Livret d'exercices

Théorie des Graphes et Recherche Opérationnelle

michel.mainguenaud@insa-rouen.fr

La série d’exercices présentés ici provient de diverses sources et notamment le Roseaux (Exercices et problèmes résolus de recherche opérationnelle, Dunod) dont les exemplaires sont disponibles à la bibliothèque. Cette série s’étoffera au cours du temps. Elle contient aussi les exercices donnés lors des contrôles des années précédentes.

1 Environnement des graphes

1.1 Bases de données

Soit une relation (au sens base de données) modélisant un graphe :

Graphe (Numéro, Origine, Destination)

Donner une requête SQL permettant d'afficher le message «multi-graphe» si le graphe considéré est un multigraphe.

1.2 Algorithmique

On suppose que l'on dispose des constructeurs de tableau [], d'ensemble {}, de structure < > et des types abstraits Noeud, Arc, Graphe = < X : {Noeud}, U : {Arc}>.

1) Ecrire un algorithme qui détermine à partir d'un graphe et d'un noeud a, la recherche d'une composante fortement connexe
2) Ecrire un algorithme qui détermine à partir d'un graphe toutes les composantes fortement connexes

2 Représentation physique

2.1 Matrice Booléenne -> Graphe

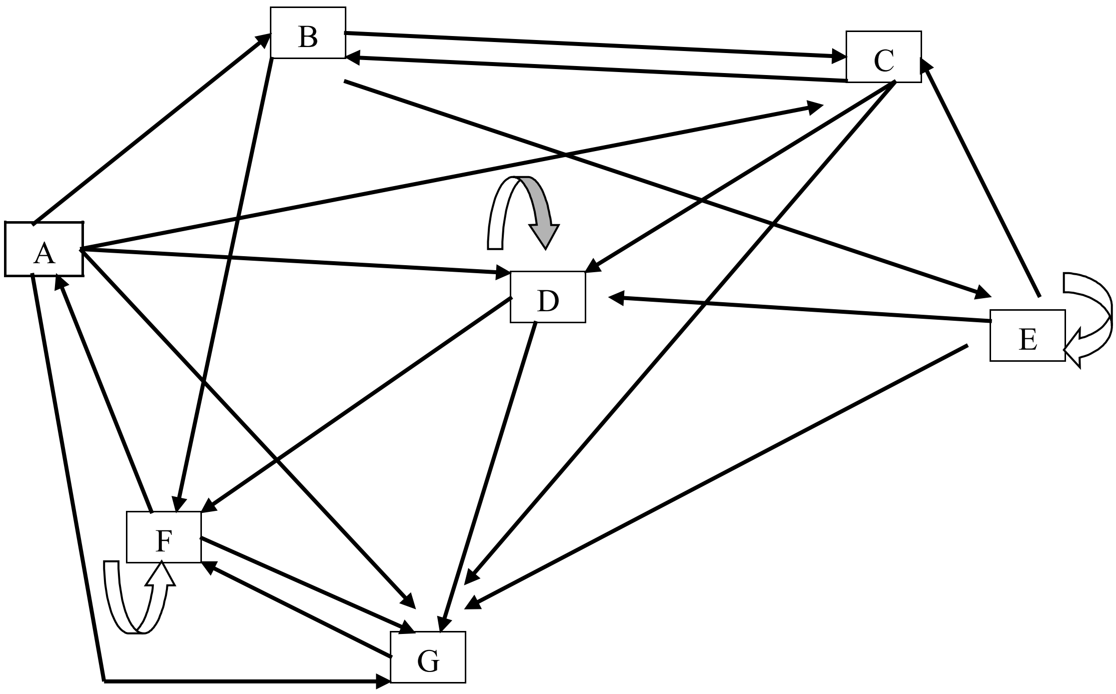
Soit le graphe dont la matrice booléenne associée est la suivante :

	1	2	3	4	5	6	7
1	1	0	1	0	0	1	0
2	0	1	1	0	1	0	1
3	0	1	0	1	0	0	1
4	1	1	1	0	0	0	1
5	0	1	0	0	1	1	0
6	0	0	0	1	0	0	1
7	1	0	1	0	1	0	0

1) Ce graphe est-il orienté ?
2) Préciser la valeur du demi-degré extérieur du nœud 5
3) Précisez la valeur du demi-degré intérieur du nœud 4
4) Dessinez le graphe

2.2 Graphe -> Matrice Booléenne

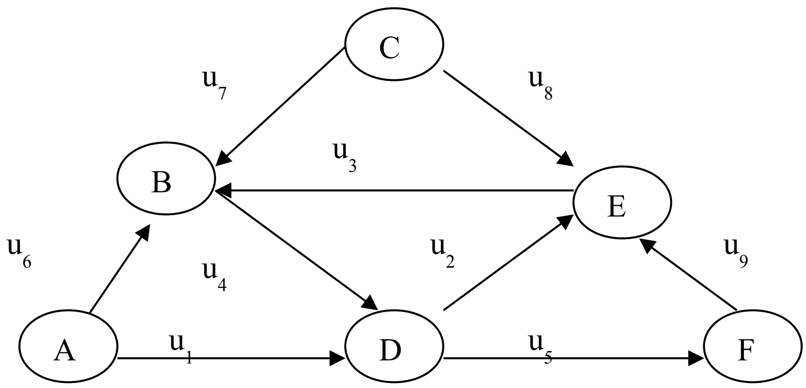
Etablir la matrice booléenne du graphe et donner le co-cycle de {B, C, D}



3 Topologie

3.1 Chaîne/Chemin

Soit le graphe :

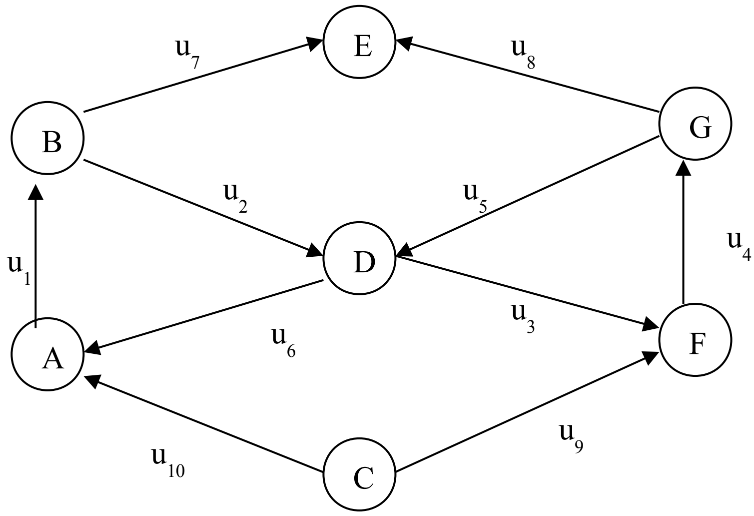


1) En considérant le graphe comme non orienté, donner une chaîne de A à F passant par E sans utiliser deux fois la même arête.
2) En considérant le graphe comme non orienté, donner une chaîne élémentaire de A à F

3) En considérant le graphe comme orienté idem question (1) et (2) avec les chemins et arcs

3.2 Circuit

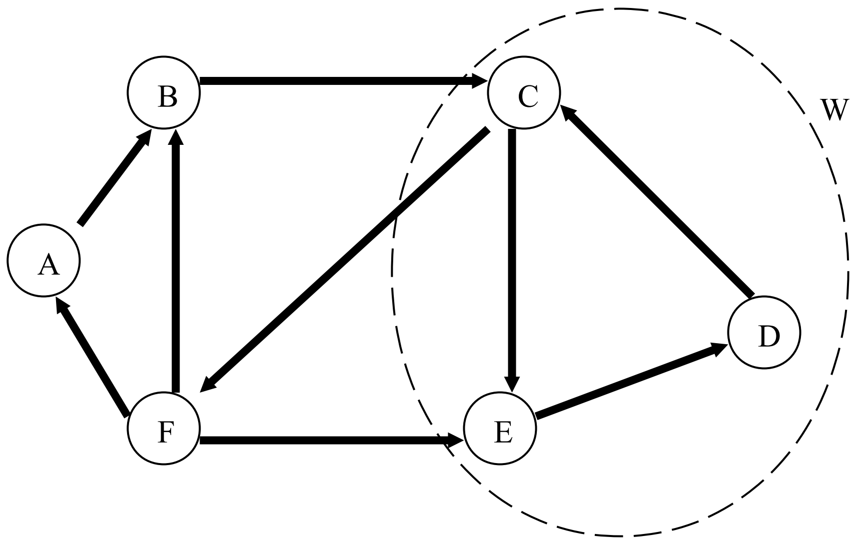
Soit le graphe :



1) Donner un circuit non élémentaire partant de A et passant par G
2) Donner un circuit élémentaire à partir de A
3) En considérant le graphe comme non orienté idem question (1) et (2) pour un cycle et un cycle élémentaire

3.3 Cocircuit / Cocyle

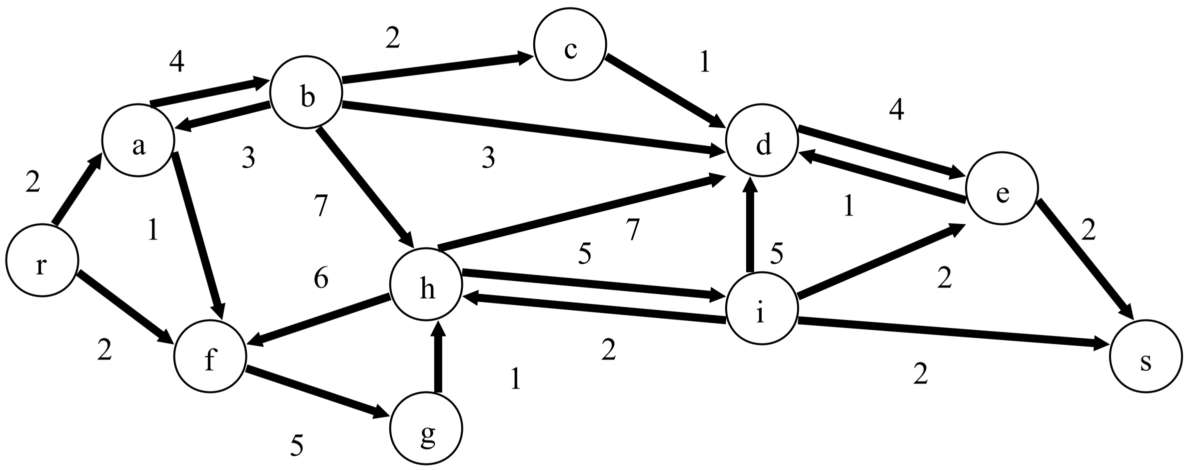
Soit le graphe :



1) Donner les cocircuits de W
2) Donner le cocyle de W

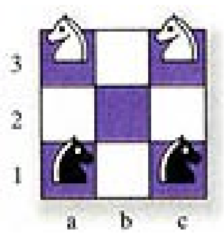
3.4 Connexité

Soit le graphe :



1) Donner les composantes fortement connexes du graphe
2) Donner le graphe réduit (l'arc retenu est l'arc de poids le plus faible).

3.5 Echec et brillant



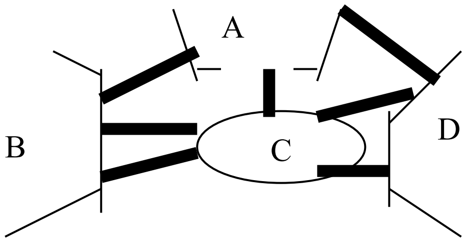
Partant de cette configuration, construire un graphe et définir les mouvements à effectuer pour échanger les places des chevaux blancs et noirs, en respectant les déplacements des échecs : un cheval change de position en se déplaçant de deux cases verticales (resp. horizontales) puis d'une case en latéral (resp. vertical).

3.6 Tournoi

Dans un tournoi de jeu de plateau, chaque concurrent doit rencontrer tous les autres. Chaque partie dure une heure. Donner le problème formel qui correspond au calcul de la durée minimum du tournoi.
Donner les valeurs dans le cas où le nombre d'engagés est 3, 4, 5 ou 6.

3.7 Königsberg

En 1766, Euler résolut le problème suivant : un promeneur peut-il traverser une fois et une seule tous les ponts de la ville de Königsberg (et revenir à son point de départ)?
Voici le plan de la ville :



Ceci a conduit à définir la notion de chaîne eulérienne (resp. cycle eulérien). Le théorème général est : «Un graphe G connexe admet une chaîne eulérienne si et seulement si le nombre de noeuds de G de degré impair est 0 ou 2» (resp. «tous les sommets sont de degré pair»).

1) Donner la modélisation du problème
2) Démontrer le théorème
3) Existe-t-il une(des) solution(s). Si oui, la(es)quelle(s) ?

3.8 Degrés

Soit un graphe G (X, U, Ψ, ν, ε). Montrez que le nombre de noeuds de degré impair est soit nul soit toujours pair.

3.9 Graphe bi-parti

Un graphe bi-parti peut-il contenir un cycle de longueur impaire (nombre d'arêtes impair). Donnez un exemple ou justifiez.

3.10 Centre

On appelle distance d'un noeud a à un noeud b, la longueur de la chaîne qui relie ces deux noeuds. On appelle écartement d'un noeud a le maximum des distances de a aux autres noeuds du graphe. On appelle un centre, un sommet dont l'écartement est minimum. Soit G un arbre de couverture minimale d'un réseau informatique.
Le centre est-il unique dans G ? Si oui justifiez, si non ce nombre est-il limité ?

3.11 Eulérien

Soit *G* un graphe (non Eulérien) modélisant un réseau de routes bi-directionnelles. Est-il toujours possible de rendre *G* Eulérien en lui rajoutant un noeud et quelques arêtes (pas de boucles)?

3.12 Mon beau sapin

Soit un réseau informatique basé une topologie d'une forêt de k arbres et ayant au total n machines (k et n strictement positifs). Une connexion informatique entre deux machines est bi-directionnelle. Combien de connexion informatique entre machines dois-je construire ?

3.13 Bi-parti

a) Prouvez l'existence ou non d'un graphe non orienté biparti 4-régulier de 11 nœuds. S'il existe dessinez le.
b) Prouvez l'existence ou non d'un graphe non orienté biparti 3-régulier de 8 noeuds. S'il existe dessinez le.

4 Propriétés

4.1 Examens

Cinq étudiants : A, B, C, D, et E doivent passer certains examens parmi les suivants : M1, M2, M3, M4, M5 et M6. Les examens ne se tiennent qu'une seule fois. Chaque étudiant ne peut passer qu'un examen par jour. La liste des inscriptions aux examens est la suivante :

A	M1, M2, M5
B	M3, M4
C	M2, M6
D	M3, M4, M5
E	M3, M6

1) Quel est le nombre minimal de jours nécessaires pour faire passer tous les examens ?
2) Quel est le nombre maximal d'examen que l'on peut effectuer par jour ?

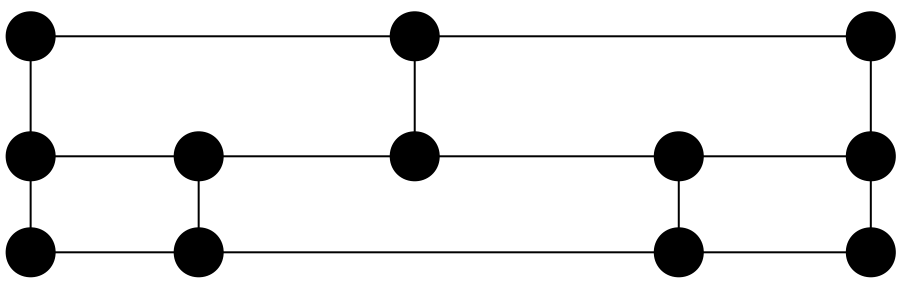
4.2 Localisations potentielles

Une entreprise dispose d'un certain nombre de localisations potentielles pour ses nouvelles installations de ventes L = $\{l_1, \ldots l_p\}$. De ces nouvelles installations, elle attend un bénéfice en fonction de l'installation (b (l_i)). Ces localisations sont distantes afin de couvrir une cible de clientèle plus importante. Afin d'éviter la concurrence entre ses installations de vente, elles doivent être séparées de 40 km au minimum. On cherche à maximiser le bénéfice total.

Proposer une modélisation du problème à l'aide d'un graphe et donner le problème formel qui est associé à cette modélisation.

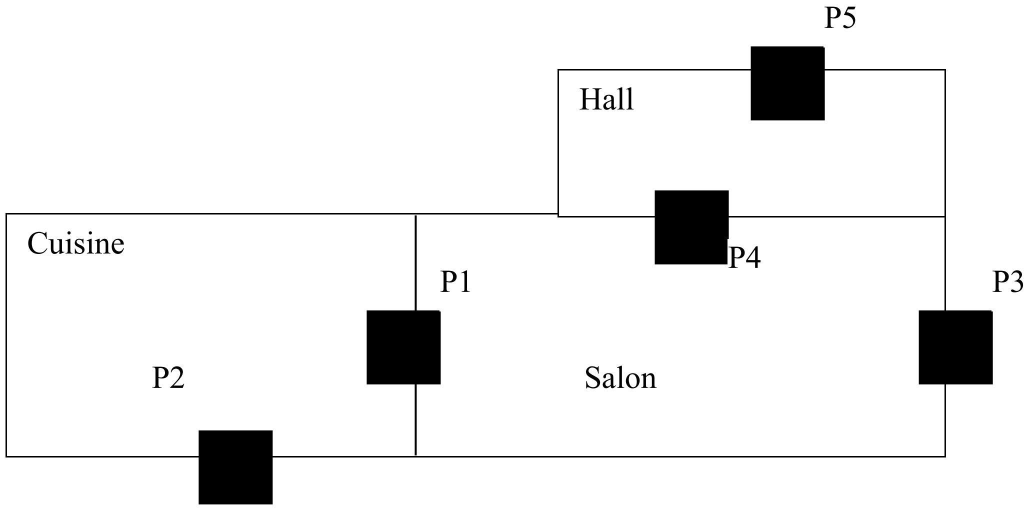
4.3 Crayon

Est-il possible de tracer, sans relever le crayon, une ligne coupant une fois et une seule chaque segment de la figure suivante :



4.4 Portes

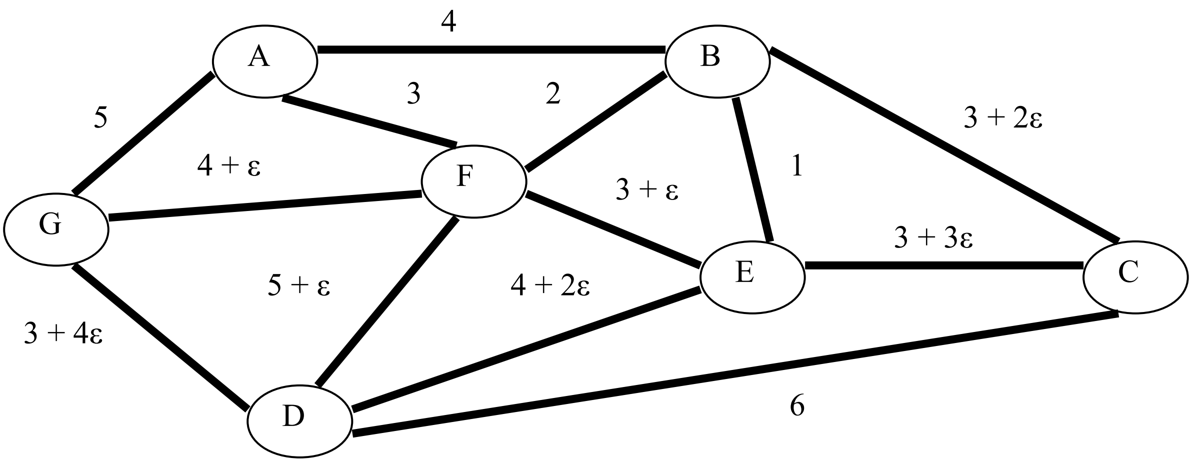
Une porte, Pi, est soit ouverte soit fermée. Pour éviter les courants d'air une seule porte par pièce peut être ouverte simultanément. La maison dispose de 3 pièces (cuisine, salon, hall) selon le plan suivant :



Proposer une modélisation par graphe et par programmation linéaire pour résoudre le problème de la maximisation du nombre de portes ouvertes. Donner le problème formel auquel se ramène l'approche par graphe et donner sa solution.

4.5 Arbre de valeur minimale

Les arcs, u_i, sont supposés numérotés dans l'ordre des poids non croissants, 1 à m – éventuellement en y adjoignant une quantité ε. A partir du graphe :



Construire par l'algorithme de Sollin l'arbre de valeur minimale.

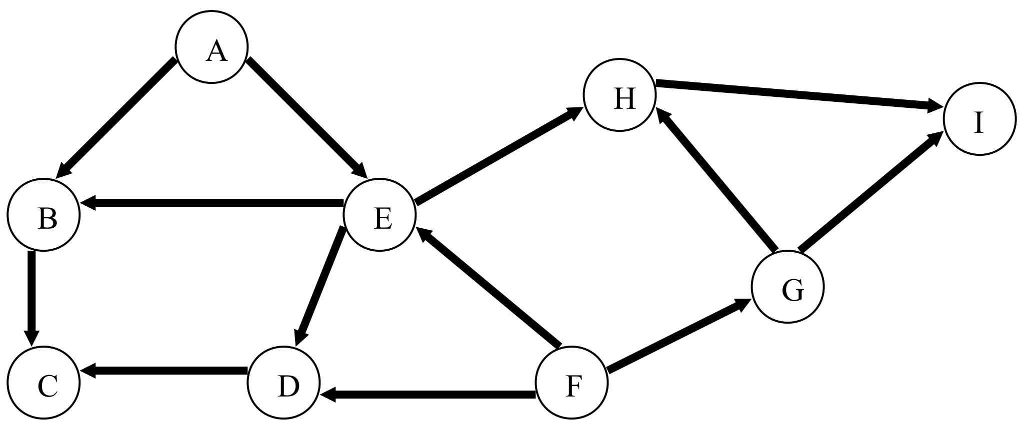
Algorithme de Sollin

(1) Choisir arbitrairement (ici on choisit l'ordre lexicographique) un noeud en dehors de ceux déjà retenus et relier par l'arête de valeur la plus faible ce noeud à l'un des noeuds auxquels il est adjacent
(2) Lorsque l'ensemble des noeuds a été utilisé entièrement :
    a. le résultat est un arbre et le problème est résolu
    b. on n'a que des sous-arbres et on considère chacun comme les noeuds d'un multi-graphe, les arêtes de ce multi-graphe étant toutes les arêtes qui sont susceptibles de connecter deux à deux ces sous-arbres et reprendre l'étape (1)

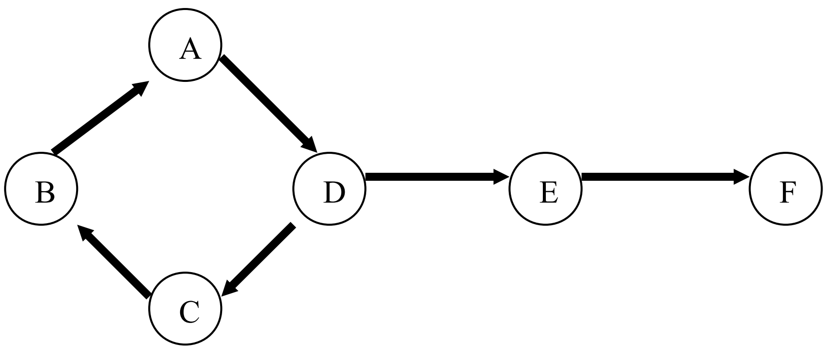
4.6 Fonction de Grundy

A partir du graphe suivant :

1) Le graphe contient-il des boucles, des circuits ?
2) Proposer une numérotation des noeuds permettant d'associer à chaque noeud le plus petit nombre entier positif ou nul qui soit différent des nombres associés à chacun de ses successeurs. Donner la définition formelle de cette fonction à l'aide des fonctions de manipulation de graphes que vous connaissez.



Appliquer les mêmes questions sur le graphe :



4.7 Réseaux de communication

On désire installer au moindre coût un réseau de communication entre divers sites. Le coût des connections inter-sites sont les suivants (symétrique):

	A	B	C	D	E	F	G	H
A	-							
B	5	-						
C	18	17	-					
D	9	11	27	-				
E	13	7	23	20	-			
F	7	10	15	15	15	-		
G	38	38	20	40	40	35	-	
H	22	15	25	25	30	10	45	-

1) Quel est le problème formel associé ?
2) Déterminer la solution optimale

4.8 C'est la fête

Soit une école avec 15 promotions (ASI3, ASI4, ASI5, GM3, GM4, GM5, MRIE3, MRIE4, MRIE5, CFI3, CFI4, CFI5, Meca3, Meca4, Meca5). Chaque délégué de promotion connait l'adresse de 7 autres délégués de promotion.

Un délégué souhaite prévenir l'ensemble des délégués de l'organisation d'une soirée. Il contacte alors ses collègues délégués. Chaque délégué est chargé de transmettre le message aux délégués qu'il connait. Tous les délégués seront ils avertis ?

1) Donnez la modélisation et le problème formel associé.
2) Justifiez votre réponse sur l'avertissement des délégués ou non.

4.9 Arithmétique

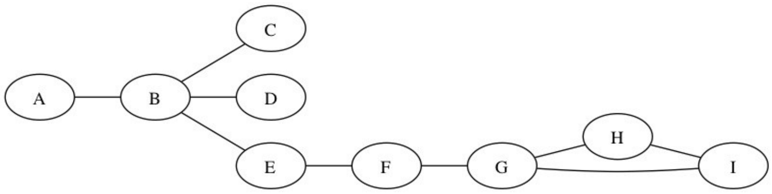
On considère le graphe simple dont les noeuds sont les entiers naturels compris entre 1 et 20, et tel que deux noeuds i et j sont reliés si et seulement si $i + j <= 21$.

1) Prouvez que ce graphe est connexe.
2) Déterminez son diamètre (vous rappellerez la définition du diamètre).

4.10 Nao

Nao se promène sur le graphe suivant. Partant d'un noeud quelconque, Source, il doit déposer un dé sur chacun des autres noeuds (on suppose que la réserve de dés est suffisante) et revenir à son noeud de départ. Compte tenu de sa faible capacité de préhension, il ne peut transporter qu'un dé à la fois (il doit donc revenir au sommet Source avant toute nouvelle livraison). On cherche le(s) noeud(s) Source idéal(ux) pour minimiser les déplacements (le nombre d'arêtes parcourues).

1) Donnez la modélisation et le problème formel associé
2) Donnez le noeud (ou les noeuds) Source idéal(ux).



4.11 Arithmétique le retour

Soit un graphe G (X, U, Ψ, ν, ε).

$\nu(x_i) = i$ pour i = 1, 24

(x_i, x_j) existe si $\nu(x_i)$ divise $\nu(x_j)$

$\varepsilon((x_i, x_j))$ = quotient $(\nu(x_j), \nu(x_i))$: $\varepsilon((3, 15))$ = quotient (15, 3) = 5

Vous disposez des opérateurs de manipulation de graphes vus en cours.

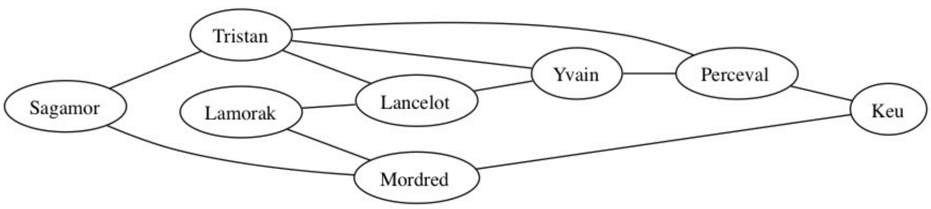
1) Comment reconnait-on qu'un nombre est premier ?
2) Comment obtenir la décomposition en facteurs premiers ?

4.12 Arthur et les mini-chevaliers

Le roi Arthur[1] et ses chevaliers se réunissent autour de leur fameuse table. Voici le graphe des «incompatibilités inter-personnelles» entre les chevaliers.

Arthur souhaite définir un plan de table permettant aux chevaliers de se réunir en dehors de sa présence et de passer une bonne soirée en ayant des personnes compatibles à leur gauche et à leur droite.

1) Donnez la modélisation et le problème formel associé.



Pour donner l'image d'un manager moderne, Arthur propose une organisation à l'aide d'une table en forme de U ou les chevaliers seront assis sur la partie extérieure du U. Il doit alors de nouveau proposer un plan de table.

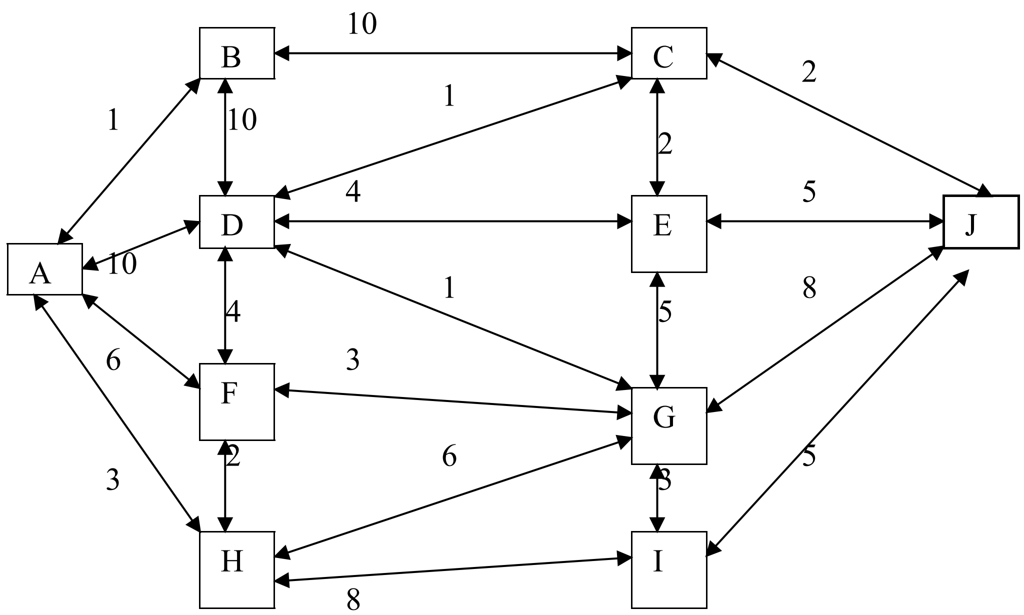
2) Donnez la modélisation et le problème formel associé.

1 Arthur et les chevaliers de la Table ronde - Danielle Quéruel - http://expositions.bnf.fr/arthur/arret/01.htm

5 Chemins

5.1 Evaluation de chemin

Soit le graphe muni d'une valuation des arcs. Sachant qu'il existe un chemin de A à J, donnez la séquence de nœuds formant le chemin entre A et J dont la somme des valuations des arcs est la plus faible à l'aide de l'algorithme de Dijkstra. Vous préciserez alors sa valeur.



5.2 Méthode matricielle

La méthode matricielle (N x N) est définie comme permettant de déterminer les longueurs des plus courts chemins entre tout couple de noeuds d'un graphe.
λ_{ij}: longueur du plus court chemin du noeud i au noeud j et $\lambda^{(m)}_{ij}$ la longueur du plus court chemin contenant au maximum m arcs de i à j. $A(a_{i,j})$ la matrice des liens directs.

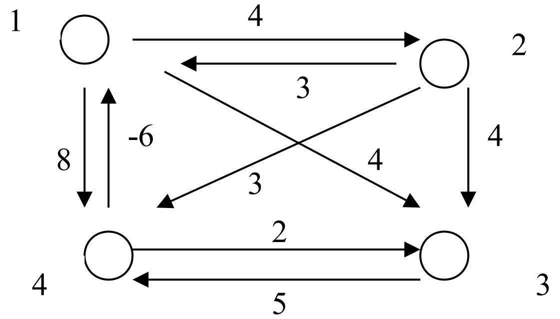
Définition : $\lambda^{(0)}_{ii} = 0 \quad \forall\, i$

$\lambda^{(0)}_{ij} = \infty \quad \forall\, i \neq j$

Itération (jusqu'à m = 1 .. N – 1):

$$\lambda^{(m)}_{ij} = \text{Min}\ \{ \lambda^{(m-1)}_{ij},\ \lambda^{(m-1)}_{ik} + a_{kj}\}\ k = 1, \ldots, N \qquad \forall\, i, j$$

Déterminer par la méthode matricielle la longueur des plus courts chemins entre chaque couple de nœuds du graphe suivant :



6 Parallélisme

6.1 Wifi

On désire faire un réseau de 5 machines (nommées 1 à 5) fonctionnant en Wifi. Le nombre de canaux disponibles est limité. Les machines fonctionnent avec les contraintes suivantes : les deux premières machines ne peuvent pas fonctionner simultanément. Les deux dernières aussi. Au plus une seule des machines 1,3 et 4 peut fonctionner à un instant donné. Combien de machines au maximum peuvent fonctionner simultanément et lesquelles ? Quel est le problème formel (justifier votre réponse)?

6.2 Migration de tâches

On dispose de 3 machines pour faire l'exécution de 4 tâches. Le tableau suivant donne les temps de traitements des tâches sur les différentes machines. Les tâches peuvent migrer d'une machine sur une autre au cours de leur exécution (les temps de communications sont considérés comme négligeables). On souhaite optimiser le temps de réponse. Donnez la modélisation du problème.

Tâche/machine	1	2	3
1	15	10	6
2	9	9	9
3	8	6	8
4	3	3	2

6.3 Wifi le retour

On désire faire un réseau de 5 machines (nommées 1 à 5) fonctionnant en Wifi. Le nombre de canaux disponibles est limité. Les machines fonctionnent avec les contraintes suivantes : les deux premières machines ne peuvent pas fonctionner simultanément. Les deux dernières aussi. M1 ne peut pas fonctionner en même temps que M3 ou M4. Quel est le nombre de canaux minimum pour que toutes les machines fonctionnent ? Quel est le problème formel (justifiez votre réponse) ?

6.4 Emploi du temps

(merci D. Muller)

Trois professeurs P1 , P2 , P3 devront donner lundi prochain un certain nombre d'heures de cours à trois classes C1, C2, C3.

P1 doit donner 2 heures de cours à C1 et 1 heure à C2 ;
P2 doit donner 1 heure de cours à C1, 1 heure à C2 et 1 heure à C3 ;
P3 doit donner 1 heure de cours à C1, 1 heure à C2 et 2 heures à C3.

On souhaite déterminer le nombre de plages horaires au minimum et proposer un horaire du lundi pour ces professeurs. Donnez la modélisation par graphe. Quel est le problème formel ? Quelle est la solution ?

6.5 Réseau

Est-il possible de relier à l'aide d'une connexion bi-directionnelle 15 ordinateurs de sorte que chaque ordinateur soit relie directement avec exactement trois autres ?
Donnez la modélisation par graphe. Quel est le problème formel ? Donnez la solution.

6.6 Publication des bancs

Soit M la matrice d'adjacence d'un graphe de 7 nœuds qui repre sentent les bancs (noté Bi) d’un parc. Les arêtes modélisent les alle es permettant de passer de l’un a l’autre.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) On veut peindre les bancs de fac on que deux bancs relie s par une alle e soient toujours de couleurs diffe rentes. Quel est le nombre de couleurnécessaire ? Donnez le problème formel. De terminez ce nombre.
(2) Est-il possible de parcourir toutes les alle es de ce parc sans passer deux fois par la me me alle e à partir du banc B1 sans revenir obligatoirement au banc B1? Idem en revenant au banc B1. Donner les problèmes formels. Justifiez s'il existe-t-il une solution ou non.
(3) Est-il possible de parcourir des alle es de ce parc en passant devant de chaque banc exactement une fois et en revenant à notre banc de départ? Donner le problème formel. Cerise sur le gâteau : donner la propriété minimale permettant d'apporter une réponse.

6.7 Après les bancs les sièges

Sept e le ves, de signe s par A, B, C, D, E, F et G, se sont rendus a la bibliothe que aujourd’hui. Le tableau suivant pre cise « qui a rencontre qui » (la bibliothe que e tant petite, deux e le ves pre sents au me me moment se rencontrent obligatoirement).

Elève	A	B	C	D	E	F	G
Rencontre	D, E	D, E, F, G	E, G	A, B, E	A, B, C, D, F, G	B, E, G	B, C, E, F

De combien de places assises doit disposer la bibliothe que pour que chacun ait pu s'assoir ? Donnez la modélisation. Quel est le problème formel ? Justifiez la solution.

7 Applications

7.1 Villes candidates

On souhaite installer un point de vente dans des villes reliées par des voies autoroutières (pas forcément symétriques). Le principe retenu est le suivant : les villes non retenues ne doivent pas être reliées directement entre elles. Les villes retenues peuvent être reliées directement entre elles. Les villes non retenues sont obligatoirement reliées directement à une ville retenue. On souhaite déterminer les villes retenues. Donnez la modélisation du problème, le problème formel auquel il correspond et justifiez votre réponse.

7.2 Square-Dance

Dans une square-dance, chaque groupe de danseurs est composé d'un homme et d'une femme. Pour simplifier les mouvements, il faut que les tailles des partenaires soient similaires. Il y a donc trois groupes : petit, moyen et grand. On souhaite connaître le nombre maximum de couple qui peut être formé dans une assistance donnée.
Donnez la modélisation. Quel est le problème formel associé ?

7.3 Cité-U

Problème d'affectation : Des élèves (A, B, C, D, E) choisissent leur affectation dans des chambres (a, b, c, d, e) selon le tableau de préférence (dans l'ordre décroissant) suivant :

	a	b	c	d	e
A	1	2	3	4	5
B	1	4	2	5	3
C	3	2	1	5	4
D	1	2	3	5	4
E	2	1	4	3	5

Proposer une affectation permettant de satisfaire au mieux les demandes.

1) Selon une méthode consistant à faire apparaître un 0 (par exemple en ligne A). Sur quelle ligne apparaît-il un problème ? Quelle est la première affectation proposée ?
2) Selon une méthode par modélisation sur un réseau de transport. Donner le réseau (que représente les noeuds, que représentent les arcs ?). Donner la capacité des arcs. Prendre comme arcs saturés les 0 du tableau de la question (1). Quelle(s) conclusion(s) en tirez-vous ?
3) Selon la méthode hongroise. Quelles affectations proposez-vous ?

Méthode hongroise : L'objectif prendre en compte le fait qu'il y avait une alternative dans le choix des 0 sur la matrice. On pose des «0» barrés : les «0» non retenus, des «0» encadrés : les «0» affectés.

Déroulement à partir du marquage initial :
(a) Marquer les lignes n'ayant pas de zéro encadré
(b) Marquer ensuite toutes les colonnes ayant un «0» barré sur une ligne marquée
(c) Marquer alors toutes les lignes ayant un «0» encadré dans une colonne marquée et revenir à (b) jusqu'à ce que le marquage ne soit plus possible.
(d) Tracer un trait sur les lignes non marquées et les colonnes marquées.
(e) Prendre le plus petit nombre du tableau restant et le retrancher de tous les éléments non rayés et ajouter le aux éléments rayés deux fois (ligne, colonne)
(f) Itérer le processus si vous ne pouvez pas affecter un «0» pour chaque ligne et chaque colonne.

7.4 Dépôts de marchandises

Soit une entreprise disposant de trois dépôts (A, B et C) contenant respectivement 20, 10 et 35 tonnes de marchandises. Elle dispose de trois magasins (D, E et F) qui ont besoin respectivement de 25, 20 et 20 tonnes de marchandises. L'objectif est d'établir le meilleur plan de transport des marchandises de A, B et C vers D, E et F. La matrice suivante représente les possibilités en transport en fonction des différents sites :

	D	E	F
A	15	10	0
B	5	0	10
C	10	5	5

1) A quel problème formel cet exercice se ramène-t-il ?
2) Proposer une modélisation en fonction de ce problème
3) Effectuer la résolution et expliciter votre raisonnement (il est inutile d'appliquer ici un algorithme de résolution) en 20 lignes maximum

7.5 Tout bénéfice

Une entreprise fabrique trois types de produits (P_1, P_2 et P_3) en travaillant sur la base de 45h par semaine. La vente de P_1 ramène 4 euro net, la vente de P_2 ramène 12 euro net et la vente de P_3 ramène 3 euro net. Les rendements des machines sont de 50 pièces pour P_1 à l'heure, 25 pour P_2 et 75 pour P_3. Le marché est tel qu'il permet d'espérer vendre 1 000 pièces de P_1, 500 pièces de P_2 et 1500 pièces de P_3. Seule une des trois machines permettant de fabriquer P_1, P_2 ou P_3 peut fonctionner à un instant t.

Donner la modélisation du problème à résoudre si l'on souhaite maximiser le revenu net.

7.6 Programmation dynamique

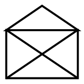
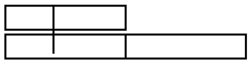
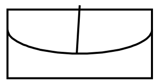
La demande d'un équipement en janvier, février et mars est de 2 unités. Les deux unités sont livrées à la fin de chaque mois. Le fabricant souhaite établir le plan de production de cet équipement. Le stock ne peut pas dépasser 2 unités en février et mars et est nul en janvier et en avril. La production maximale pour un mois donné est de 4 unités. Le premier mois, seuls les coûts de production sont imputables (les mois suivant, le stock entre en ligne de compte) Pour un stock de i équipements et une production y, le coût mensuel vaut :

$$C(y, i) = f(y) + 6i \text{ avec } f(0) = 0;\ f(1) = 15;\ f(2) = 17;\ f(3) = 19;\ f(4) = 21.$$

Formalisez ce problème en problème de chemin, représentez le puis le résoudre.

7.7 Picsou Magazine

Dans une classe maternelle, les enfants essaient de dessiner les formes suivantes :

Ces formes sont constituées de points de contact reliés entre eux par des traits. Un trait est défini entre deux points de contact. L'objectif est de tracer les figures sans lever le crayon, ni repasser deux fois par le même trait, mais on peut repasser plusieurs fois par le même point de contact. a) Donnez le problème formel correspondant et justifiez votre réponse; b) Donnez les règles qui permettent de déterminer si a priori la figure peut ou ne peut pas être tracée selon les spécifications définies.

7.8 Train-Train habituel

On souhaite modéliser schématiquement un réseau de transport à partir de villes et de gares. Une ville peut posséder plusieurs gares. Les villes sont repérées par les lettres en majuscule A, …, G. Les gares sont repérées par les lettres indicées (A1: gare 1 de la ville A). Il y a au plus 4 gares par ville. On souhaite établir les connexions bi-directionnelles suivantes : A1- D1; A2 – E1; B1 – E2; B2 – G2; B3 – F1; B4 – D2; C1 – F2; C2 – G1; C3 – E3; C4 – D3. Pour faciliter la lecture du plan, les connexions ne doivent pas se couper. On souhaite représenter ce plan. a) Donnez le problème formel; b) Proposez une représentation; c) On considère un graphe biparti planaire et connexe ayant m arêtes et f ($f \geq 2$) faces. Montrez que l'on a: $f \leq (m/2)$.

7.9 Et glou et glou et glou

(merci D. Muller)

On souhaite pre lever 4 litres de liquide dans un tonneau. Pour cela, nous avons a notre disposition deux re cipients (non gradue s !), l'un de 5 litres, l'autre de 3 litres. Comment doit-on proce der ? Proposez une modélisation par graphe de la résolution du problème.

7.10 Boulanger

Un boulanger fabrique de la brioche (désignée par X) et du pain viennois (désigné par Y) à partir de trois facteurs : de la farine (A) en quantité a; du beurre B, en quantité b; du sucre C en quantité c. La matrice de production est la suivante :

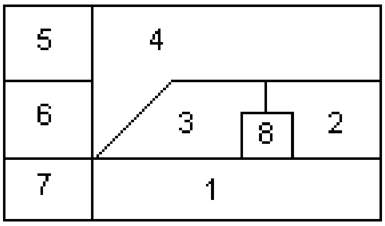
	Brioche (X)	**Pain viennois (Y)**
Farine (A)	**5**	**4**
Beurre (B)	**1**	**2**
Sucre (C)	**3**	**2**

On suppose la linéarité de la production. Donnez la représentation graphique des contraintes et la production optimale si a = 80, b = 24, c = 36 et que l'on cherche à optimiser le chiffre d'affaire sous la forme : prix des brioches : 40 et prix des pains : 50.

7.11 Complet

(merci http://mathscyr.free.fr)

Huit pays sont représentés ci-dessous avec leur frontière (deux pays dont les frontières n'ont qu'un nombre fini de points ne sont pas considérés comme adjacents)

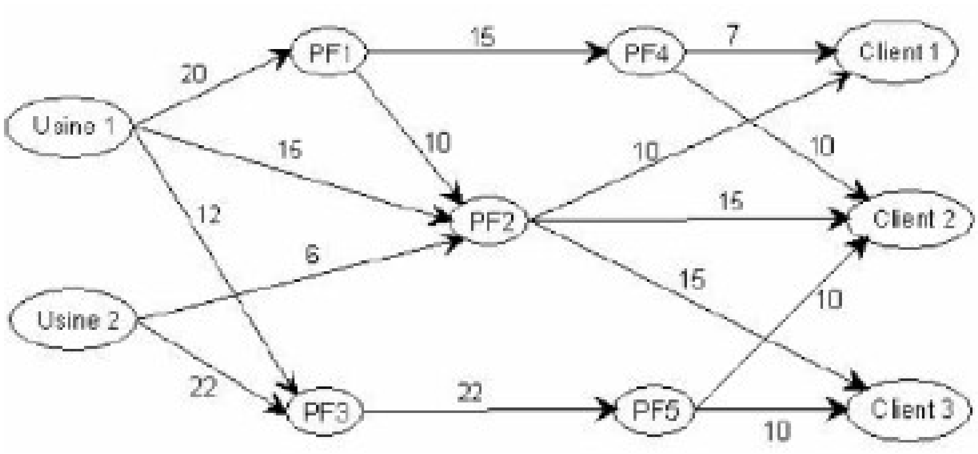


1) Représentez le graphe d'adjacence.
2) Ce graphe est-il complet ? Connexe ? Quel est le degré de chaque noeud ? Déduisez-en le nombre d'arêtes ?
3) Quelle est la distance entre les sommets 1 et 5 ? Quel est le diamètre du graphe ?
4) Est-il possible de partir d'un pays et d'y revenir après avoir franchi chaque frontière une fois et une seule ? Est-il possible de partir d'un pays, de franchir chaque frontière une fois et une seule et de terminer en un autre pays ?
5) Quel est le nombre maximum de pays sans frontière commune ? Précisez de quels pays il s'agit
6) Colorez les huit pays avec un nombre minimum de couleurs de telle façon que deux pays adjacents portent deux couleurs différentes

7.12 Embouteillage

(merci http://*sciences.ows.ch*)

L'objectif est de livrer un produit à trois clients (nommés Client 1, 2 et 3) d'une entreprise qui dispose de deux usines de fabrication (nommées Usine 1 et 2). Le transport est assuré grâce à un réseau de 5 plate-formes logistiques (nommées PF1 à PF5). Les capacités de transport sont indiquées sur le graphe suivant :



Les quantités de produit disponibles en stock sont de 35 (resp. 25) pour l'usine 1 (resp. 2). La demande du client 1 (resp. 2, 3) est de 15 (resp. 15, 20).

Donner le problème formel et la solution pour satisfaire les clients.

7.13 Vente d'ordinateurs

Une représentante suisse (merci l'epfl) de PC doit gérer un stock pendant un horizon fini de n périodes. Pour chaque période i, elle connaît le coût unitaire pi d'achat d'un PC, le prix de revente unitaire ci d'un PC et le coût unitaire hi de stockage d'un PC pendant la période i. A chaque période i, on ne peut avoir plus de B PC en stock. Le stock initial et final sont supposés nuls. A la fin de la période i, elle vend yi PC. On souhaite déterminer les politiques d'achat et de vente qui minimisent les coûts. Donnez la modélisation du problème avec une approche par flots.

7.14 Chèques en bois

Les Eaux et Forêts ont décidé d'abattre huit bosquets situés dans une forêt. Les distances mutuelles entre ces bosquets sont données en kilomètres par la matrice donnée.
Pour mener à bien cette exploitation, il est nécessaire de tracer un réseau de chemins qui permet de se rendre de tout bosquet à tout autre bosquet. Les coûts de construction de ces chemins sont proportionnels à leurs longueurs. Votre objectif est de minimiser les coûts de construction.

1) A quel problème cela correspond-il ?
2) Donnez la modélisation.
3) Donnez la solution. Justifiez votre réponse.

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
1		2,6	4,2	1,8	1,4	3,6	4	3
2			1,8	3,6	2,4	5,2	4,6	2,2
3				5,2	3,4	5	3,8	2
4					1,4	3,2	3	1,8
5						1,8	2,1	1,6
6							1,2	2

7		1
8		

7.15 In vino veritas

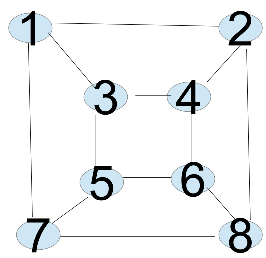
Lors d’une soirée de l’Association des Soudards et IgNobels on peut compter : 8 femmes, 82 personnes en état d’ébriété, 2 hommes en short encore à peu près clairs, 4 femmes en pantalons, 6 personnes ivres portant des pantalons, 77 hommes en short, 19 personnes en pantalons et une femme ivre portant des pantalons.
Déterminez combien y a-t-il de personnes (justifiez votre réponse) : Modélisation et réponse ?

7.16 Les adieux

Une réception se termine. Les personnes s’en vont en couple. Au moment de se dire au revoir, cent douze poignées de main sont échangées. Combien de personnes étaient présentes à cette réception ?
Donnez la modélisation et donnez la solution. Justifiez votre réponse.

7.17 Les Carrés

Le graphe suivant est-il bi-parti ? Justifiez votre réponse.



7.18 Les triages

On a six wagons à trier car ils n'arrivent jamais dans l'ordre dans la gare. Dans la gare de triage, les wagons entrent par une voie unique dans l’ordre 2, 5, 3, 6, 1, 4 et doivent sortir de la gare par une voie unique dans l’ordre croissant. Deux wagons *i* et *j* peuvent être mis sur la même voie de triage si et seulement s’ils entrent dans l’ordre dans lequel ils doivent sortir. Quel est le nombre minimal de voies nécessaires au tri ? Donnez la modélisation du problème. Donnez le graphe associé. Quel est le problème formel ?

7.19 Festival à Cannes

Une équipe de tournage souhaite réaliser 7 films (A, B, C, D, E, F et G – vous remarquerez qu'il n'y a pas de film X). L'objectif est de minimiser les coûts de production en tournant si possible plusieurs films simultanément, sachant que toutes les fonctions (figurant, cadreur, …) doivent être remplies pour tourner un film et en minimisant le nombre de jour de tournage. Quels films pourra-t-on tourner en même temps ? Donner la modélisation et le problème formel associé. Proposez une solution.

	A	B	C	D	E	F	G
Figurant	Jean	Luc	Luc	Jean	Max	Léon	Jean
Figurante	Anne	Anne	Lio	Anne	Lio	Béatrice	Lio
Son	Louis	Louis	Jo	Théo	Jo	Louis	Louis
Cadrage	Greg	Marc	Greg	Marc	Stef	Stef	Stef
Script	Isabelle	Marie	Marie	Isabelle	Ada	Ada	Marie

7.20 Flou hamiltonien

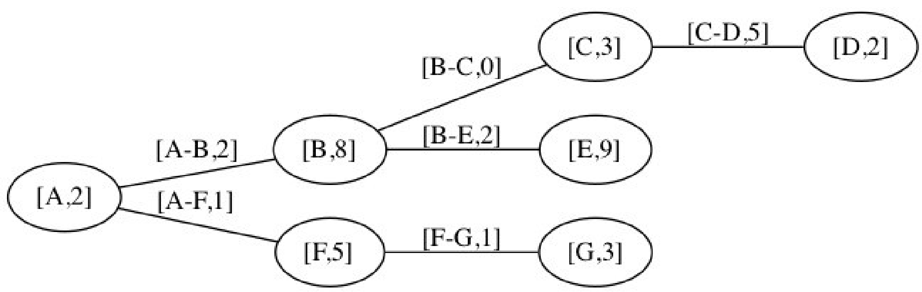
Vous rappellerez la définition d'une chaîne hamiltonienne. Un graphe complet non orienté est-il hamiltonien ? Justifiez votre réponse.

7.21 Attention travaux

Soit une ville avec des rues à double sens. Les carrefours (lieu de réunion de rues) ont comme principale caractéristique d'être de degré pair (par hypothèse). Une rue a comme principale caractéristique qu'elle ne débouche pas sur le même carrefour à ses extrémités. Le graphe modélisant les communications dans la ville est par hypothèse connexe.
La fermeture d'une rue à la circulation entraine-t-elle la perte de connexité ? Vous définirez la modélisation du graphe, le raisonnement formel associé et donnerez la solution.

7.22 Attention danger enfants

Le graphe représente la carte d'un groupe de villages. Les noeuds sont des villages et les arêtes des liaisons reliant les villages. Pour chaque village, la valeur du noeud correspond au nombre d'enfants du village en âge d'être scolarisés. Pour chaque arête reliant deux villages, la valeur correspond au nombre de routes importantes que doivent traverser les piétons empruntant cette liaison. On souhaite choisir l'un de ces villages pour y construire une école. Le critère de choix principal est la sécurité : on veut minimiser le nombre de traversées de routes importantes. Dans quel village doit- on construire cette école ?

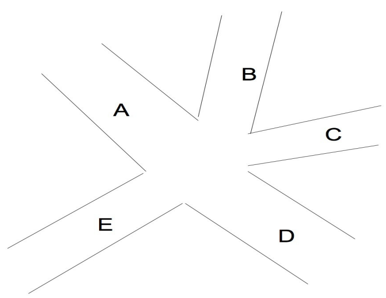


Vous disposez de la formalisation : - du graphe sous la forme d'un type abstrait de donnée Graphe : G (N, E, Ψ, ν, ε) - des opérateurs de manipulation de base de données conventionnels : Π, σ. - de l'évaluation de chemin : Path (A, B, Graphe) → [Graphe x coutChemin] - le calcul d'un stable : S (Graphe) → Graphe - le calcul d'un absorbant : A

(Graphe) → Graphe - la fonction de sommation : Σ et de maximisation/minimisation, Max/Min La fonction d'étiquettage des nœud, ν, est définie sur [identifiant, #Eleve] La fonction d'étiquettage des arêtes, ε, est définie sur [identifiant, #Intersection] Exemple : Π (σ(N, identifiant= 'F'), #Eleve) = 5
Donnez le principe de résolution en utilisant les types et opérateurs abstraits fournis. Appliquez le pour trouver la solution.

7.23 Le carrefour des possibles

Une mairie souhaite organiser la gestion d'un carrefour important de sa ville. Pour fluidifier le trafic et pour des raisons de sécurité deux flots de véhicules ne peuvent pas se croiser. On considère qu'il y a assez de files dans les rues pour assurer une entrée sans risque dans la rue en cas de trafic conjoint (venant de deux rues différentes mais qui ne se serait pas croisé).
Le tableau suivant présente les accès autorisés en terme de circulation. La régulation du trafic s'effectue par des feux tricolores. Combien de cycle de feu doit-on prévoir ? Donnez la modélisation et le problème formel associé ainsi que la solution.



En arrivant par la rue	A	B	C	D	E
On peut aller rue	C, E	A, E, D	A, D	C, A	C, D

7.24 Sac de billes

(merci l'epita)

Deux enfants jouent dans un jardin avec un sac de billes. Le sac contient n billes. Les joueurs retirent chacun leur tour un nombre de billes qui doit être un carré (1, 4, 9, 16, 25...). Le joueur qui retire la dernière bille du sac a perdu (s'il reste quatre billes, le joueur ne peut pas retirer quatre billes il ne peut en retirer qu'une).

1) Justifiez que l'un des deux joueurs possède forcément une stratégie gagnante, quel que soit n.

2) Construisez le graphe et montrez quel joueur doit commencer pour être sur de gagner si n = 13.

7.25 Pic et Pic et colégram

Une équipe PIC de 9 étudiants désirent se réunir une fois par jour autour d'une table ronde. Chaque étudiant n'accepte pas d'avoir le même voisin plus d'une fois. Combien de jours au maximum peuvent-ils se réunir?

(a) Donnez la modélisation par graphe.
(b) Quel est le problème formel.
(c) Donnez la solution.