Théorie des Graphes - Introduction

Institut National des Sciences Appliquées – Rouen
Département Architecture des Systèmes d'Information
michel.mainguenaud@insa-rouen.fr

Histoire

- Graphe : concept récent pour un besoin très ancien.
- Demandeurs : les commerçants, les marins, les soldats
  - Ne plus être dépendant de guides locaux.
  - Évaluer la difficulté, longueurs, durées, risques, ressources locales, …
- Représentation fonctionnelle ou cartographique

Histoire (2)

- Fonctionnelle : (non ressemblante spatialement)
  - Table de Peutinger : II ou IV siècle
- Graphique :
  - Les portulants XIII et XIV siècle
  - Cartes de Cassini (1696 -> 1789)
- Problème de la fonction à la représentation plane d’une sphère (Ier siècle : Martin de Tyr puis Mercator au XVI puis Lambert au XVIII)

Les débuts

- Euler et les ponts de Königsberg en 1736
- Terme graphe avec JJ Sylvester en 1822
- Premier livre avec König (allemand) en 1936
- Problèmes militaires (2ème guerre mondiale)
  - Création des Operations Research aux USA
  - Organisation des convois (bataille de l'Altlantique)
  - Blocus des ports (japonais)
  - Répartitions des équipages dans les avions
  - …

L’évolution

- Après la guerre, essaimage vers
  - Les grands comptes
  - L’enseignement
  - Les sociétés savantes
- Dans les années 70-80 : trou noir
- Aujourd’hui : une première approche du problème technique (aide à la décision)

Domaine dans l'entreprise

- Production
  - Allocation de ressources
    - Contraintes des ressources limitées
    - Fonction objectif
- Ordonnancement
  - Durée des tâches, dates de début, date au plus tôt, … (Méthode Pert)
  - Gestion des achats, stocks
- Logistique
  - Placement des dépôts
  - Organisations de tournées

Domaine dans l'entreprise (2)

- Gestion des files d'attentes (configuration)
- Plan Qualité
  - Statistique (fiabilité, …)
- Vente
  - Théorie des jeux (clients, concurrents, …)
- Aspect social : pouvoir, relations, …

Principes de base

- Utilisation de méthodes scientifiques (modèles mathématiques)
- Finalité = Prise de décision et non la description d'un phénomènes (statistiques, …) / Expliquer, Prévoir, Agir
- Modèle :
  - Représentation d'un fragment de la réalité
  - Simulations (manuelles impossibles)
  - Classes de problèmes
- Résolution (solution exacte ou approchée)
  - Problème de représentation des nombres, des erreurs d'arrondis et des temps de calcul, algorithmique spécifique

Modèle

- Obligation de bien formuler le problème
- Réduction de la réalité (le modèle n’est pas la réalité) => Mesure de la perte de réalité
- Compromis entre précision et simplicité
- KISS = Keep It Simple, Stupid
- Outil d’AIDE à la décision

Modèle (2)

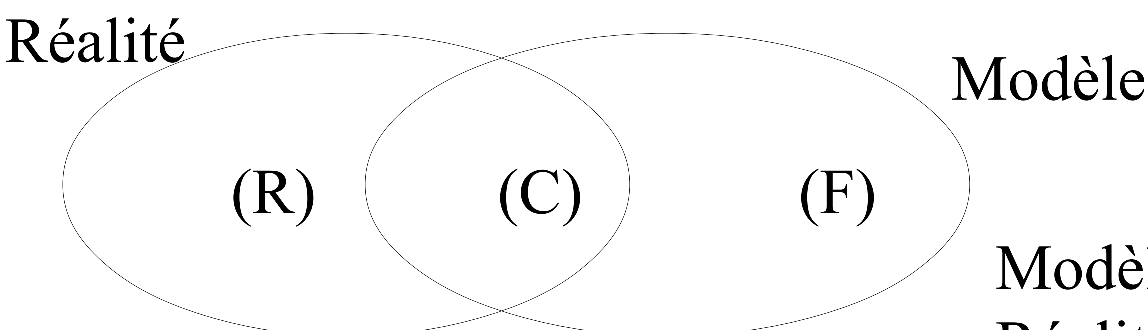
- Définition : Une ou plusieurs relations paramétrées liant des variables d’entrée et de sortie
  - Entrée :
    - Exogènes (décrivent l’environnement, subies)
    - Endogènes (contrôle, fixées dans une certaine limite)
  - Sortie :
    - Valeur optimale
    - Structure optimale

Modèle (3)

- Construit à partir d'hypothèses et d'instruments
  - Hypothèses : Transcrit au moins une part de la réalité, adaptées aux outils de traitement, modèle obtenu doit être exploitable
  - Instruments : graphe, suite, probabilités, …

Modèle (4)

- Compatible (C) : propriétés de la réalité et du modèle
- Réelle (R) : propriétés de la réalité mais pas du modèle
- Formelle (F) : propriétés du modèle mais pas de la réalité
- Parfait (P) : toute propriété du modèle est propriété de la réalité
- Complet (C2) : toute propriété de la réalité est propriété du modèle



Modèle 2 Réalité = ∅ : (P)
Réalité - Modèle = ∅ : (C2)

Modèle (5)

- Aspect syntaxique (mode de représentation) :
  - Axiomes indépendants : ne découlent pas les uns des autres (bases)
  - Non contradictoire : les axiomes ne le sont pas
  - Complétude : il n’existe pas de proposition ni démontrable ni réfutable
  - Décidable : il existe toujours une voie permettant d’établir qu’une assertion est vraie ou non

Modèle (5b)

- Exemple : Arrêt d'un programme – Existe-t-il une fonction arret(P) permettant de déterminer si un programme s'arrête ?

```
marrant (P)

début

   tant que arret (P)
       faire
   fin tant que

fin
```

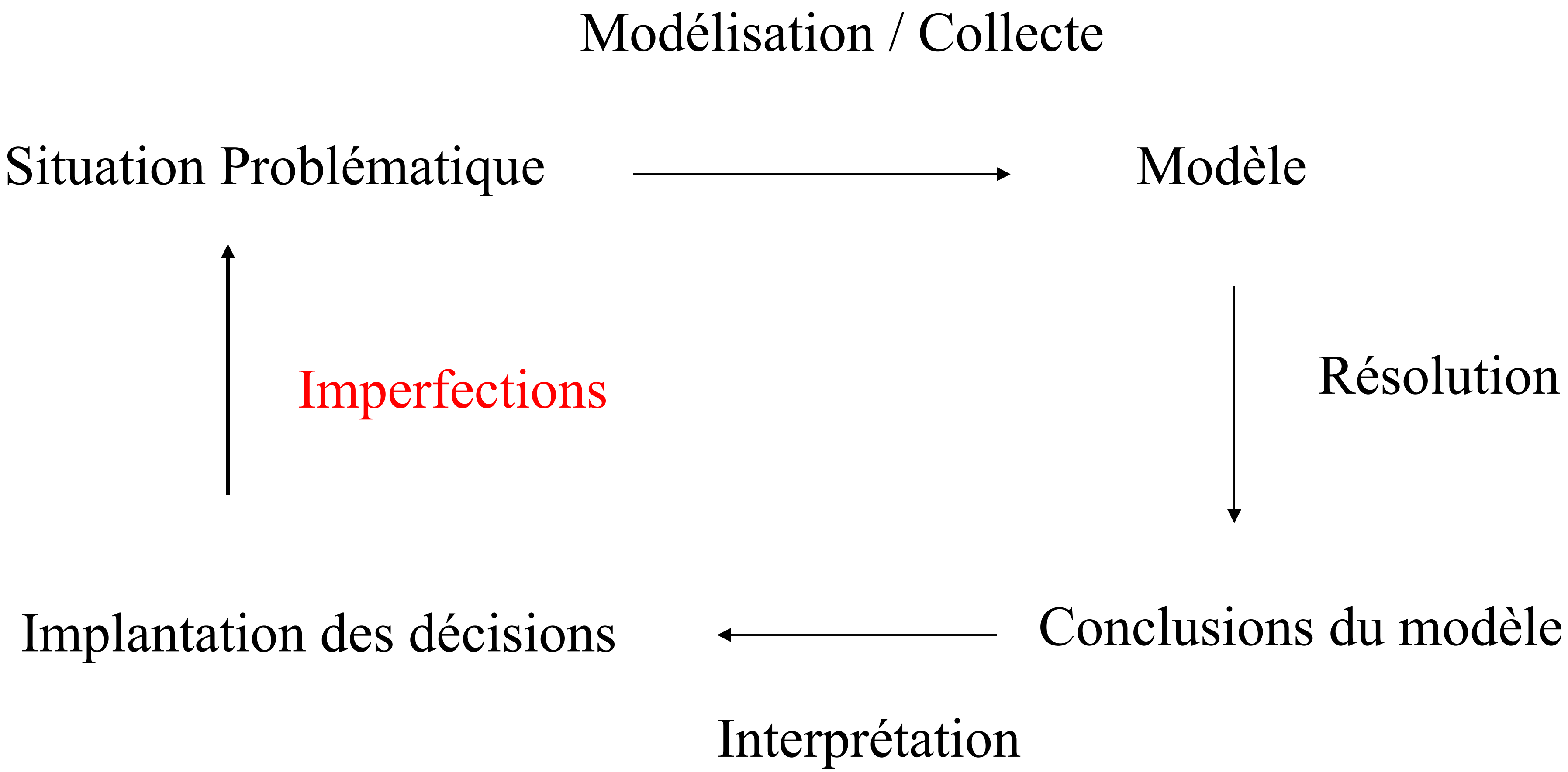
Modèle (6)

- Aspect sémantique (liens de signification entre les situations et le modèle):
  - Exhaustivité : rend compte en plus d'autres pratiques (augmentation des propriétés)
  - Flexible : s'adapte à d'autres pratiques (générique)
  - Fécondité : génère de nouvelles pratiques (IA)
  - Validité : liens entre les prémisses et l'interprétation des résultats (ne doit pas utiliser des propriétés du modèle qui ne sont pas de la réalité)
  - Réfutable : il existe une démarche permettant d'aboutir à son rejet en cas de concurrence de modèle

Conséquences

- Ne pas oublier l’environnement (psychologique, social, …)
- Suivi des solutions préconisées
- Problème sous-contraint
- Caractère incertain

Processus de Modélisation



Classes de théorie

- Théorie des graphes
- Programmation linéaire
- Théorie des files d'attente (Markov)
- Optimisation non combinatoire (sans contrainte)
- Théorie des jeux (désinformation)
- …

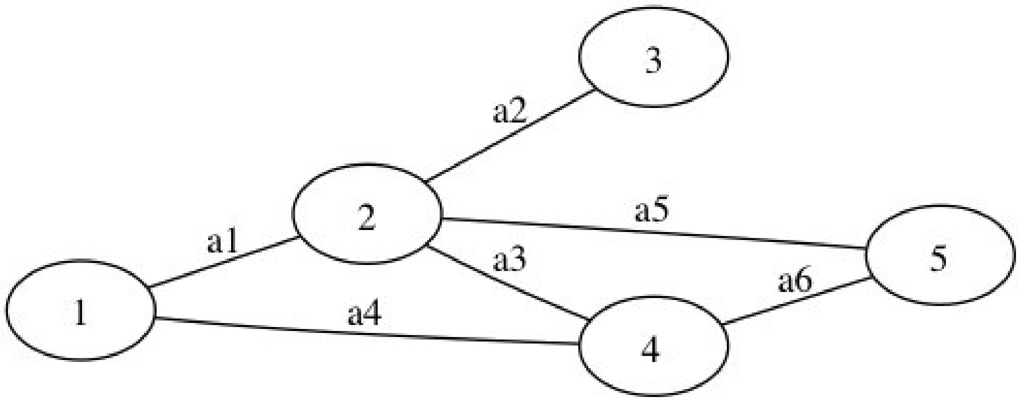
Théorie des Graphes

- Un réseau de transport est constitué de nœuds (exemple ville) et d'arcs (exemple route)
- Chaque liaison représente un certain coût ou poids (exemple distance en km)
- Remarque : Ici les fonctions d'étiquetage des nœuds et des arcs sont rudimentaires (contrairement aux problèmes bases de données)

Formalisation - Problème

- Le problème devient alors « comment joindre un nœud A à un nœud B» de manière à ce que :
  - On ne passe pas deux fois par le même nœud (même endroit)
  - On minimise la fonction de coût
- Plus sophistiqué (expression régulière)

Exemple



Chaîne : (a1, a5, a6, a3, a2)

(-> non élémentaire)

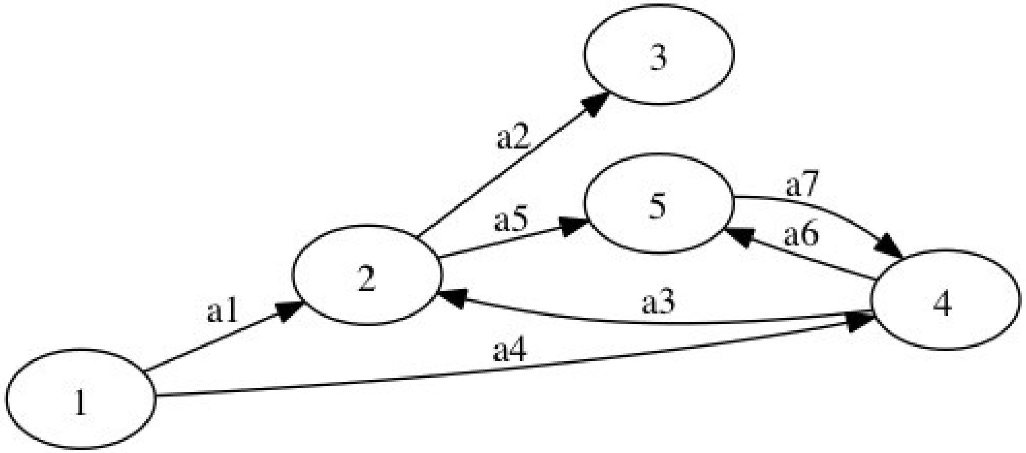
Cycle : (a1, a5, a6, a4)

(-> élémentaire)

Chemin : (a1, a5, a7, a3)

(-> non élémentaire)

Circuit : (a5, a7, a3)



Forme générale de la théorie des graphes

- p-Graphe :
  - Un graphe est un p-graphe $\Leftrightarrow \forall$ (i,j) $\neg \exists$ plus de p arcs (i, j)
- Fonction d'incidence : Ψ : U -> X x X
- Etiquetage des noeuds et des arcs :
  - G (X, U, Ψ,ν , ε)
- Type abstrait
  - Fonctions de manipulation :
    - successeurs (Γ+), prédécesseurs (Γ -), ...
    - Problèmes topologiques (chemin, …)

Historique

- Problèmes de référence :
  - Arrêt d'un algorithme (Turing, 1936)
  - Gestion des flots (Ford-Fulkerson 1958)
  - Fermeture transitive (Warshall 1962)
  - Expressions régulières et bases de données (Mendelzon, 1985)

Programmation Linéaire - Principe

- Une entreprise exerce des activités (A_i) avec une intensité variable
- Elle utilise des ressources (R_i) dont on connaît les quantités disponibles
- On connaît les ratios d'utilisation des ressources pour les différentes activités
- On connaît les retours sur investissements

Formalisation - Problème

- Déterminer les intensités (non négatives), auxquelles il faut exercer les activités A et B de manière à ce que :
  - La quantité des ressources consommées ne dépasse pas la quantité des ressources disponibles
  - Le retour sur investissement soit maximum

Exemple

- Activités :
  - Activité A_1 : production de cidre,
  - Activité A_2 : production de tartes aux pommes
- Ressources :
  - Ressource R_1 : des pommes,
  - Ressource R_2 : des employés
  - Ressource R_3 : de la pâte à tarte
- Quantités disponibles :
  - Les pommes : 8 kg
  - Les employés : 7 personnes
  - La pâte à tarte : 3 kg

Exemple (suite)

- Chacune des deux activités peut être exercée respectivement avec une intensité x_1, représentant le nombre de bouteilles de cidre et x_2 le nombre de tartes aux pommes.
- La consommation des ressources pour exercer les activités au niveau de l'unité (1 bouteille ou 1 tarte) :

	A_1	A_2
R_1	2	1
R_2	1	2
R_3	0	1

pour produire 1 bouteille de cidre (A_1), on «consomme » 2 kg de pommes (ressource R_1) et 1 employé (ressource R_2).

Exemple (suite)

- Retour sur investissement (au niveau de l'unité) :
  - Activité A_1 : 4 (le prix de vente d'une bouteille de cidre est 4 fois supérieur au prix de revient de ce même cidre)
  - Activité A_2 : 5.

- Question : Que doit-on produire et dans quelles quantités pour maximiser le retour sur investissement ?

Les formes générales de la programmation linéaire

- Un programme linéaire est un problème faisant intervenir un certain nombre de variables réelles (x_1 et x_2 dans notre exemple).
- Ces variables doivent satisfaire un ensemble d’équations et/ou d’inéquations linéaires.
- Une fonction linéaire de ces variables, dite ***fonction objectif*** doit être rendue optimum (minimum ou maximum).
- Les ressources et les consommations doivent être additives et divisibles (sinon c’est plus difficile)

(linéaire signifie que toutes les relations font intervenir des variables du premier degré).

Les formes générales de la programmation linéaire (2)

La forme canonique du Problème P – (standard : $Ax = b$)

$$Ax \leq b$$

$$x \geq 0$$

$$z = cx(\max)$$

Avec A une matrice (m, n)

b un m-vecteur colonne

c un n-vecteur ligne

x un n-vecteur colonne et

$C = \{ x \geq 0, Ax \leq b \}$ représente les contraintes

$z = cx(\max)$ est la fonction objectif

Historique

- Environnement (2ème guerre mondiale) :
  - Terme du à Dantzig (simplexe 1947)
  - Initialement : Programme = planification opérationnelle mais maintenant Programme = Problème d’optimisation
- Hypothèses :
  - Linéarité des contraintes
  - Proportionnalité des gains/coûts et consommations
  - Divisibilité des variables
  - Déterminisme des données

Optimisation non combinatoire

- Départ :
  - fonction (scalaire ou vectorielle)
  - Une ou plusieurs variables réelles
- Objectif : Déterminer l'optimum de cette fonction
- Non combinatoire : le domaine de définition de la fonction n'est pas un ensemble fini (ni même dénombrable)
- **Minimiser** $\Leftrightarrow$ Maximiser : max (cx) = - min (-cx)

Problèmes

- Difficulté majeure : mise en œuvre informatique (temps d’évaluation de la fonction, espace mémoire, …)
- Dérivabilité de la fonction (suivant les méthodes), convexité, …
- Programmation en nombre entier (pas d’algorithme universel efficace)
- Extremum local ou global (selon un voisinage ou sur tout le domaine de la fonction)
- Problème varié : algorithmes nombreux (dichotomie, newton , nombre d’or, …)$\Rightarrow$ Trouver la bonne classe de problème

Théorie des Jeux

- Organisation :
  - Plusieurs centres de décisions (études de tous les joueurs)
  - Prise de décision dont dépend un résultat qui concerne le joueur
- 3 grands principes
  - Coopération pure : agrégation de préférences individuelle pour conduire à l'intérêt général
  - Lutte pure : duel
  - Mixte : alliances « fluctuantes »

Théorie des Jeux (exemple)

- Dilemme du prisonnier
- Jeux économiques :
  - à somme nulles
  - avec perte
- Marienbad, morpion, puissance 4, …
- Echecs

Dilemme du Prisonnier

- 2 individus (A et B) en prison:
  - Marché : dénoncer son complice ou non
    - Si un individu dénonce et qu'il est dénoncé : les deux ont une remise de peine (1 an)
    - Si un individu dénonce et que l'autre couvre : le premier à une remise de peine importante (5 ans) et l'autre écope du maximum de peine
    - Si les deux individus se couvre mutuellement : les deux ont une remise de peine intermédiaire (3 ans)
  - Question : Doit-on dénoncer ou couvrir ?

Analyse

- Les deux s’entendent : ils améliorent leurs situations vis à vis d’une dénonciation
- Mais un peut améliorer sa situation en dénonçant l’autre
- Craignant cela, l’autre risque de dénoncer aussi, dégradant la situation
- => Coopération mais sans garantie sur le tiers (extension au système itératif : plusieurs décisions dans le temps)

Représentation

		B couvre	B dénonce
A couvre		Compromis A = 3; B = 3	Gain pour B, A = 0, B = 5
A dénonce		Gain pour A, A = 5, B = 0	Double, A = 1, B = 1

Bibliographie

- Berge C. : Graphes, Gauthier-Villars
- Faure R. : Précis de Recherche Operationnelle, Dunod Décision
- Gondran M., Minoux M. : Graphes et algortihmes, Collection de la DER-EDF
- Garey M.R., Johnson D.S. : Computers and intractability : a guide to the theory of NP-Completeness, Freeman
- Sites : epfl.ch (RESO)
- Généraliste : que sais-je ?, PUF
- …