UV Traitement du signal

Cours 5

Filtrage analogique

ASI 3

Contenu du cours

- Introduction
  - Notion de filtrage
  - Filtrages temporel et fréquentiel
- Filtres élémentaires idéaux
- Filtres physiquement réalisables
- Filtres réalisables classiques
  - Synthèse de filtres passe-bas
    - Filtres de Butterworth
    - Filtres de Tchebytchev
    - Filtres de Cauer
  - Obtention des autres filtres par transformation
- Méthodologie de synthèse des filtres
- Exemple

Introduction

❑ Notion de filtrage

Filtrer = arrêter, complètement ou non, empêcher ou gêner le passage de quelque chose.

= changement ou annulation des amplitudes d'un signal.

❑ En général, un système est un filtre

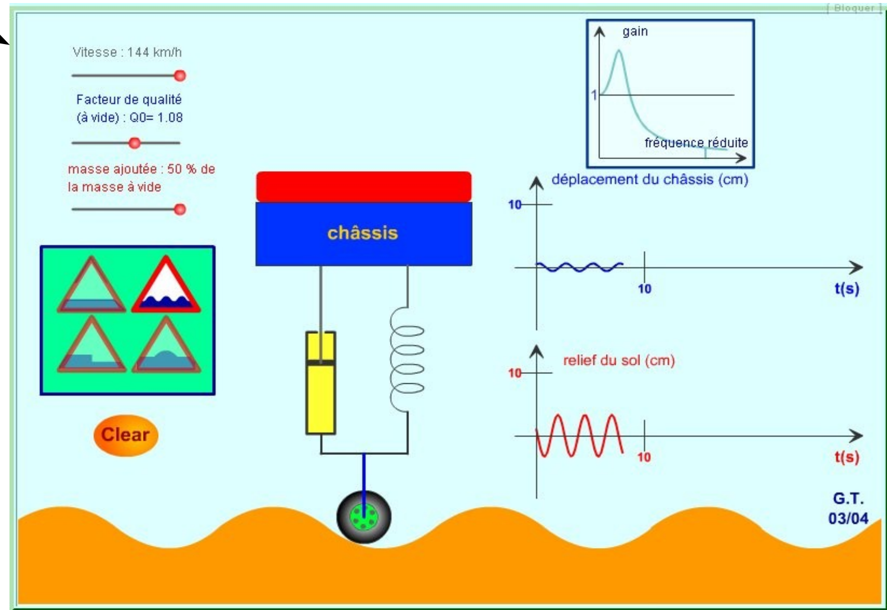
$$x(t) \longrightarrow \boxed{\text{Filtre}} \longrightarrow y(t)$$

❑ But :

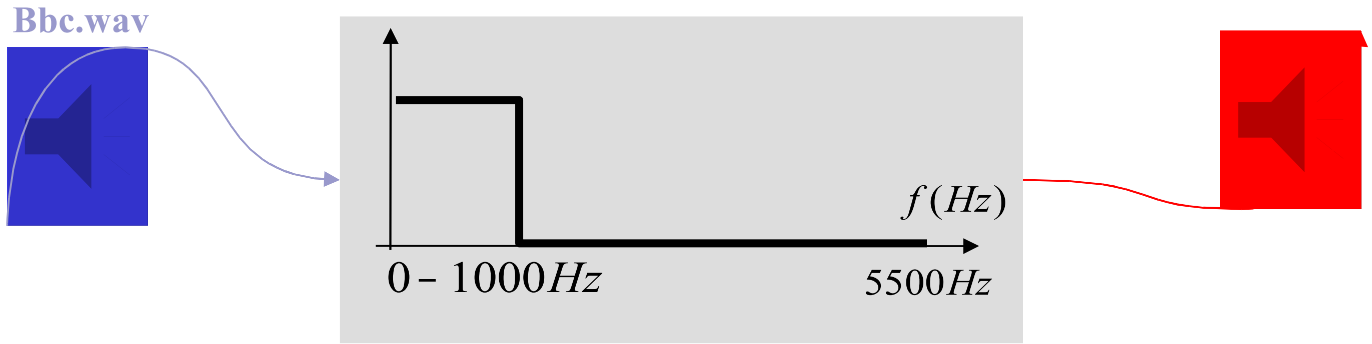
- Sélectionner des parties du signal contenant une information pertinente
- Éliminer du bruit
- Adoucir un signal, éliminer des valeurs aberrantes
- Séparer plusieurs composantes d'un signal
- etc.

Applications

- Réglage de tonalité dans les appareils audio : equalizer
- Suspension des véhicules : filtre mécanique amortissant les chocs (voir applet)
- Protection sismique : filtrage des ondes provenant de la rotation de la terre
- Acoustique : séparation des graves et des aigus dans les enceintes
- Téléphonie mobile,
- Compression de données : mp3
- karaoké
- Imagerie médicale, ...



exemple de filtrage sur un fichier son



exemple de filtrage sur un fichier image

Application d'un filtre pour la détection de contours
(filtre de laplace sous gimp)

Problématique

- Objectif du filtre : sélection de composantes particulières

- Caractérisation du filtre : capacité à transmettre certaines fréquences ou certaines parties du signal

- Difficultés :
  - **Détermination de h(t) ou H(f)**
  - **Réaliser le filtre à partir de h(t) ou H(f)**

$$x(t) \longrightarrow \boxed{\text{Système (filtre)}} \longrightarrow y(t)$$

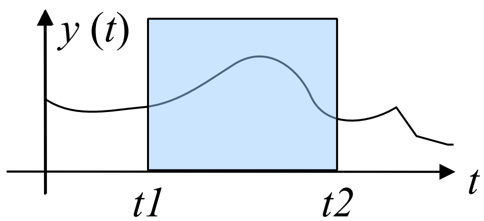
Réponse impulsionnelle
$h(t)$ / $H(f)$

$H(f)$ →
- Module $|H(f)| \longrightarrow$ Gain en décibel (dB) : $G(f) = 20\log|H(f)|$
- Argument $\phi(f) = \arg\left(H(f)\right)$

- Filtrage temporel / fréquentiel

Filtrage temporel / fréquentiel

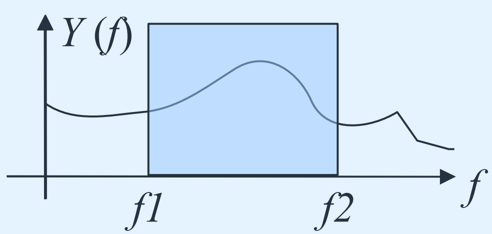
- Filtrage temporel : atténuation ou interruption du signal au cours du temps
  - Changement / annulation des amplitudes d'un signal
  - Sélection d'une portion du signal
  - Lissage du signal



$$y(t) = h(t) \times x(t)$$ Multiplication temporelle

$$Y(f) = H(f) * X(f)$$ Convolution fréquentielle

- Filtrage fréquentiel : sélection ou atténuation de certaines fréquences
  - Sélection de certaines composantes fréquentielles du signal
  - Blocage des impulsions transitoires



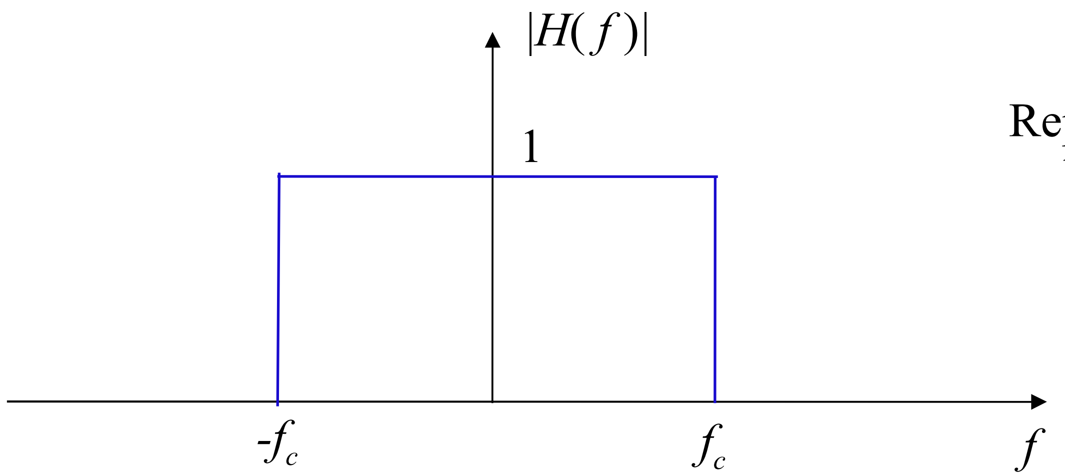
$$y(t) = h(t) * x(t)$$ Convolution temporelle

$$Y(f) = H(f) \times X(f)$$ Multiplication fréquentielle

Filtres élémentaires

Filtre passe-bas

- Sélection des fréquences basses
- Élimination des fréquences supérieures à f_c (fréquence de coupure)
- Bande passante $BP = [0, f_c]$



Représentation bilatérale

- Remarque

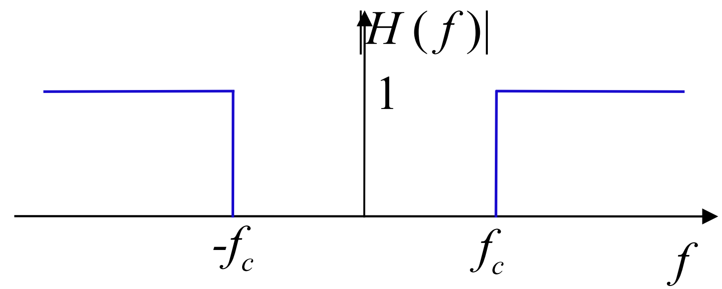
  La bande passante d'un filtre est l'intervalle de fréquence dans lequel son gain $G(f)$ est supérieur à un gain de référence (par exemple –3dB)

  La bande passante à –3dB est $\left\{ f : 20\log \dfrac{|H(f)|}{\max(|H(f)|)} \geq -3 \right\}$

Filtres élémentaires

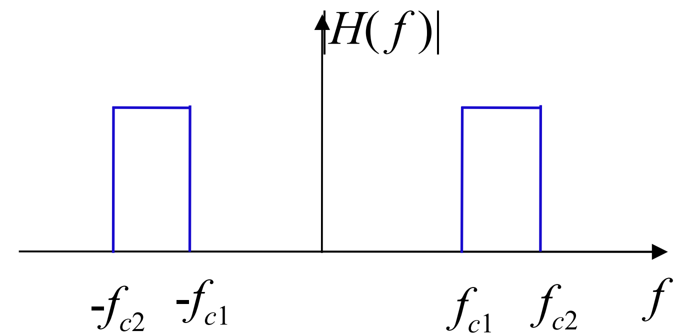
Filtre passe-haut

- Transmission des fréquences supérieures à f_c
- Élimination des fréquences inférieures à f_c
- Bande passante $BP = [f_c, \infty[$



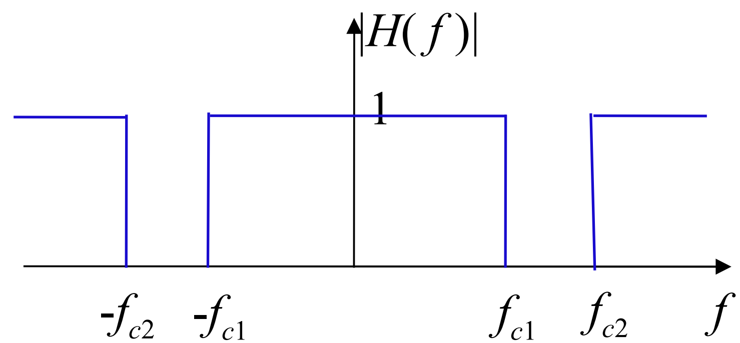
Filtre passe-bande

- Transmission des fréquences appartenant à un intervalle donné
- Bande passante $BP = [f_{c_1}, \quad f_{c_2}]$



Filtre coupe-bande

- Transmission des fréquences hors d'une bande déterminée
- Bande passante $BP = [0, \quad f_{c_1}] \cup [f_{c_2}, \quad \infty[$



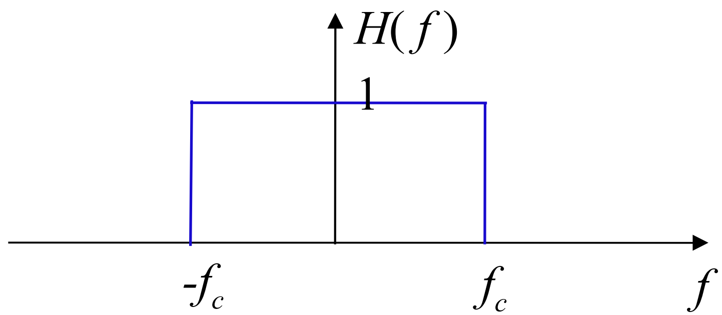
Filtre physiquement réalisable

La sortie ne se produit pas avant l'entrée

Un filtre est physiquement réalisable s'il est stable et causal

Revient à son état initial après excitation

Soit le filtre passe-bas idéal



$$H(f) = \Pi_{2f_c}$$

$$\Big\downarrow \text{TF inverse}$$

$$h(t) = 2f_c \,\mathrm{sinc}(2\pi f_c t)$$

réponse impulsionnelle du filtre

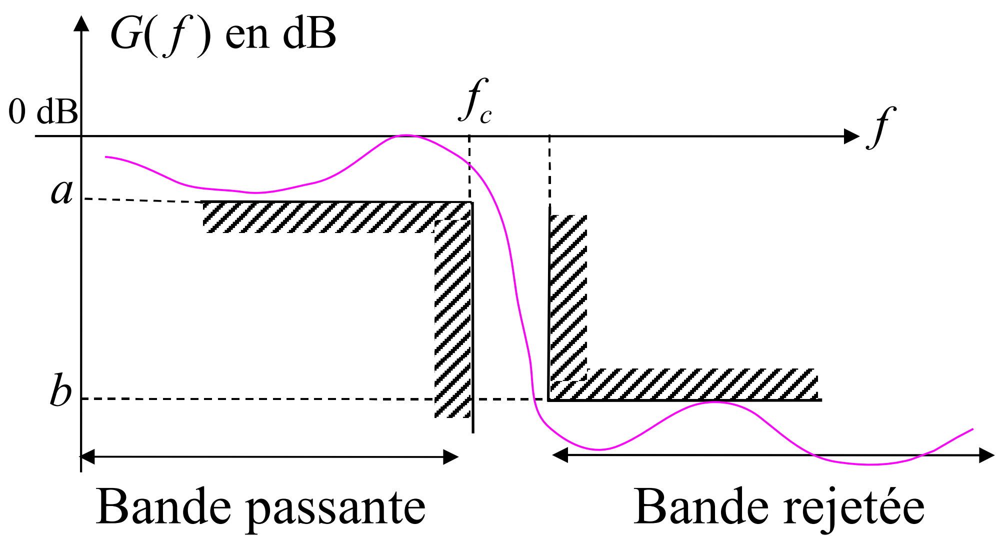
Donc pour un Dirac en 0, la réponse impulsionnelle h(t) va de – à + l'infini, elle commence donc avant la cause ! Le système est NON CAUSAL.

→ Ce filtre n'est pas physiquement réalisable

→ Nécessité de trouver une approximation du filtre idéal

Caractérisation des filtres

- Discontinuités / dérivées infinies en fréquence -> réponse impulsionnelle non causale = non physiquement réalisable => Approximation du filtre idéal
- Les Filtres réels sont définis par un gabarit spécifiant :
  - Une zone dans laquelle doit passer sa courbe fréquentielle
  - La bande passante et la bande atténuée (ou rejetée)
  - Les ondulations maximales admissibles dans la bande passante a et l'atténuation minimale dans la bande rejetée b

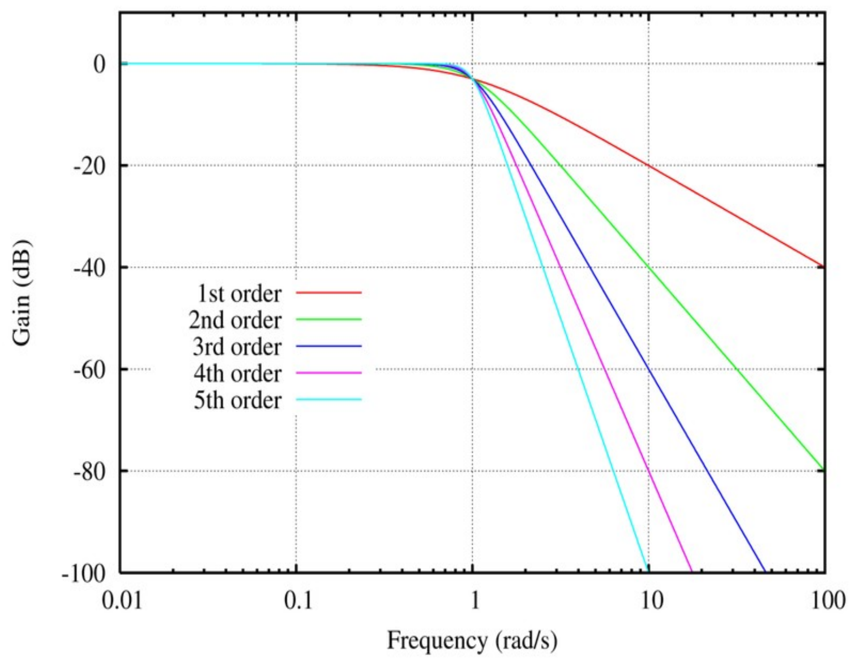


=> filtres réels classiques :

COMPROMIS

Filtres classiques

- Filtre de Butterworth : $$|H(f)|^2 = \frac{1}{1+(2\pi f)^{2n}}$$ Passe bas pour $f' = f/f_c$
  - n : ordre du filtre
  - Propriétés
    - Conçu pour avoir une réponse aussi plate que possible dans la bande passante
    - Pour tout n, l'Atténuation asymptotique est de $-20n$ dB/décade à partir de Fc = 1



Réalisation :

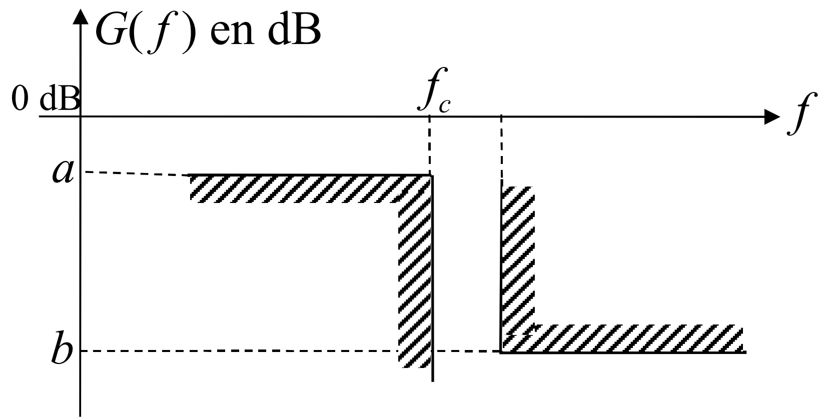
- Quel ordre choisir ?
- Détermination de H(f) ?
- Réaliser le filtre à partir de H(f) ?

Filtres classiques

Filtre de Butterworth : réalisation

- Problème N°1: déterminer l'ordre du filtre

  - On trouve l'ordre du filtre en fonction de l'atténuation b que l'on désire



- Détermination de n en fonction de b : atténuation minimale en bande rejetée

$$G(f_s) = 20\log|H(f_s)| \leq b \longrightarrow 20\log\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{f_s}{f_c}\right)^{2n}}} \leq b \longrightarrow n \geq \frac{\log\left(10^{-\frac{b}{10}} - 1\right)}{2\log\left(\frac{f_s}{f_c}\right)}$$

n : entier

Filtres classiques

- Filtre de Butterworth : réalisation
  - Problème N° 2 : déterminer la fonction de transfert

A partir de l'ordre du filtre, les tables nous donnent le polynôme H(s) :

n	$B_n(s)$
1	$s+1$
2	$s^2+1,414s+1$
3	$(s+1)(s^2+s+1)$
4	$(s^2+0,7654s+1)(s^2+1,8478s+1)$
5	$(s+1)(s^2+0,6180s+1)(s^2+1,6180s+1)$
6	$(s^2+0,5176s+1)(s^2+1,414s+1)(s^2+1,9318s+1)$
7	$(s+1)(s^2+0,4450s+1)(s^2+1,247s+1)(s^2+1,8022s+1)$
8	$(s^2+0,3986s+1)(s^2+1,111s+1)(s^2+1,6630s+1)(s^2+1,9622s+1)$

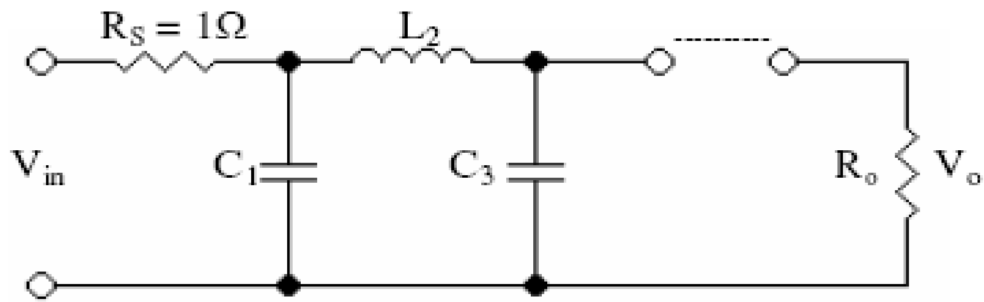
Avec $H(s) = 1/B_n(s)$

Filtres classiques

Filtre de Butterworth : réalisation

◆ Problème N° 3 : réalisation pratique du filtre :

Par exemple, implémentation électronique avec un montage passif grâce à la méthode de Cauer :



- Le k^ième^ élément du circuit est donné par :

$$C_k = 2\sin\left[\frac{(2k-1)}{2n}\pi\right](k\ impair)$$

$$L_k = 2\sin\left[\frac{(2k-1)}{2n}\pi\right](k\ pair)$$

Filtres classiques

- Filtres de Tchebychev de type I

$$|H(f)|^2 = \frac{1}{1+\epsilon^2 T_n^{\,2}(2\pi f)}$$

Filtre qui minimise les oscillations dans la bande atténuée

- Filtres de Tchebychev de type II

$$|H(f)|^2 = \frac{\frac{\epsilon}{1-\epsilon} T_n^{\,2}\left(\frac{1}{2\pi f}\right)}{1+\frac{\epsilon}{1-\epsilon} T_n^{\,2}\left(\frac{1}{2\pi f}\right)}$$

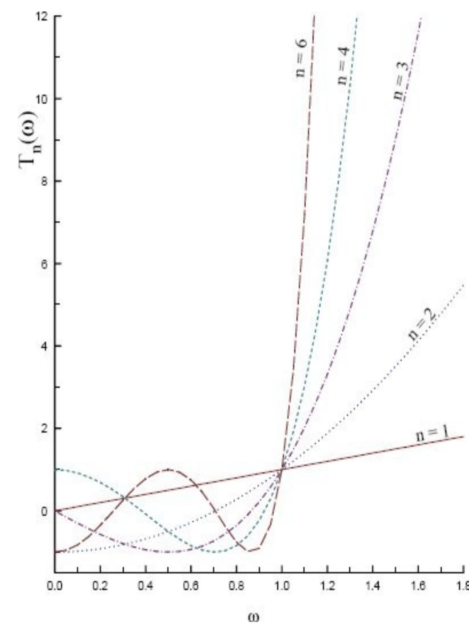
Filtre qui minimise les oscillations dans la bande passante

- *Avec T_n* : polynômes de Tchebytchev

- $T_n(x) = \begin{cases} \cos\left(n\cos^{-1}(x)\right) & \text{si } x < 1 \\ \cosh\left(n\cosh^{-1}(x)\right) & \text{si } x > 1 \end{cases}$

- $T_n(1) = 1 \ \forall\, n$

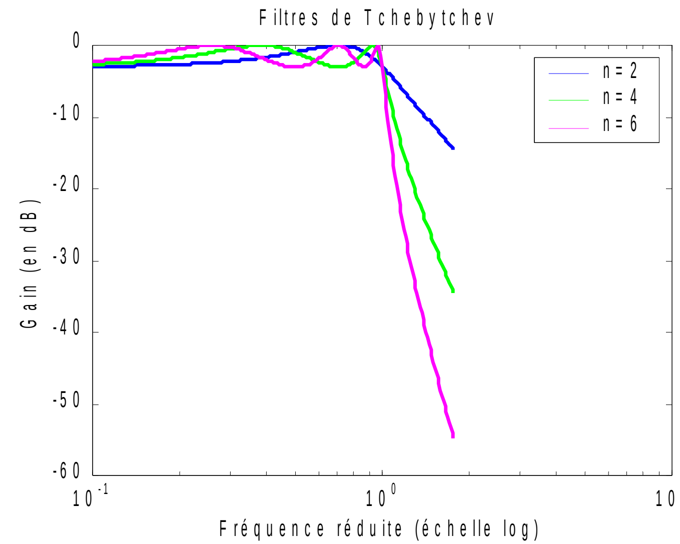
plus d'ondulations pour x > 1



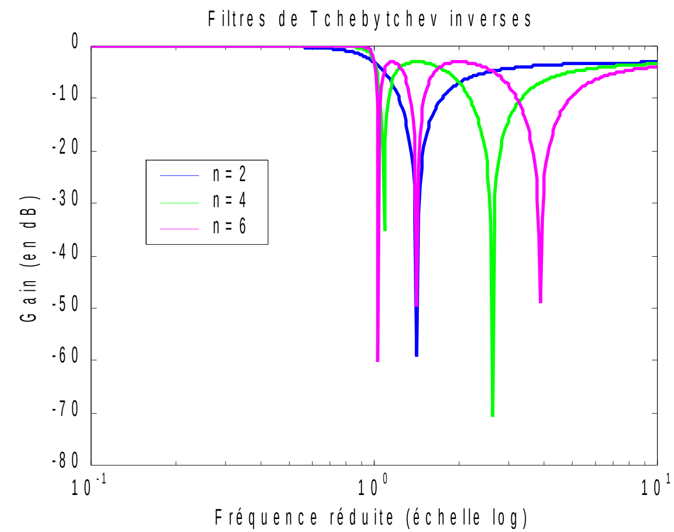
Filtres classiques

❑ Filtres de Tchebychev

- Propriétés des filtres de Tchebytchev I
  - Ondulation dans la bande passante réglée par ε
  - Pas d'ondulation en bande rejetée
  - Raideur de coupure importante
  - Meilleure atténuation que butterworth



- Propriétés des filtres de Tchebytchev II
  - Ondulation dans la bande rejetée réglée par ε
  - Pas d'ondulation en bande passante



Comme pour Butterworth, on détermine l'ordre, ε et H(s) à partir du gabarit et de tables

Filtres classiques

Filtres de Tchebychev de type I : réglage des paramètres

- Problème : déterminer n, ε et la FT $H(s)$ à partir du gabarit

$$n \geq \frac{\cosh^{-1}\sqrt{\dfrac{\left(10^{-0.1b}-1\right)}{\varepsilon^{2}}}}{\cosh^{-1}\left(\dfrac{f_s}{f_c}\right)} \qquad \varepsilon = \sqrt{10^{-\frac{a}{10}}-1}$$

A partir de n et ε, on déduit $H(s)$ en utilisant les tables :

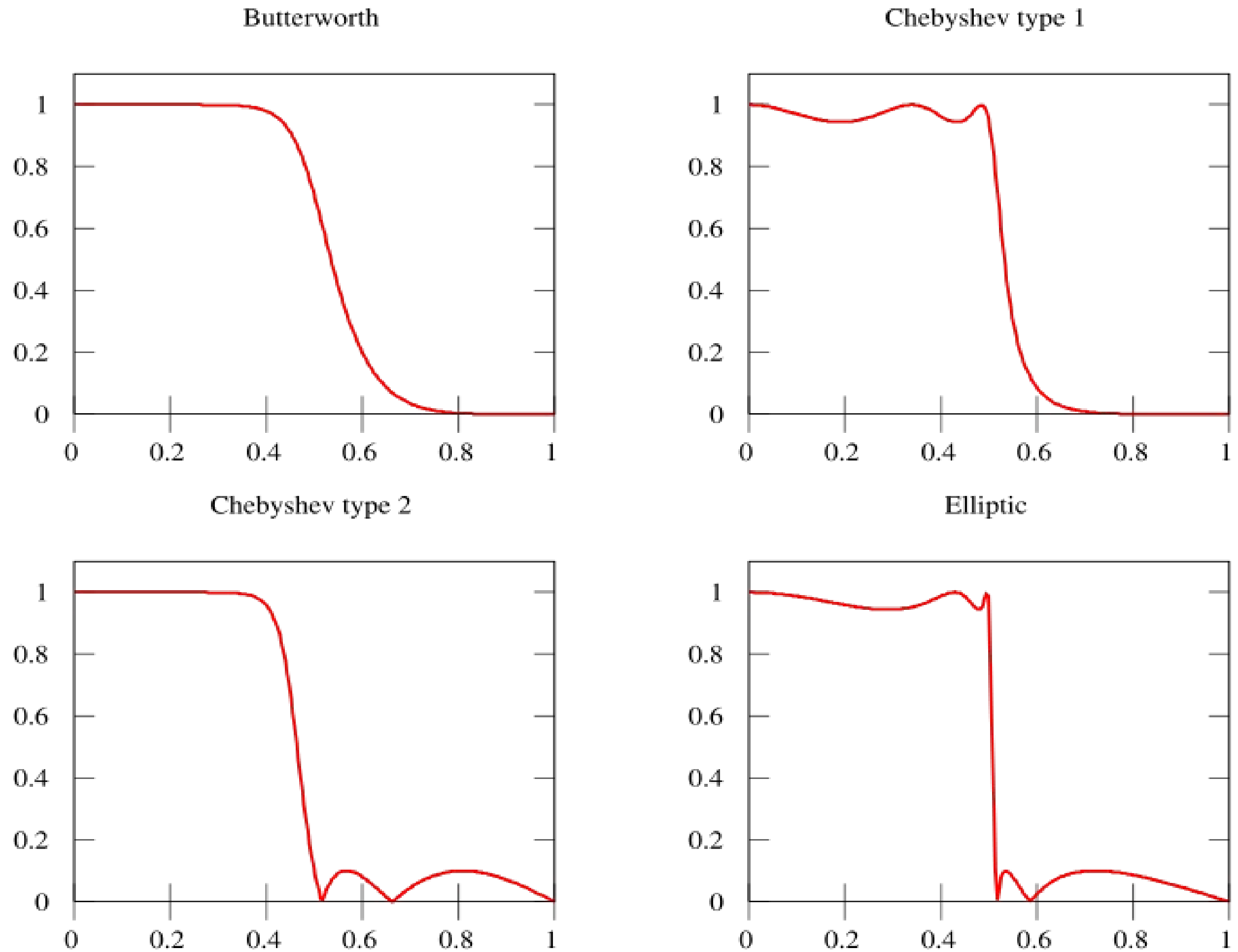
	n	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6	g_7	g_8	g_9	g_{10}	g_{11}
Ondulation 0,5 dB	1	0,6986	1									
	2	1,4029	0,7071	1,9841								
	3	1,5963	1,0967	1,5963	1							
	4	1,6703	1,1926	2,3661	0,8419	1,9841						
	5	1,7058	1,2296	2,5408	1,2296	1,7058	1					
	6	1,7254	1,2479	2,6064	1,3137	2,4758	0,8696	1,9841				
	7	1,7372	1,2583	2,6381	1,3444	2,6381	1,2583	1,7372	1			
	8	1,7451	1,2647	2,6564	1,359	2,6964	1,3389	2,5093	0,8796	1,9841		
	9	1,7504	1,269	2,6678	1,3673	2,7239	1,3673	2,6678	1,269	1,7504	1	
	10	1,7543	1,2721	2,6754	1;3725	2,7392	1,3806	2,7231	1,3485	2,5239	0,8842	1,9841
Ondulation 1,0 dB	1	1,0177	1									
	2	1,8219	0,685	2,6599								
	3	2,0236	0,9941	2,0236	1							
	4	2,0991	1,0644	2,8311	0,7892	2,6599						
	5	2,1349	1,0911	3,0009	1,0911	2,1349	1					
	6	2,1546	1,1041	3,0634	1,1518	2,9367	0,8101	2,6599				
	7	2,1664	1,1116	3,0934	1,1736	3,0934	1,1116	2,1664	1			
	8	2,1744	1,1161	3,1107	1,1839	3,1488	1,1696	2,9685	0,8175	2,6599		
	9	2,1797	1,1192	3,1215	1,1897	3,1747	1,1897	3,1215	1,1192	2,1797	1	
	10	2,1836	1,1213	3,1286	1,1933	3,189	1,199	3,1738	1,1763	2,9824	0,821	2,6599

Filtres classiques

- Filtres de Cauer ou filtres elliptiques

$$|H(f)|^2 = \frac{1}{1+\varepsilon^2 R_n^2(2\pi f)}$$

- Optimaux en terme de bande de transition
- Ondulations en bande passante et atténuée



Finalement, on choisit son filtre en fonction des besoins : ondulations, raideur

Transformation de filtres

Les définitions précédentes correspondent à des filtres génériques. Le filtre voulu s'obtient par changement de variables, en introduisant la fréquence de coupure :

❑ Changement de variables	❑ Filtre associé
$f' \leftrightarrow \dfrac{f}{f_o}$	◆ passe-bas $f_c = f_o$
$f' \leftrightarrow \dfrac{f_o}{f}$	◆ passe-haut $f_c = f_o$
$f' \leftrightarrow \dfrac{f_o}{B} \cdot \dfrac{\left(\dfrac{f}{f_o}\right)^2 + 1}{\dfrac{f}{f_o}}$	◆ passe bande $f_o = \sqrt{f_1 f_2}$ $B = f_2 - f_1$
$f' \leftrightarrow \dfrac{B}{f_o} \cdot \dfrac{\dfrac{f}{f_o}}{\left(\dfrac{f}{f_o}\right)^2 + 1}$	◆ coupe-bande $f_o = \sqrt{f_1 f_2}$ $B = f_2 - f_1$

Exemples de transformation

- Soit le filtre suivant : $H(f)$ passe-bas

Butterworth 2ème ordre $$H(f) = \frac{1}{1+\sqrt{2}\,2\pi f + 4\pi^2 f^2}$$

- Filtre passe haut équivalent

Changement de variable $f' \leftrightarrow \dfrac{f_o}{f}$

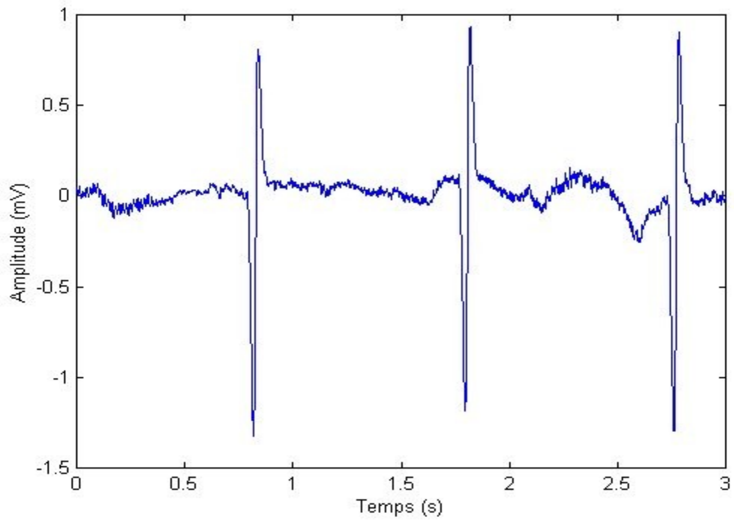
$$H(f') = \frac{1}{1+\sqrt{2}\,2\pi \frac{f_o}{f'} + 4\pi^2 \left(\frac{f_o}{f'}\right)^2} \longrightarrow H(f) = \frac{f^2}{f^2+\sqrt{2}\,2\pi f_o f + 4\pi^2 f_o^2}$$

- Réalisation effective des filtres :
  - Electronique (montage RLC) : filtres passifs (bon marché, délicat en basses fréquences)
  - Electronique (montage avec amplificateurs opérationnels) : filtres actifs
  - Mécanique (ressort amortisseur)

Exemple de filtrage

Soit un signal $x(t)$ est un signal physiologique (ECG) et un bruit $b(t)$ superposé

- Problème : élimination du bruit pour améliorer la détection de pathologies cardiaques



$$x_b(t) = x(t) + b(t)$$

Objectif : retrouver $x(t)$ à partir de $x_b(t)$

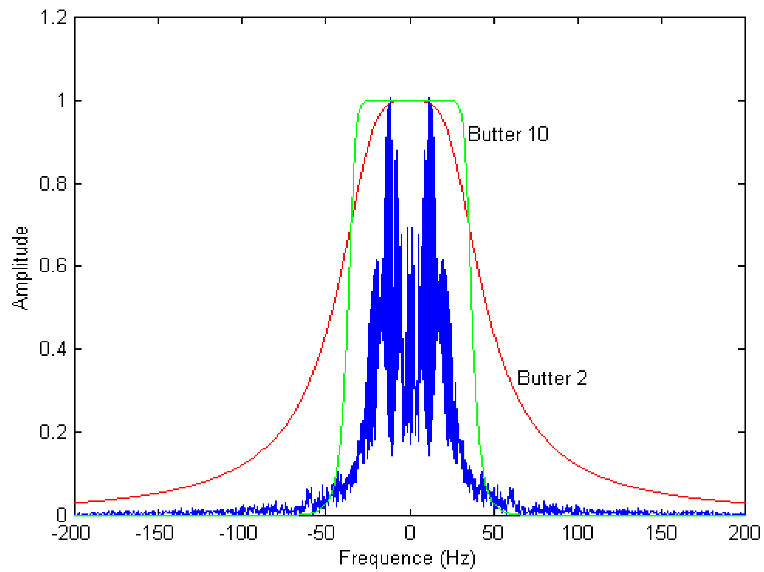
Elimination du signal perturbateur
→ filtrage du bruit.

Filtre passe bas de f_c=35 Hz

- Analyse du spectre de $x_b(t)$:

Spectre et gabarit proposés :

Spectre du signal
Butterworth 10
Butterworth 2



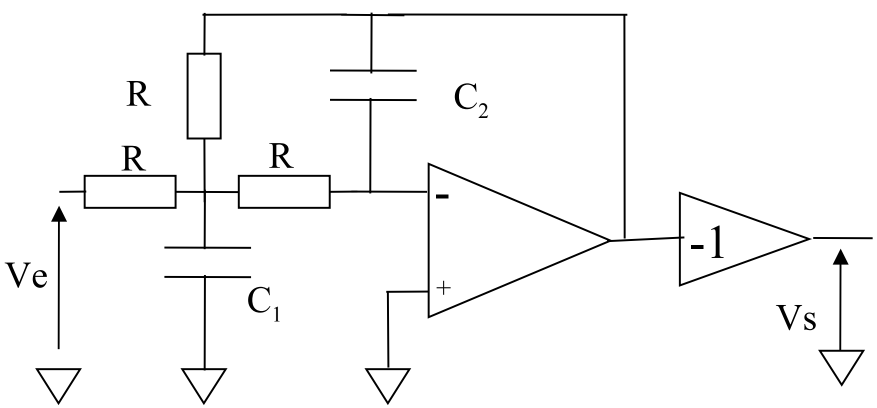
Exemple de filtrage

- Filtre passe-bas électronique du 2e ordre :

  Butterworth : table + transformation

- Réalisation pratique

$$H(f) = \frac{48361}{48361 + 311\,j2\pi f + \left(j2\pi f\right)^2}$$



$$H(f) = \frac{H_o}{\left(j\dfrac{f}{f_o}\right)^2 + \dfrac{1}{Q}\cdot j\dfrac{f}{f_o} + 1} \qquad Q = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{C_1}{C_2}}$$

$$H_o = 1 \qquad f_o = \frac{1}{2\pi R\sqrt{C_1 C_2}}$$

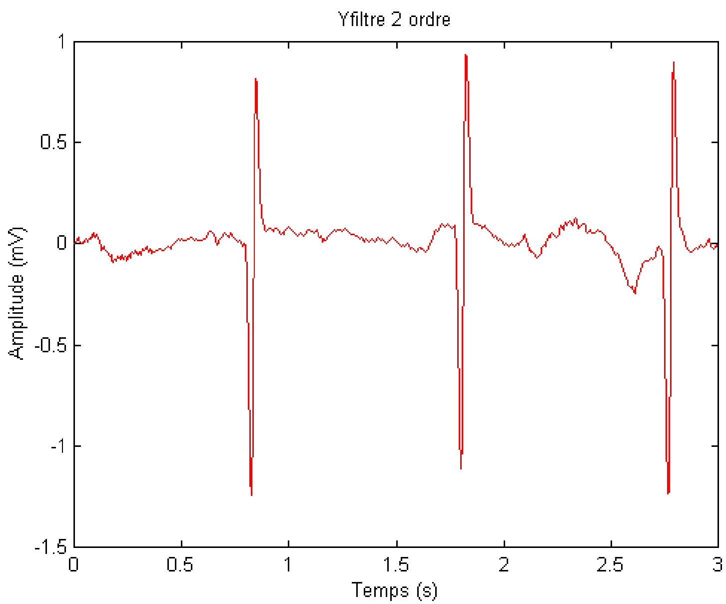
On a : $f_o = 35$ Hz $\qquad Q = \sqrt{2}$

$R = 1071\ \Omega$	$C_1 = 18\ \mu F$	$C_2 = 1\ \mu F$

Exemple de filtrage

❑ Résultats

- Filtrage avec Butterworth 2

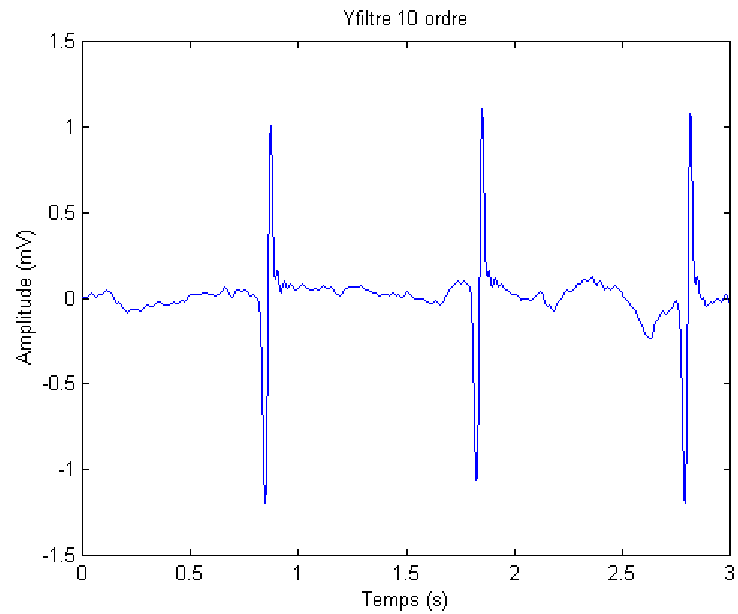


Suppression du bruit hautes fréquences.

<u>Amélioration des performances</u>

- augmentation de l'ordre,
- diminution de la f_c,
- changement de filtre

- Filtrage avec Butterworth 10



Atténuation plus importante

Différence faible car composantes fréquentielles d'amplitude peu élevée

A savoir : tout :)

- Toutes les définitions : classification des signaux, etc.
- Connaître les signaux usuels : échelon/sin/cos/porte/expo/dirac/ ...
- Energie et puissance, corrélation, distribution
- Notion de fréquence, savoir calculer la DSF et la TF d'un signal + TF inverse
- Connaître leur propriétés : dualité, etc.
- Systèmes :
  - Convolution
  - Notion de réponse impulsionnelle
  - Transformée de Laplace + propriétés, TL inverse
  - Plancherel
  - Fonction de transfert d'un système : pôles/zéros
- Filtrage :
  - Définition, notion de bande passante
  - Filtre usuels : butterworth, Tchebychev, Cauer