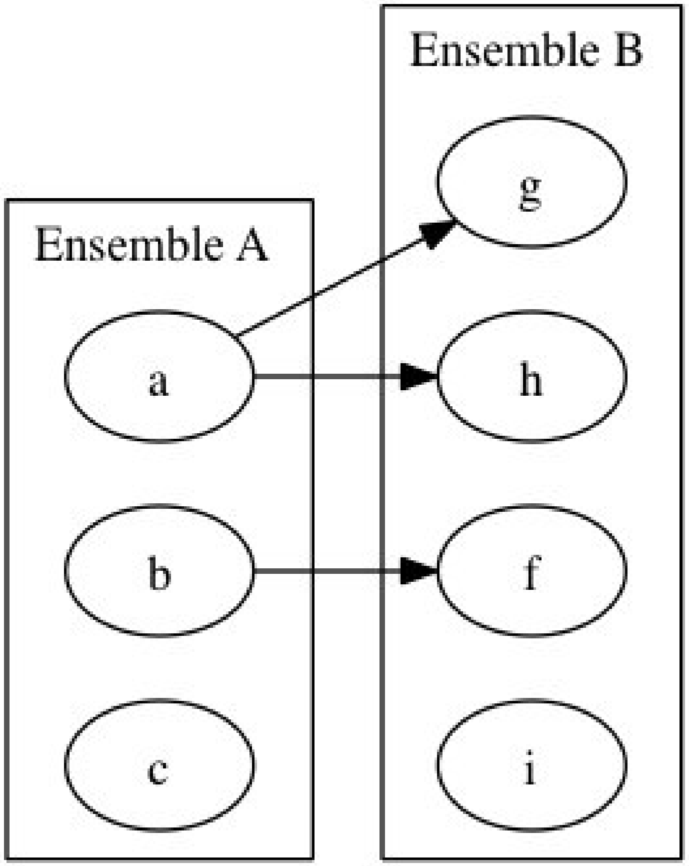
# Quelques éléments mathématiques pour les graphes

michel.mainguenaud@insa-rouen.fr

# Notion de relation

- Relation R binaire entre deux ensembles:
  - A = {a, b, c}
  - B = {f, g, h, i}
- Une représentation graphique appelée graphe de la relation (sous-ensemble du produit cartésien A x B)
  - G = {(a,g), (a,h), (b,f)}



# Vocabulaire (1)

- Application :
  - De chaque sommet de l'ensemble de départ, il part un arc et un seul
- Application surjective :
  - A chaque sommet de l'ensemble d'arrivée, il arrive au moins un arc ($\Gamma$-(x) $\geq$ 1)
- Application injective :
  - A chaque élément de l'ensemble d'arrivée, il arrive au plus un arc ($\Gamma$-(x) $\leq$ 1)
- Application bijective :
  - Injective et surjective (un et un seul) ($\Gamma$-(x) = 1)

# Propriétés

- Réflexive (boucle)
  - $\forall\ x \in A, \qquad x\ R\ x$
- Irréflexive (pas de boucle)
  - $\forall\ x \in A, \qquad \neg(x\ R\ x)$
- Symétrique (passage de non-orienté → orienté)
  - $\forall\ x, y \in A^2, \qquad x\ R\ y \Rightarrow y\ R\ x$
- Anti-symétrique
  - $\forall\ x, y \in A^2, \qquad x\ R\ y \wedge y\ R\ x \Rightarrow x = y$
- Transitive (calcul de chemin)
  - $\forall\ x, y, z \in A^3, \qquad x\ R\ y \wedge y\ R\ z \Rightarrow x\ R\ z$

# Propriétés (2)

- Ordre
  - Partiel strict : transitive et anti-symétrique
    - Exemple : $x < y \Rightarrow \neg(y < x)$ $\qquad x < y \wedge y < z \Rightarrow x < z$
  - Total
    - Exemple : $x < y \vee y < x$
    - valable pour les entiers mais pas les complexes
- Partitions
  - $P = \{ X_1, X_2, ..., X_n \}$
  - $X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_n = A$
  - $\forall\ i, j, i \neq j, X_i \cap X_j = \emptyset$

# Composition/inverse de relation

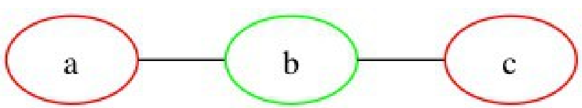
- Départ : Matrice d'adjacence (binaire)
- Composition de relation (o) → produit matriciel (x) avec l'algèbre de Boole
  - $M_c = M_{r2 \circ r1} = M_{r1} \times M_{r2}$
- Réciproque de relation (r) → transposée
  - $M_r = {}^t M$

# Numérique

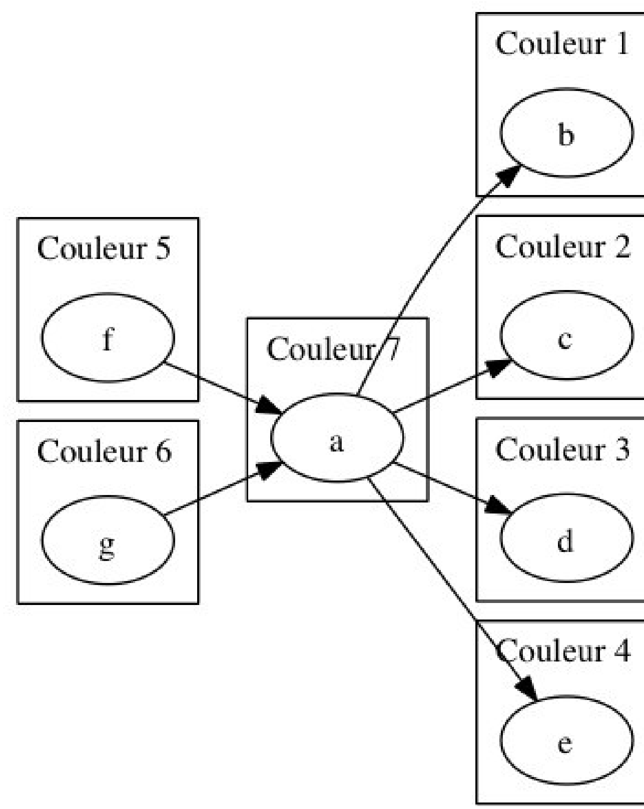
- $\sum d^-(x) = \sum d^+(x) = m$
- $\sum d(x) = 2 * m$

# Numérique

- Nombre chromatique ($\gamma(G)$)
  - Graphe sans boucle, effectue une partition en stables
  - $\gamma(G)$ d'un graphe planaire est au plus de 4
  - n : ordre du graphe ($|G|$)
  - $\alpha(G)$ : le cardinal du plus grand stable
  - r : degré maximal d'un noeud du graphe
  - $n / \alpha(G) \leq \gamma(G) \leq r + 1$




$n = 3$, $\alpha(G) = 2$, $\gamma(G) = 2$, $r = 2$



# Cycles (Représentation)

- Graphe avec m arcs orientés
  - Vecteur à m dimensions $(a_1, ..., a_m)$
- $\mu+$ : {arcs pris dans le sens}
- $\mu-$ : {arcs pris à contresens}
- Cycle : vecteur à m dimensions
  - $+1$ si $a_i \in \mu+$ / $-1$ si $a_i \in \mu-$ / $0$ si ai $\notin \mu+ \cup \mu-$
- Indépendances de p vecteurs
  - $\lambda_1\ \mu_1 + \ldots + \lambda_M \mu_p = 0 \Rightarrow \forall$ i= 1, .. p, $\lambda_E = 0$

# Cycles (propriétés)

- Base de cycles :
  - Ensemble minimal de cycles indépendants tel que tout vecteur représentant un cycle du graphe s'exprime comme combinaison linéaire de cycles de la base
  - Dimension de la base : nombre cyclomatique ($\nu(G)$)
  - n sommets,  m arcs, p composantes connexes

    $\nu(G) = m - n + p$

# Complexité

- Dijkstra :
  - Principe : $|X|^2$
  - Optimisation : $(|X| + |U|) * \log |X|$
- Sans cycle :
  - Principe : $(|X| + |U|)^2$

# Formules

- Multi-graphe orienté, fini, connexe a un circuit Eulérien <=> $\forall x \in X \; d+(x) = d-(x)$
- Multi-graphe orienté, fini connexe a un chemin Eulérien <=>
  - $\forall x \in X - \{x_0, x_1\} \; d+(x) = d-(x)$
  - $d+(x_0) = d-(x_0) + 1$
  - $d-(x_1) = d+(x_1) + 1$

# Formules (2)

- G non orienté
  - G admet un cycle Eulérien <=> $\forall$ x $\in$ U, $\exists$ k $\in$ N / d(x) = 2k

# Formules (2)

- Graphe G orienté, simple / $\forall x \in X \; d+(x) = d-(x)$
  - G est fortement connexe <=> G connexe
  - Dem : il possède un circuit Eulérien donc il est fortement connexe
- Graphe G orienté, simple
  - G sans cycle <=> $\exists x \,/\, d-(x) = 0 \wedge \forall x \,/\, d-(x) = 0$ G – {x} est sans cycle

# Jeux

- Modélisation par graphes acycliques :
  - Pas de retour arrière, modélisation par des états
  - Noyau unique
- Exemples :
  - Marienbad : celui qui commence perd obligatoirement
    - De l'ordre de 400 noeuds, noyau : 48 noeuds
  - Morpion : celui qui commence est sur de ne pas perdre (ne signifie pas gagner !)
    - De l'ordre de 600 000 noeuds (sans optimisation)
  - Puissance 4 : …