Théorie des Graphes – Définitions

Institut National des Sciences Appliquées – Rouen
Département Architecture des Systèmes d'Information
michel.mainguenaud@insa-rouen.fr

Graphe

- Branche des mathématiques discrètes (vs. continue - analyse)
- Composante combinatoire importante (attention à la complexité)
- Très intuitif en terme de vocabulaire
- Problèmes abordés (entre autres)
  - Problème d'affectation
  - Voyageur de commerce
  - Ordonnancement, …

Graphe (2)

- Cartographie → opérationnelle
  - Sémiologie
  - Convention (le nord en haut, …)
  - Ressemblance au terrain : généralisation
    - Enquête d'utilité publique, …
    - Partage entre population de niveau hétérogène
- Théorie des graphes (pure) on ne se préoccupe pas de la spatialisation (représentation sagittale).

Problèmes d'affectation

- Trois usines fournissent chaque jour respectivement : 30, 35 et 60 tonnes de lait
- Cinq magasins de distribution sont preneurs respectivement de 20, 25, 25, 25 et 30 tonnes
- Comment organiser au mieux la répartition de l'offre et de la demande (connaissant les coûts de livraison des usines vers les magasins) ?

Voyageur de commerce

- Un voyageur doit visiter N villes sans repasser deux fois dans la même ville et en minimisant la distance parcourue
- Quel sera l'itinéraire choisi ?

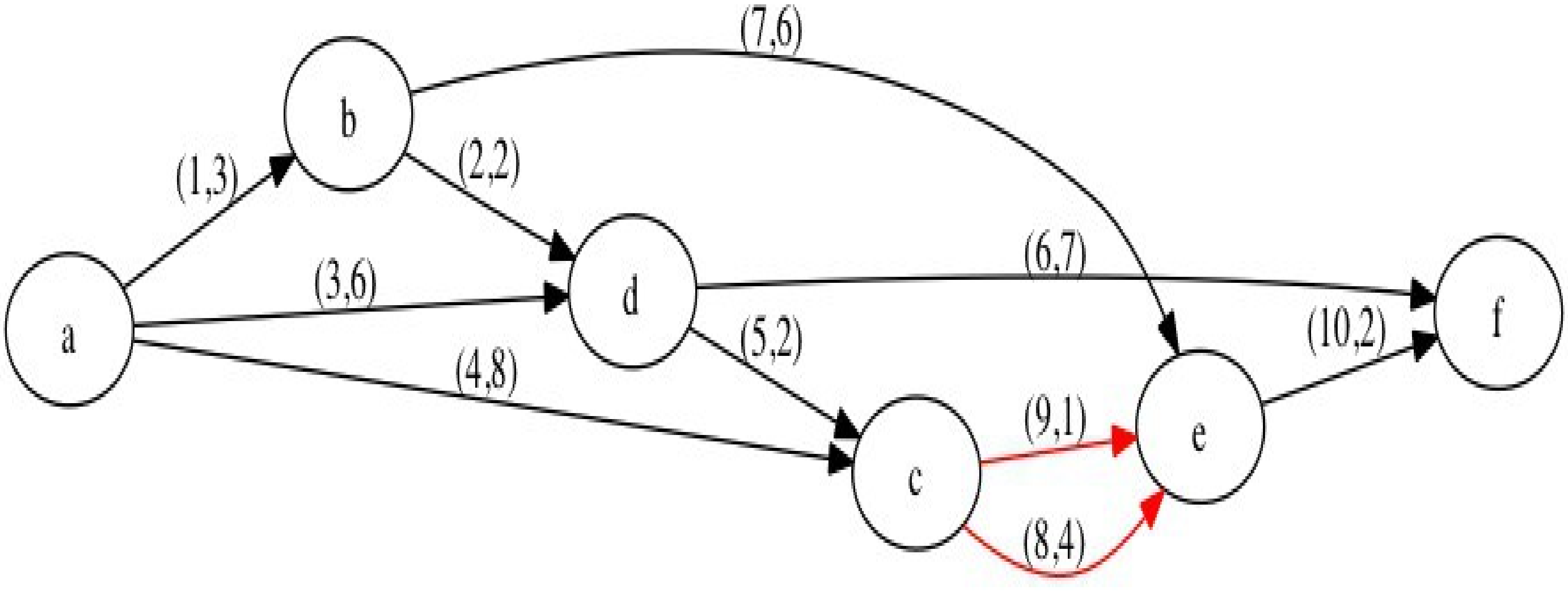
Ordonnancement

- Pour construire une maison, il faut d'abord creuser les fondations avant de monter les murs. Lorsque les murs sont montés, le couvreur peut poser la charpente du toit puis poser les tuiles. Les fenêtres sont à poser après que les murs soient montés , …
- Comment prévoir au mieux l'arrivée des différents corps de métier sur le chantier ?

Vocabulaire

- Graphe :
  - Ensemble dénombrable (ici fini) de « nœuds » reliés entre eux par des « arcs » (éventuellement – noeud isolé)
  - G (X, U, Ψ, ν, ε) : X l'ensemble des nœuds (sommets), U l'ensemble des arcs, $\Psi : U \rightarrow X \times X$, ν et ε sont des fonctions d'étiquetage (base de données)
  - L'ordre d'un graphe est la cardinalité de X noté |G|
  - La taille du graphe est la cardinalité de U notée ||G||

Exemple (orienté)



c → e : nécessite
une identification

Conséquences

- Multi-graphe
  - Peut avoir plusieurs fois le « même arc/arête » entre deux nœuds → fonction d'incidence (Ψ):
    - Paris-Lyon : en train, en avion, par autoroute, ...
  - X fini mais U peut donc être infini (exemple théorie des langages)

Vocabulaire (2)

- Application : réseaux de transport matériel et immatériel (eau, électricité, attractivité, …)
- La représentation sagittale est aspatiale mais il peut être intéressant de savoir si des arêtes/arcs se coupent (planarité) : Exemple schéma UML - lisibilité

Vocabulaire (3)

- Arc / Arête :
  - Relie deux nœuds entre eux.
  - Représenté par un couple / paire : (x, y) / [x, y]
  - Une arête est un arc non orienté et peut toujours être représentée par deux arcs orientés
  - x : extrémité initiale
  - y : extrémité terminale (finale)
  - Boucle : arête dont l'extrémité initiale est égale à son extrémité finale => $[x, x] \in U$

Vocabulaire (4)

- Arc :
  - Successeur : y est le successeur de x => $(x,y) \in U$
  - $\Gamma^+(x)$ est l'ensemble des successeurs de x
  - Prédécesseur : y est le prédécesseur de x => $(y,x) \in U$
  - $\Gamma^-(x)$ est l'ensemble des prédécesseurs de x

Vocabulaire (5)

- Degré (d):
  - Demi degré extérieur : nombre d'arcs adjacents qui partent de x.
    - $d+ (x) = | \{ u \in U / u =(x, y) \wedge y \in X\}| = | \Gamma^{+}(x)|$
  - Demi degré intérieur : nombre d'arcs adjacents qui arrivent à x.
    - $d- (x) = | \{ u \in U / u =(y, x) \wedge y \in X\}| = | \Gamma^{-}(x)|$
  - Degré de x : somme de d+ et d-
    - $d(x) = d+ (x) + d- (x)$
  - Non orienté : boucle -> compte pour deux fois
  - Tous les noeuds ont le même degré : graphe régulier

Vocabulaire (6)

- Adjacent (voisin):
  - u = (x, y)
    - x est adjacent à y
    - y est adjacent à x
    - x et y sont adjacents à u
  - $\Gamma^+ \cup \Gamma^-$: ensemble des adjacents
- Puits / source
  - Puits : pas de noeud successeur : $\Gamma^+(x) = \emptyset$
  - Source : pas de noeud prédecesseur : $\Gamma^-(x) = \emptyset$
- Noeud isolé : $\Gamma^+(x) = \Gamma^-(x) = \emptyset$

Vocabulaire (7)

- Incidence (ω) – niveau arc pour un noeud:
  - Extérieurement : x est l'extrémité initiale (ω+)
  - Intérieurement : x est l'extrémité terminale (ω-)
- Cocycle (ω (i)): liste des arcs ayant i comme extrémité
- Incidence – niveau ensemble
  - $X' \subseteq X$, $U' \subseteq U$, $u = (x, y)$
    - U' est incident extérieurement à X'

      $\Leftrightarrow \forall u \in U', x \in X' \wedge y \notin X'$
    - U' est incident intérieurement à X'

      $\Leftrightarrow \forall u \in U', x \notin X' \wedge y \in X'$

Cocircuit / Cocycle

- Ensemble d'arcs ayant toutes leurs origines dans un sous ensemble A de X et toutes leurs extrémités dans (X-A)
- Pour tout sous-ensemble de noeuds A on associe deux cocircuits / un cocycle :

  $\omega+ (A) = \{ (x,y) \in U / x \in A \wedge y \notin A \}$

  $\omega2 (A) = \{ (x,y) \in U / x \notin A \wedge y \in A \}$

Vocabulaire (8)

- Graphe complet (K_{ordre}):
  - $\forall$ i, j $\in$ X, i $\neq$ j, (i, j) $\in$ U $\wedge$ (j, i) $\in$ U
- Sous-graphe de G = (X, U)
  - X' $\subseteq$ X (engendré), $G_{X'}$ = (X', $U_{X'}$) $U_{X'}$ arcs ayant les deux extrémités dans X'
- Graphe partiel de G = (X, U)
  - U' $\subseteq$ U (engendré), $G_{U'}$ = (X, U')

Vocabulaire (9)

- Sous-graphe de G : G privé de quelques nœuds et des arcs adjacents à ces nœuds
- Graphe partiel de G : G privé de quelques arcs (on garde le même ensemble de nœuds)
- Sous-graphe partiel de G : un graphe partiel d’un sous-graphe de G

Exemple

- G : graphe des routes de France
  - G' : graphe des routes reliant les villes de Normandie
    - sous-graphe
  - G' : graphe des nationales
    - graphe partiel
  - G' : Nationales reliant les villes de Normandie
    - sous-graphe partiel

Vocabulaire (10)

- Clique :
  – Ensemble des noeuds d'un sous graphe complet de G (sous-ensemble de noeuds deux à deux adjacents)
- Graphe complémentaire de G (X, U) :
  – Le graphe complémentaire, noté G(X, U_{barre}), a le même ensemble de noeuds (X) et comme arcs les arcs complémentaires à U

$$(i, j) \in U \Rightarrow (i, j) \notin U_{barre}$$

$$(i, j) \notin U \Rightarrow (i, j) \in U_{barre}$$

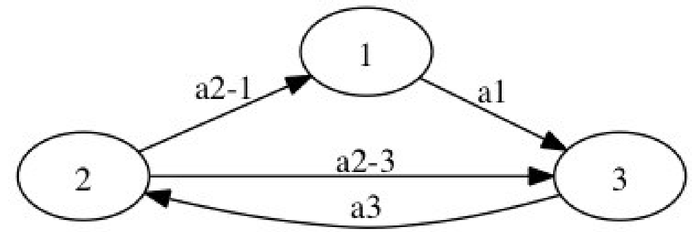
Vocabulaire (11)

- Graphe simple :
  - Ne possède pas deux arcs ayant mêmes extrémités initiale et terminale (ni boucle). Relation anti-reflexive (irréflexive).
- p-Graphe :
  - Peut avoir au maximum p répétition d’un arc ayant les mêmes extrémités initiale et finale (impose une fonction d’étiquetage pour les différentier)
  - $p > 1$: multi-graphe

Vocabulaire (12)

- Symétrique (ne tient pas compte des boucles)
  - $\forall$ x $\in$ X, y $\in$ X, x $\neq$ y : (x, y) $\in$ U => (y, x) $\in$ U
- Antisymétrique
  - $\forall$ x $\in$ X, y $\in$ X, x$\neq$ y : (x, y) $\in$ U => (y, x) $\notin$ U
- Transitif
  - $\forall$ x $\in$ X, y $\in$ X, z $\in$ X : (x, y) $\in$ U $\wedge$ (y, z) $\in$ U => (x, z) $\in$ U
- Régulier : les degrés de tous les noeuds sont égaux
  - $\forall$ x $\in$ X, y $\in$ X : d(x) = d(y)
- Rq : un graphe peut être ni symétrique, ni anti-symétrique (l'un n'est pas la négation logique de l'autre)

Vocabulaire (13)

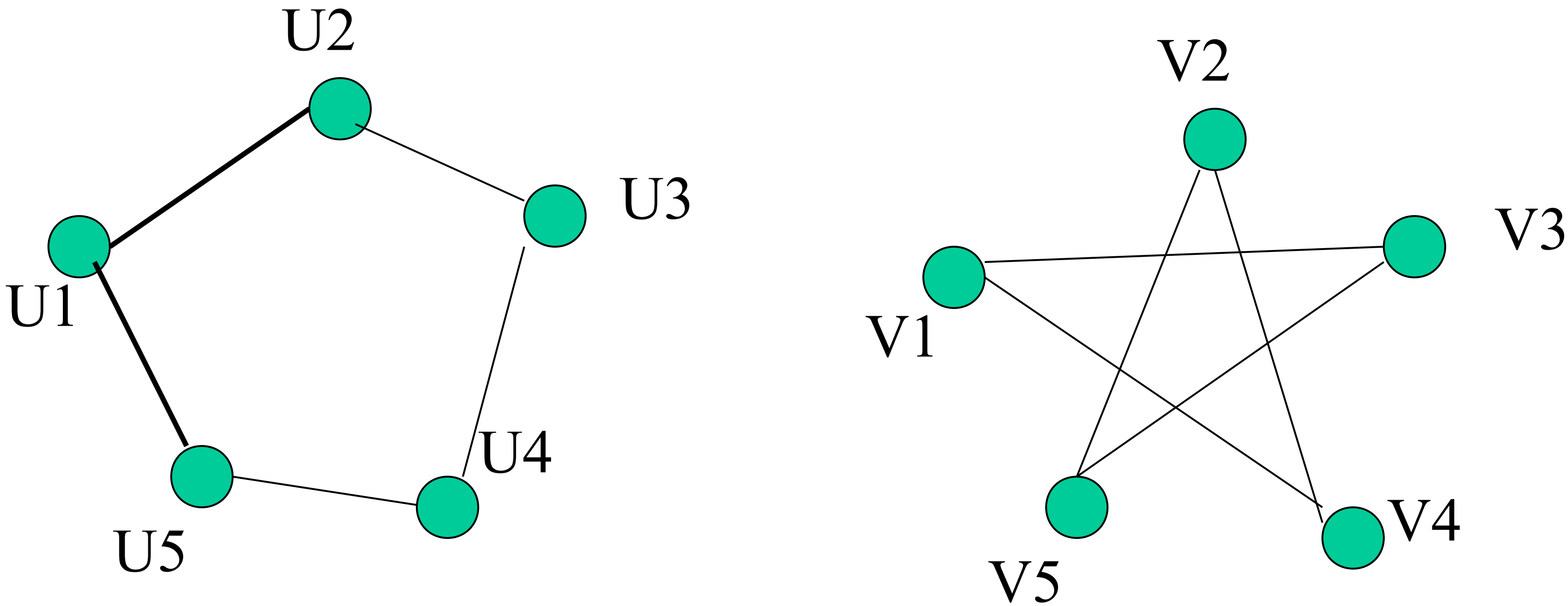


- Chaine (a_{2-3}:(3, 2), a_{2-1} :(2, 1))
  - Séquence d'arc/arête (a_{2-3}, a_{2-1}) sans tenir compte du sens
- Cycle (a_{2-3}, a_{2-1}, a_1)
  - Chaine qui revient au noeud de départ
- Chemin (a_{2-1}, a_1):
  - Séquence d'arc / extrémité terminale et initiale coïncident entre deux arcs consécutifs
- Circuit (a_{2-1}, a_1, a_3):
  - Chemin qui revient au noeud de départ

Structure (1)

- Isomorphe :
  - G' = (X', U') et G '' = (X'', U'') sont isomorphes s'il existe deux bijections
    - BX : X' → X''
    - BU : U' → U''
    - Deux arcs qui se correspondent dans la bijection BU aient pour extrémités initiales et terminales respectivement des noeuds qui se correspondent dans la bijection BX

Exemple



BX : BX (U2) = V3, BX(U3) = V5, BX (U4) = V2, BX (U5) = V4
BU : BU (U1, U2) = (V1, V3), BU (U1, U5) = (V1, V4), ...

Structure (2)

- Bi-parti : L’ensemble des noeuds peut être partitionné en deux classes de sorte que deux noeuds de la même classe ne soient jamais adjacents
- Couplage : Un ensemble d’arêtes tel que deux quelconques des arêtes sont non adjacentes

Approche par TAD

- Structures de base
  - Graphe (G (X, U, …) - Réseau avec sémantique)
  - Noeud
  - Arête (Arc sous classe, Lien avec sémantique)
- Constructeurs ensemblistes :
  - {}, flatten
- Opérateurs ou composition d'opérateurs

  op : <opérandes> → <résultat>
- Sémantique

Sémantique

- Sur le plan de la théorie des graphes
  - Opérations ensemblistes sur les noeuds, arêtes/arcs, graphes et (dé-)construction
  - Attention aux signatures
- Sur le plan système d'information
  - Gestion des fonctions d'étiquetage (noeud, lien, réseau) en fonction de la signature des opérateurs contrairement au spatial (fonction de la sémantique de l'opérateur).

Sémantique (2)

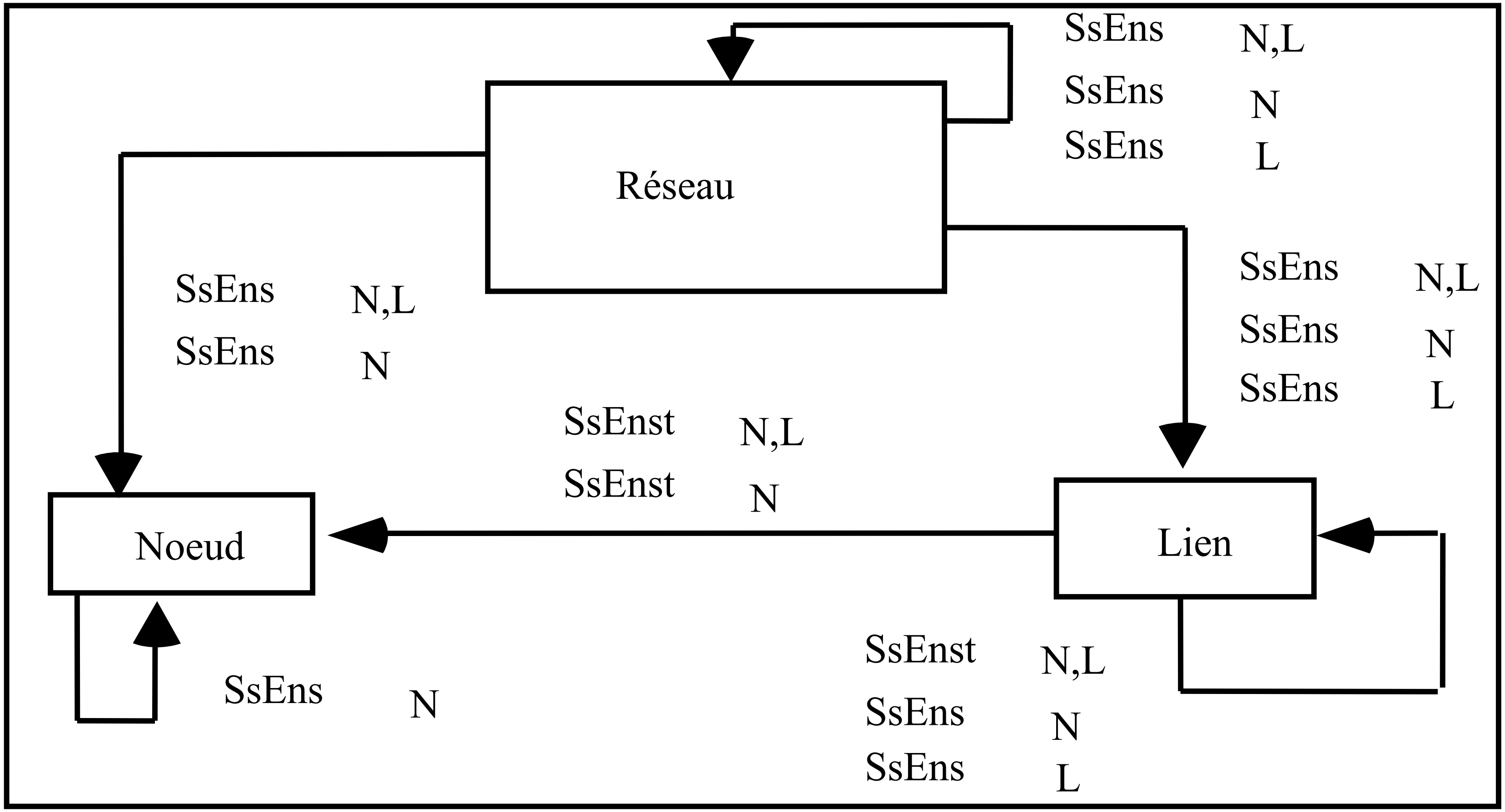
- Base :
  - Ensemblistes : U, -, ...
- Opérateurs sur types de base :
  - Exemple de Dé-construction
    - $\Pi_X (G (X, U)) \rightarrow X$
    - $\Pi_U (G (X, U)) \rightarrow U$
    - Π_{AO} (Arc) $\rightarrow$ Noeud, ...
  - Exemple de Construction
    - $C (X, U) \rightarrow G (X, U)$
    - C (Noeud, Noeud) $\rightarrow$ Arc, ...

Exemple

- Graphe complémentaire
  - Au niveau des Noeuds : opération ensembliste
    - Complémentaire : G (X,U,...) x X' → X''
    - Le résultat : X'' = X – X'
  - Au niveau des Arcs : opération ensembliste
    - Complémentaire : G (X,U,...) x U' → U''
    - Le résultat : U'' = U – U'
  - Au niveau du Graphe : composition
    - Complémentaire :

      G (X,U,...) x X' x U' → G (X'', U'', ...)
    - Le résultat : un graphe avec
      - U'' = U – U'
      - X'' : attention au multi-graphe et nœuds isolés de G

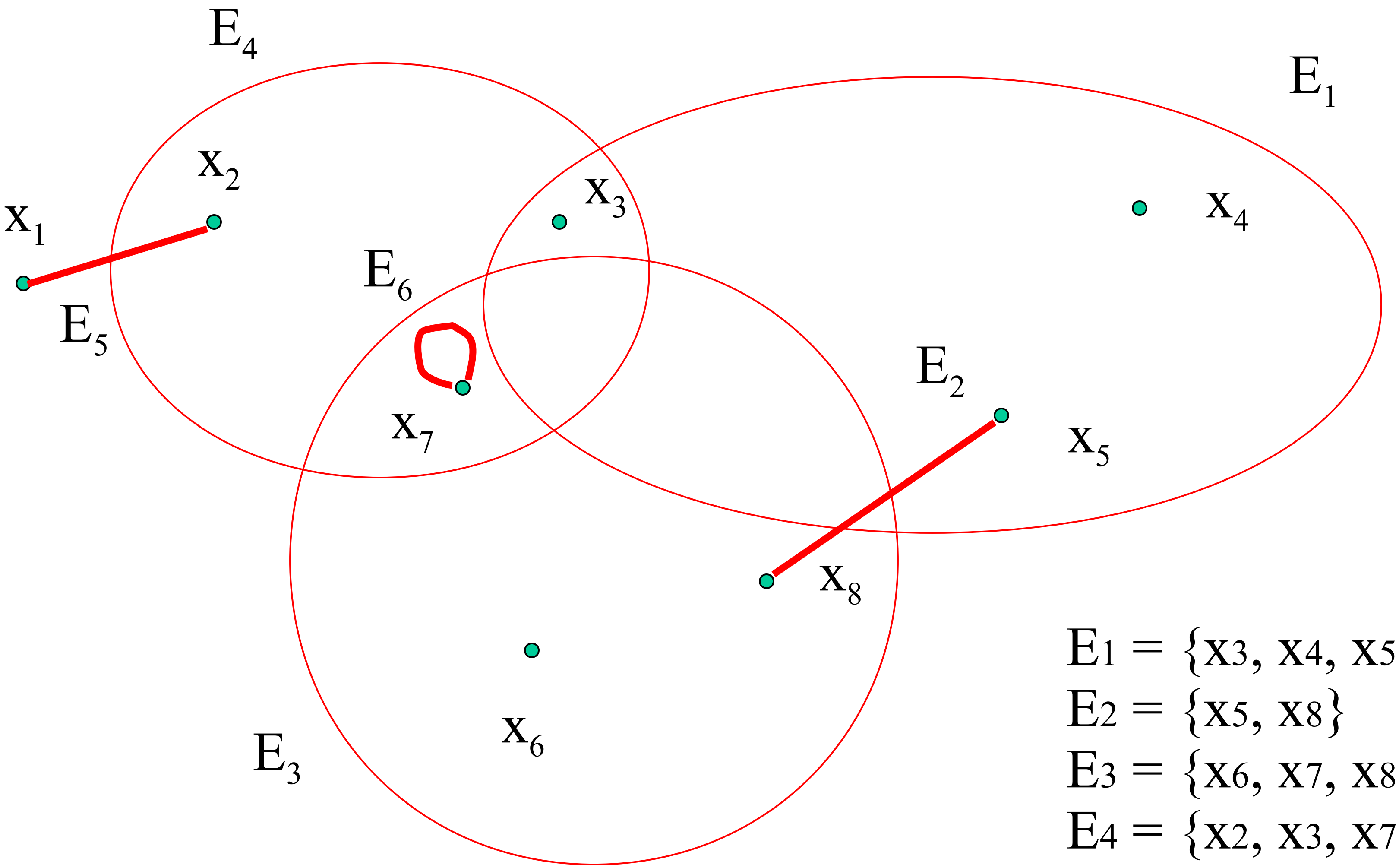
Sémantique alphanumérique



Hypergraphe

- Graphe : relation binaire X x X
- Hypergraphe : généralisation (arêtes)
  - Ensemble fini de noeuds $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$
  - Une famille $H = (E_1, \ldots, E_m)$ de partie de X
  - Propriétés:
    - $E_i \neq \emptyset \ \forall\ i = 1, .., m$
    - $\cup\ E_i = X$, $i = 1, .., m$

Hypergraphe (2)



$E_1 = \{x_3, x_4, x_5\}$
$E_2 = \{x_5, x_8\}$
$E_3 = \{x_6, x_7, x_8\}$
$E_4 = \{x_2, x_3, x_7\}$
$E_5 = \{x_1, x_2\}$
$E_6 = \{x_7\}$

Simple : $E_i \subseteq E_j \Rightarrow i = j$ / ici $E_6 \subseteq E_4$

Orientation

- X : ensemble de nœuds
- U : couple de sous-ensemble de nœuds (hyperarcs)
- $U_j = (U^-_j, U^+_j)$ avec
  - $U^-_j \subseteq X, U^-_j \neq \emptyset$
  - $U^+_j \subseteq X, U^+_j \neq \emptyset$
  - $\cup /j (U^2 z \cup U^+_j) = X$
- S’appelle … un réseau de Pétri
  - Nœud = place
  - Hyperarc = liaison entre les places d’entrées et de sortie