restrictions éventuelles en $z=0$ et $z=\infty$

Dérivation en z

$$n\, x(n) \rightarrow -z \frac{dX(z)}{dz}$$

La RDC est identique à l'exception de restrictions éventuelles en $z=0$ et $z=\infty$

Produit de convolution

$$x(n) * y(n) \rightarrow X(z).Y(z)$$

La RDC est au moins l'intersection de la RDC de $X(z)$ et de la RDC de $Y(z)$

Théorème de la valeur initiale

$$\lim_{x\rightarrow 0} x(n) = \lim_{z\rightarrow\infty} X(z)$$

Transformées en z usuelles

	Signal $x(n)$	Transformée en Z $X(z)$	Domaine de convergence
1	$\delta[n]$	1	$\mathbb{C}$
2	$u[n]$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$\lvert z\rvert > 1$
3	$a^n u[n]$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
4	$na^n u[n]$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
5	$-a^n u[-n-1]$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$\lvert z\rvert < \lvert a\rvert$
6	$-na^n u[-n-1]$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$\lvert z\rvert < \lvert a\rvert$
7	$\cos(\omega_0 n)u[n]$	$\frac{1-z^{-1}\cos(\omega_0)}{1-2z^{-1}\cos(\omega_0)+z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > 1$
8	$\sin(\omega_0 n)u[n]$	$\frac{z^{-1}\sin(\omega_0)}{1-2z^{-1}\cos(\omega_0)+z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > 1$
9	$a^n\cos(\omega_0 n)u[n]$	$\frac{1-az^{-1}\cos(\omega_0)}{1-2az^{-1}\cos(\omega_0)+a^2z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
10	$a^n\sin(\omega_0 n)u[n]$	$\frac{az^{-1}\sin(\omega_0)}{1-2az^{-1}\cos(\omega_0)+a^2z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$

Transformée en z et Transformée en z inverse

Transformée en z inverse

- Intégrale de Cauchy $$x(n)=\frac{1}{j2\pi}\oint_C X(z)z^{n-1}dz$$

- Décomposition en éléments simples

$$X(z)=\sum_i X_i(z) \longrightarrow x(n)=\sum_i x_i(n)$$

Les $X_i(z)$ sont des fonctions à TZ^{-1} connues

- Développement en série de puissance

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^{-n} \longrightarrow x(n)=c_n \quad \forall n$$

Si $X(z)$ peut être décomposé en série alors $x(n)$ est le coefficient associé à z^{-n}

TZ et Transformée de Fourier à Temps Discret (TFTD)

- Hypothèse : on suppose que le cercle unité ($|z|=1$) $\in$ RDC de $X(z)$.

On restreint le calcul de $X(z)$ au cercle unité en posant $z=e^{j2\pi f}$

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n).e^{-j2\pi fn}=X(f) \longrightarrow X(f)=X(z)\big|_{z=e^{j2\pi f}}$$

($|z|=1$) $\in$ RDC

La transformée de Fourier à temps discret (TFTD) d'un signal est sa transformée en z évaluée sur le cercle unité

Exemples

Calculer la TZ et la région de convergence associée des signaux suivants :

- $x(n)=a^n\Gamma(n),\ a\in\mathbb{R}$
- $x(n)=\begin{cases} a^n, & n\geq 0 \\ -b^n, & n\leq -1\end{cases}$ avec $|a|<|b|$
- $x(n)=\Gamma(n)-\Gamma(N-n)$

Transformée en z et systèmes linéaires discrets

Caractérisation par la réponse impulsionnelle

$x(n) \longrightarrow$ Système T $\longrightarrow y(n)$

$$y(n)=h(n)*x(n)$$

$$\downarrow$$

$$Y(z)=X(z).H(z)$$

$h(n)$: réponse impulsionnelle du système

Caractérisation du SLID par une équation aux récurrences

Equation aux récurrences : $\displaystyle\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k)=\sum_{r=0}^{M} b_r x(n-r)$

En utilisant la propriété de décalage temporel de la TZ, on a : $\displaystyle\left(\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}\right)Y(z)=\left(\sum_{r=0}^{M} b_r z^{-r}\right)X(z)$

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}{\displaystyle\sum_{r=0}^{M} b_r z^{-r}} \quad \text{ou} \quad H(z)=\frac{b_M z^{-M}+\cdots+b_1 z^{-1}+b_0}{a_N z^{-N}+\cdots+a_1 z^{-1}+a_0}$$

La fonction de transfert $H(z)$ a la forme d'une fraction rationnelle : $H(z)=\dfrac{N(z)}{D(z)}$

$N(z)$ et $D(z)$: polynômes en z^{-1} de degrés respectifs *M pour les entrées* et *N pour les sorties*

Pôles et zéros – stabilité d'un système discret causal

$$H(z)=\frac{N(z)}{D(z)}$$

❑ Zéros d'un système discret

Les zéros sont les racines du polynôme $N(z)$

❑ Pôles d'un système discret

Les pôles sont les racines $\lambda_i \in \mathbb{C}$ du polynôme $D(z)$

➢ Remarque : $H(z)$ diverge ($H(z) = \infty$) pour $z=\lambda_i \Rightarrow \lambda_i \notin$ RDC de $H(z)$

❑ Fonction de transfert $H(z)$ et stabilité d'un système discret causal

- **Causalité**

Le système est causal ssi la RDC de $H(z)$ est l'extérieur d'un disque $\Rightarrow \lambda_i \in$ au disque

$$RDC=\{z\in\mathbb{Z}, |z|>r\} \longrightarrow \lambda_i\in\{z\in\mathbb{Z}, |z|\leq r\}$$

- **Stabilité**

Un système linéaire discret est stable ssi sa FT $H(z)$ converge sur le cercle unité

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}|h(n)|<+\infty \quad \Leftrightarrow \quad \{z\in\mathbb{Z}, |z|=1\}\in RDC$$

- **Conclusion**

Un système discret linéaire et causal est stable ssi tous les pôles de $H(z)$ sont à l'intérieur du cercle unité

Récapitulatif sur les transformées ...

- Transformée de Fourier
  - Pour passer du temps continu à la fréquence continue
- Tranformée de Laplace
  - Généralisation de la TF
  - Permet de décrire les systèmes linéaires continus

<u>Étude des systèmes :</u>

continu 2 continu

- TFTD
  - = transformée de Fourier classique
  - appliquée aux signaux à temps discret
  - La fréquence est continue

discret 2 continu

- Transformée de Fourier Discrete
  - Pour passer du temps discret à la fréquence discrète
  - Algo de calcul rapide : FFT
- Transformée en Z
  - Généralisation de la <u>TFTD</u>(f continue !)
  - Permet de décrire les systèmes linéaires discrets

discret 2 discret