

**Pourquoi la lune présente-t-elle toujours la
même face ?**



Enseignant-responsable du projet :
Jérôme YON

Etudiants :
Aliénor DUPEYRAT
Colombe JULIA
Edouard DONZE
Noémie LE ROY
Victor LE MAISTRE

Date de remise du rapport : 13 / 06 / 2016.

Référence du projet : STPI¹ / P6 / 2016 – 046.

Intitulé du projet : Pourquoi la lune présente-t-elle toujours la même face ?

Type de projet : Calcul, modélisation.

Objectifs du projet :

L'objectif de notre projet était de comprendre, démontrer et simuler le phénomène de synchronisation de la Lune autour de la Terre. Pour ce faire, nous avons dû élaborer une démarche scientifique afin de répondre au sujet le plus clairement et précisément possible. Nous avons aussi pour objectif de se familiariser avec des logiciels relativement inconnus pour la plupart d'entre nous.

Mots clés : synchronisation, modélisation, effets de marées.

1. INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES DE ROUEN Département Sciences et Techniques Pour l'Ingénieur avenue de l'Université - 76801 Saint Etienne du Rouvray - tél : +33 (0)2 32 95 97 00 - fax : +33 (0)2 32 95 98 60

Table des matières

Notations et acronymes	3
Introduction	4
1 Méthodologie et organisation du travail :	5
2 Phénomènes de synchronisation :	7
2.1 Définition / explication :	7
2.2 Synchronisation du pendule :	8
3 Modélisation de la synchronisation de la Lune :	11
3.1 Représentation de système Terre-Lune :	11
3.2 Étude du système :	13
3.3 Exploitation des résultats avec Scilab :	15
4 Animation avec Pov-Ray :	17
Conclusion et perspectives	21
Bibliographie	24
Annexes	25
Théorème du moment cinétique pour le pendule :	25
Code scilab de l'exemple du pendule	26
Principe fondamentale de la dynamique (explication chapitre 3)	27
Code scilab de la synchronisation de la Lune	28
Code de la modélisation sur Pov-Ray :	30

Notations et acronymes :

- PFD : Principe fondamentale de la dynamique.
- TMC : Théorème du moment cinétique.

Introduction :

L'intitulé de notre projet est « Pourquoi voit-on toujours la même face de la Lune? ». La plupart d'entre nous ne savait même pas qu'il existait une face cachée de la Lune. C'est précisément ce qui nous a intrigué et poussé à choisir ce projet. De plus, il s'agissait d'un sujet plutôt attirant. En discutant autour de nous, nous nous sommes rendu compte que nous n'étions pas les seuls à l'ignorer.

Avant même de commencer nos recherches, une question est apparue. A-t-on toujours vu cette même face de la Lune? Les scientifiques sont unanimes, la réponse est non. Il y a quelques milliards d'années, la lune n'était pas du tout orientée comme actuellement. Comment ce phénomène s'est alors mis en place?

Lors de nos premières recherches sur internet, nous n'avons trouvé que très peu d'informations. La plupart des sites abordait la question de manière superficielle et n'entrait pas dans les détails. Mais lors d'une conférence sur l'astrophysique réalisé par Jérôme PEREZ à l'INSA, nous en avons appris plus sur cette question. Il s'avère que la Lune est en rotation synchrone autour de la Terre ce qui explique pourquoi nous ne voyons qu'une seule et même face. Mais le problème principal résidait en fait dans l'explication de ce phénomène. Et là était l'enjeu de notre projet.

Dans une première partie, nous expliquerons précisément ce qu'est la synchronisation. il s'agit du mot-clé de notre projet donc il est important de bien en connaître le sens. Dans cette même partie, nous nous demanderons si ce phénomène de synchronisation est applicable à un système plus simple que celui Terre-Lune afin de pouvoir créer une analogie.

Dans un second temps, nous aborderons la majeure partie de notre projet, la démonstration de la synchronisation. Nous expliquerons alors le parcours de notre réflexion, comment nous sommes parvenus à ce résultat ainsi que les méthodes employées pour démontrer ce phénomène.

Finalement, dans un but pédagogique, nous illustrerons notre résultat grâce à une animation. En effet nous avons pensé qu'un aspect visuel de notre modélisation serait plus explicite que tous nos calculs.

Chapitre 1

Méthodologie et organisation du travail :

Tout au long de ce semestre, nous avons du travailler en groupe et se répartir les tâches intelligemment afin de mener ce projet jusqu'au bout.

Notre sujet est une affaire de mécanique. Or jusqu'ici nous n'avions seulement étudié la mécanique du point en cours alors que notre problème se base sur la mécanique du solide. Afin que chaque membre du groupe puisse comprendre l'évolution du projet sans être perdu, nous avons décidé lors nos premières séances de s'informer sur la mécanique du solide et principalement de revoir les bases de la mécanique du point.

Étant au point, et c'est le cas de le dire, nous devions alors trouver une méthode pour mettre en application ce que nous venions de voir dans le but d'expliquer la synchronisation de la Lune.

Aliénor et Noémie se sont alors penchées sur l'étude de l'orbite de la Lune pendant que Victor et Colombe calculaient sa matrice d'inertie. Quant à lui, Édouard devait chercher à appliquer le TMC à notre système.

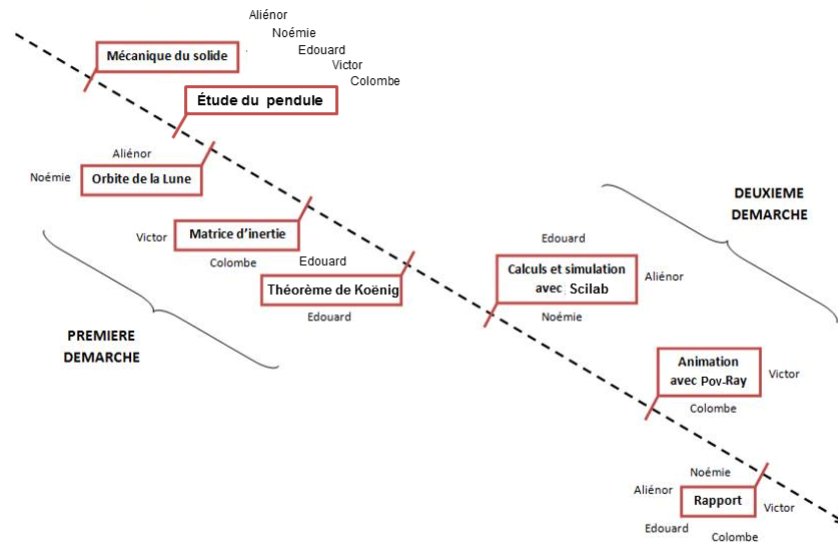
Très vite, nous nous sommes rendu compte que cette méthode n'allait pas aboutir. Nous avons donc du directement réfléchir à une autre manière d'aborder le problème.

La première chose à laquelle nous avons pensé est l'aspect pédagogique du résultat final. En effet, expliquer des lignes infinies de calculs n'est pas le meilleur moyen pour démontrer quelque chose. Nous avons donc pensé à, pourquoi pas, mettre en place une modélisation de notre problème afin d'avoir un aspect visuel. Colombe et Victor ont alors commencé à se familiariser avec Pov-Ray, un logiciel d'animation.

Cependant, même si nous allions avoir de jolies images de synthèses, il fallait quand même que nous réussissions à démontrer cette synchronisation. En adoptant une toute nouvelle méthode consistant à considérer la Lune comme deux masses, Aliénor, Édouard et Noémie (après de multiples calculs) sont parvenus à aboutir à des équations différentielles. Ce système était assez compliqué à résoudre manuellement. Il était donc nécessaire de se servir d'un logiciel. Ils ont alors fait la connaissance de Scilab, logiciel de calcul numérique.

Se séparer en deux groupes pour répartir le travail et découvrir des nouveaux logiciels fut très productif. Nos différents travaux sur Scilab et Pov-Ray nous ont permis d'aboutir d'un part à une modélisation et d'autre part à une animation montrant la synchronisation de la Lune autour de la Terre dans le temps.

FIGURE 1.1 – Organigramme :



Chapitre 2

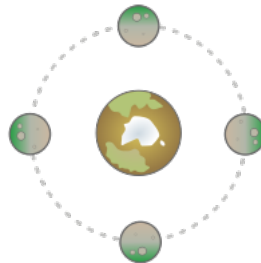
Phénomènes de synchronisation :

2.1 Définition / explication :

La réponse à notre problème est simple. Nous ne voyons qu'une seule face de la Lune car la période de rotation de la Lune sur elle-même est la même que sa période de révolution autour de la Terre. En effet, c'est précisément parce qu'elle fait un tour sur elle-même pendant qu'elle fait un tour autour de la Terre qu'elle présente toujours la même face. Ce phénomène est appelé rotation synchrone ou synchronisation.

Sur le schéma ci-contre, on remarque que lorsque la Lune fait un quart de tour autour de notre planète, elle fait un quart de tour sur elle-même. Elle présente donc la même face.

FIGURE 2.1 – Illustration du phénomène de rotation synchrone :



Mais comment expliquer la synchronisation de la Lune autour de la Terre? On observe d'autres cas de synchronisation similaire à celui du système Terre-Lune. Charon, le satellite de Pluton, est aussi en rotation synchrone avec ce

dernier. Un autre exemple de synchronisation est celui de Mercure autour du Soleil. Sa période de rotation est exactement égale aux deux tiers de sa période de révolution autour du Soleil. Le phénomène de synchronisation de la Lune autour de la Terre n'est donc pas une exception et ne peut être du au hasard. La synchronisation doit alors pouvoir s'expliquer grâce à des actions mécaniques.

Le problème de la synchronisation de la Lune étant difficile à comprendre, étude de mouvement d'astre et système à plusieurs corps, nous ne savons pas comment l'appréhender et par où commencer. Nous avons donc décidé de prendre un autre exemple pour mieux assimiler cette notion et comprendre les phénomènes physique mis en jeu lors d'une synchronisation.

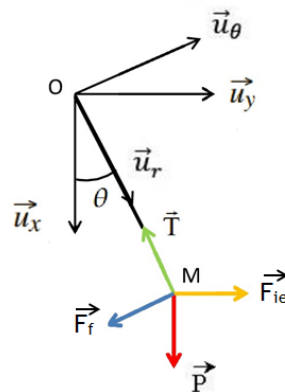
2.2 Synchronisation du pendule :

Comme nous venons de le dire, nous allons étudier ici un problème plus simple. Nous avons donc pour cela considéré un exemple bien connu en cinématique, celui du pendule simple. L'intérêt de cet exemple est double , il va d'une part nous permettre d'expliquer ce phénomène complexe qu'est la synchronisation, et d'autre part nous permettre de le faire uniquement grâce à nos connaissances en mécanique du point.

Par ailleurs le pendule est bien connu pour sa périodicité propre liée à la longueur du fil et à la force gravitationnelle g qui s'exerce sur la masse. Mais que se passe-t-il si on place ce pendule sur une planche qui bouge elle aussi? Le système que nous avons étudié ici est donc le suivant : un pendule simple avec une masse accrochée par un fil, que l'on met en mouvement, le tout, pour étudier une synchronisation, placé sur une planche que l'on met également en mouvement mais bien évidemment à une fréquence différente.

Voici une figure pour illustrer ceci :

FIGURE 2.2 – Pendule :



Supposons dans un premier temps le système idéal et étudions-le :

Cinématique :

$$\overrightarrow{OM} = L\overrightarrow{U}_r \text{ et donc } \overrightarrow{V} = L\dot{\theta}\overrightarrow{U}_\theta$$

Bilan des forces :

Le pendule est donc soumis à trois différentes forces, le poids et la tension du fil comme d'habitude et le fait qu'il soit placé sur une planche en mouvement est modélisé par une force d'inertie entraînement :

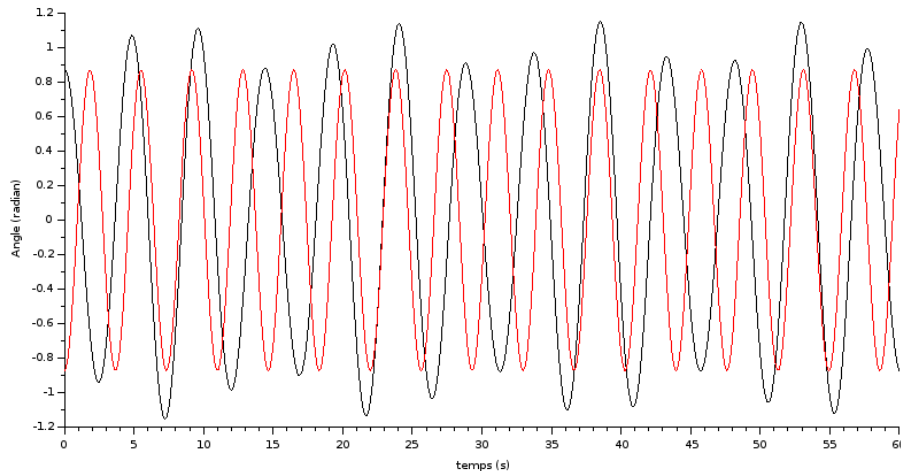
- Poids : $\overrightarrow{P} = mg\overrightarrow{U}_x$
- Tension du fil : $\overrightarrow{T} = -T\overrightarrow{U}_r$
- Force d'inertie d'entraînement : $\overrightarrow{F}_{ie} = -m\overrightarrow{a}_e = -mA \times \cos(\omega t + \varphi)\overrightarrow{U}_y$

Le théorème du moment cinétique appliqué à ce système nous donne alors l'équation suivante : (vous trouverez en annexes de ce rapport les calculs que nous avons ici réalisé)

$$\ddot{\theta} = \frac{1}{L} \times (-g \times \sin\theta - A \times \cos\theta \times \cos(\omega t + \varphi))$$

Grâce au logiciel Scilab, nous avons pu modéliser ces résultats. (vous trouverez également en annexes le code que nous avons fait). Voici alors les résultats que nous obtenons : nous avons tracé en fonction du temps les oscillations de notre planche en mouvement (il s'agit de la courbe rouge) et les oscillations de notre pendule (il s'agit de la courbe noire).

FIGURE 2.3 – Évolution temporelle de l'angle



On remarque alors qu'il n'y a absolument pas synchronisation dans ce cas, et que les fréquences n'interfèrent pas entre elles. Une étape clé de notre projet apparaît alors ici avec l'idée qu'il est nécessaire de dissiper de l'énergie pour observer cette synchronisation. Nous avons donc rajouté à notre système une quatrième force, il s'agit bien évidemment d'une force de frottements (force non conservative) qui comme nous l'avons vu en mécanique du point est responsable de la dissipation d'énergie. Nous l'avons modélisé comme ceci :

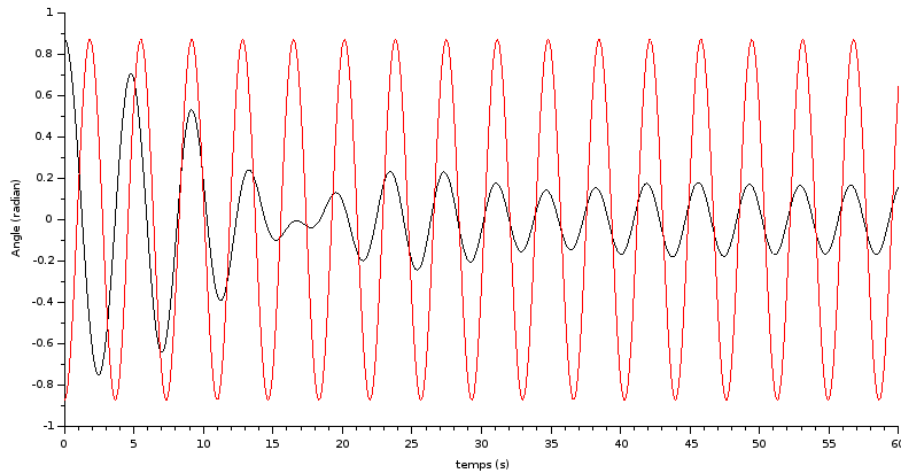
$$\vec{F}_f = -\lambda \vec{V} = -\lambda L \dot{\theta} \vec{U}_\theta$$

La nouvelle équation différentielle devient alors :

$$\ddot{\theta} = \frac{1}{L} \times (-g \times \sin\theta - A \times \cos\theta \times \cos(\omega t + \varphi)) - \frac{\lambda \dot{\theta}}{m}$$

De la même manière que précédemment nous avons modélisé ce nouveau résultat et nous obtenons le graphique suivant :

FIGURE 2.4 – Évolution temporelle de l'angle avec la dissipation d'énergie :



On remarque alors dans ce cas de figure qu'il y a bien synchronisation. En effet, au bout de quelques cycles, les conditions initiales sont totalement dissipées et le pendule a adopté la fréquence de la planche.

Ainsi ce premier exemple du pendule fut une étape très importante de notre projet et nous a permis d'abord de mieux comprendre le phénomène de synchronisation et surtout nous a permis de montrer qu'il est impératif de prendre en compte d'une part une force excitatrice (périodique) et d'autre part une dissipation d'énergie pour démontrer une synchronisation.

Chapitre 3

Modélisation de la synchronisation de la Lune :

Dans cette partie nous allons expliquer notre modélisation de la synchronisation de la Lune.

3.1 Représentation de système Terre-Lune :

Comme nous venons de le voir avec le pendule il est possible de forcer un système à adopter une fréquence à laquelle il est soumis. Notre démarche à ce moment là du projet a alors été d'appliquer le même principe à notre système Terre-Lune. Nous voulions donc appliquer le théorème du moment cinétique au système et notamment pour cela utiliser le théorème de Koëning (qui nous permet de coupler le moment cinétique de la Lune sur elle-même et son moment autour de la Terre). Une grosse partie de notre temps a donc été ici de rechercher ces moments et particulièrement celui de la rotation de la Lune sur elle-même. Nous avons donc dans un premier temps étudié le moment cinétique d'un solide en rotation autour d'un axe puis appliqué cela à la Lune en supposant qu'il s'agissait d'une ellipsoïde. D'autre part, la seule force en présence dans notre système est la force gravitationnelle et qui est, rappelons-le, une force centrale. Elle possède donc un moment qui est nul. Par le TMC on obtient donc un moment cinétique constant dans le temps. Cependant à la grande différence du pendule nous avons ici un grand nombre d'inconnues et une seule équation (obtenue par le TMC). Cela nous aurait posé de grands problèmes lors de la résolution numérique.

Nous avons alors dû dans le cadre de notre démarche scientifique, trouver une autre solution pour comprendre et simuler cette synchronisation. Par conséquent, nous avons choisi de modifier notre représentation de la Lune et de la simplifier afin de pouvoir traiter le problème avec les outils de la mécanique du

point. Le plus important dans cette nouvelle représentation était de bien traduire la force excitatrice et la dissipation d'énergie. Ces phénomènes n'étant liés qu'à l'orbite Lunaire elle-même, l'enjeu était donc de bien modéliser les effets de la force gravitationnelle de la Terre sur la Lune et par conséquent la déformation de celle-ci, ce qui correspond au final aux effets de marées. Nous avons finalement opté pour la simulation de la Lune par deux masses M_1 et M_2 alignées. Ces deux masses sont liées ensemble par un ressort et gravitent autour de la Terre. La déformation de la lune est ainsi modélisée par une force de rappel élastique et une force de frottement. Voici des figures pour illustrer cette représentation :

FIGURE 3.1 – Représentation du système Terre - Lune

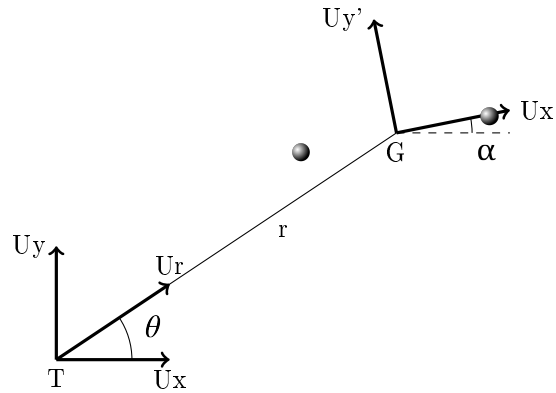
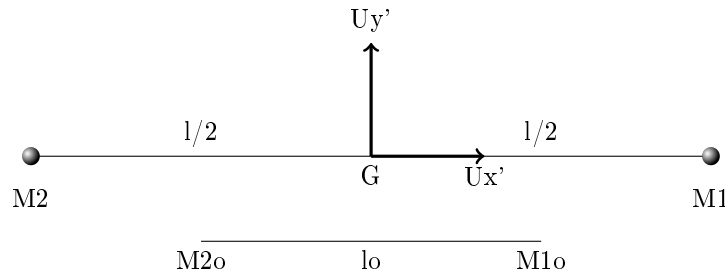


FIGURE 3.2 – Représentation de la Lune



Étudions plus précisément cette nouvelle représentation : θ représente l'angle entre le centre de la Terre et le centre de la Lune et donc $\dot{\theta}$ la vitesse angulaire de rotation de la lune autour de la Terre. De la même manière α correspond à l'angle entre le repère fixe de la terre et le repère en mouvement de la Lune. $\dot{\alpha}$ représente donc la vitesse angulaire de rotation de la lune sur elle même. l correspond lui à la longueur entre nos deux masses M_1 et M_2 ; ainsi notre déformation de la Lune, et donc les effets de marées sont caractérisés par le terme

\dot{l} . Notre objectif est donc de montrer qu'à terme on a l'égalité $\dot{\theta} = \dot{\alpha}$; ou autrement dit de montrer que le rapport de ces deux vitesses angulaires tend vers 1.

3.2 Étude du système :

L'étude cinématique donne donc :

Vecteurs positions :

$$\begin{cases} \overrightarrow{TM_1} = \overrightarrow{TG} + \overrightarrow{GM_1} = r\overrightarrow{U}_1 + \frac{l}{2}\overrightarrow{U}_{x'} \\ \overrightarrow{TM_2} = r\overrightarrow{U}_1 - \frac{l}{2}\overrightarrow{U}_{x'} \end{cases}$$

Vecteurs vitesses :

$$\begin{cases} \overrightarrow{V(M_1/R_0)} = \dot{r}\overrightarrow{U}_1 + r\dot{\theta}\overrightarrow{U}_\theta + \frac{\dot{l}}{2}\overrightarrow{U}_{x'} + \frac{l}{2}\dot{\alpha}\overrightarrow{U}_{y'} \\ \overrightarrow{V(M_2/R_0)} = \dot{r}\overrightarrow{U}_1 + r\dot{\theta}\overrightarrow{U}_\theta - \frac{\dot{l}}{2}\overrightarrow{U}_{x'} - \frac{l}{2}\dot{\alpha}\overrightarrow{U}_{y'} \end{cases}$$

Vecteurs accélérations :

$$\begin{cases} \overrightarrow{a(M_1/R_0)} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\overrightarrow{U}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\overrightarrow{U}_\theta + \frac{1}{2}(\ddot{l} - l\dot{\alpha}^2)\overrightarrow{U}_{x'} + (\frac{\dot{l}\dot{\alpha}}{2} - l\dot{\alpha})\overrightarrow{U}_{y'} \\ \overrightarrow{a(M_2/R_0)} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\overrightarrow{U}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\overrightarrow{U}_\theta - \frac{1}{2}(\ddot{l} - l\dot{\alpha}^2)\overrightarrow{U}_{x'} - (\frac{\dot{l}\dot{\alpha}}{2} - l\dot{\alpha})\overrightarrow{U}_{y'} \end{cases}$$

Maintenant concernant les forces, nous l'avons vu, il y en a trois en présence : d'abord la force gravitationnelle qui s'applique aux deux masses, et ensuite deux autres forces pour modéliser la déformation de la lune et donc la dissipation d'énergie. Il s'agit d'une force de rappel élastique qui est due à notre ressort de raideur k dans notre représentation. Celle-ci s'exprime donc comme nous l'avons vu en mécanique du point. Dans notre cas nous répartissons cette force de manière égale sur les deux masses (ce qui explique la division par 2 dans notre bilan des forces). L'autre force est une force de frottements, que nous avons également répartie sur les 2 masses. Nous l'avons écrite de manière analogue à la force de frottements de l'air du pendule, celle-ci était de la forme $-\lambda V$ ou encore donc de la forme $-\lambda \dot{x}$. En revanche ce qui nous intéressait ici n'était pas les frottements dues à l'air (qui par ailleurs n'existe pas là haut) mais celle due à la difficulté de déformer la Lune. Nous avons donc choisi de l'écrire sous la forme $-\lambda \dot{l}$ (avec \dot{l} qui comme nous l'avons dit caractérise la déformation de la Lune).

Le bilan des forces donne alors :

Sur M_1 :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{F}_{g1} &= -\frac{G \times m_t \times m_1}{2} \times \frac{\overrightarrow{TM_1}}{\|\overrightarrow{TM_1}\|^3} \\ \overrightarrow{F}_r &= -\frac{k(l-l_0)}{2} \overrightarrow{U}_{x'} \\ \overrightarrow{F}_f &= -\lambda \frac{\dot{l}}{2} \overrightarrow{U}_{x'} \end{aligned}$$

Sur M_2 :

$$\begin{aligned}\vec{F}_{g2} &= -\frac{G \times m_t \times m_2}{2} \times \frac{\vec{TM}_2}{\|\vec{TM}_2\|^3} \\ \vec{F}_r &= \frac{k(l-l_0)}{2} \vec{U}_{x'} \\ \vec{F}_f &= \lambda \frac{l}{2} \vec{U}_{x'}\end{aligned}$$

La suite des étapes consiste ici à appliquer le principe fondamental de la dynamique aux deux masses et projeter les équations selon les axes U_r et U_θ . Après de multiples simplifications et combinaisons linéaires entre les équations (que vous trouverez en annexe), on obtient les résultats suivants :

$$\begin{aligned}\ddot{r} &= r\dot{\theta}^2 - \frac{Gm_t}{2} \left(r \left(\frac{1}{TM_1^3} + \frac{1}{TM_2^3} \right) + \frac{l}{2} \cos(\alpha - \theta) \left(\frac{1}{TM_1^3} - \frac{1}{TM_2^3} \right) \right) \\ \ddot{\theta} &= -\frac{2r\dot{\theta}}{r} - \frac{Gm_t l}{4r} \sin(\alpha - \theta) \left(\frac{1}{TM_1^3} - \frac{1}{TM_2^3} \right) \\ \ddot{\alpha} &= -\frac{2l\dot{\alpha}}{l} + \frac{Gm_t r}{Al \cos(\alpha - \theta)} \left(\frac{1}{TM_1^3} - \frac{1}{TM_2^3} \right) \\ \ddot{l} &= l\dot{\alpha}^2 - \left(\frac{l\ddot{\alpha}}{2} + l\alpha \right) B - \frac{Gm_t}{2} \left(\frac{r}{\cos(\alpha - \theta)} \left(\frac{1}{TM_1^3} - \frac{1}{TM_2^3} \right) + l \left(\frac{1}{TM_1^3} + \frac{1}{TM_2^3} \right) \right) - \frac{2k}{m_l} (l-l_0) - \frac{2\lambda l}{m_l}\end{aligned}$$

$$\text{Avec } A = \left(\frac{1}{\tan(\alpha - \theta)} + \tan(\alpha - \theta) \right) \text{ et } B = \left(\frac{1}{\tan(\alpha - \theta)} - \tan(\alpha - \theta) \right)$$

Nous avons ensuite cherché à simplifier ces équations différentielles, tout en gardant une cohérence dans les calculs. Nous avons donc supposé ici que $r \gg l$, ce qui reste tout à fait respectable. Notamment on obtient que $\left(\frac{1}{TM_1^3} - \frac{1}{TM_2^3} \right) \simeq 0$ et $\left(\frac{1}{TM_1^3} + \frac{1}{TM_2^3} \right) \simeq \frac{2}{r^3}$.

$$\text{Et ainsi on a : } \begin{cases} \ddot{r} = r\dot{\theta}^2 - \frac{Gm_t}{r^2} \\ \ddot{\theta} = -\frac{2r\dot{\theta}}{r} \end{cases}$$

Nous pouvons déjà à cette étape faire une remarque importante : ces deux équations correspondent à l'orbite lunaire non perturbée par l'effet des marées de la Lune. En effet on obtient le même résultat lorsque que l'on étudie le mouvement du centre de gravité de la Lune G comme celui d'un point sans déformation (on aurait alors l'orbite elliptique de la Lune et pourrait vérifier la loi des aires). Ceci est donc tout à fait raisonnable et prouve que notre représentation du système n'est pas incohérente. En revanche, cela ne permet pas de simuler une dissipation d'énergie qui, comme nous l'avons déjà dit est indispensable pour observer une synchronisation.

On obtient également après simplification de la troisième équation :

$$\ddot{\alpha} = -\frac{2\dot{l}\dot{\alpha}}{l}$$

Analysons encore une fois ce terme : il pilote la variation de vitesse angulaire de rotation de la lune sur elle-même. La diminution est d'autant plus importante que la lune tourne rapidement sur elle-même (donc $\dot{\alpha}$ est grand) et que les effets de marées sont prononcés (donc \dot{l} est grand aussi).

Il reste alors à modéliser ces effets de marées ; la simplification de la dernière équation donne :

$$\ddot{l} = l\dot{\alpha}^2 - \underbrace{\left(\frac{l\ddot{\alpha}}{2} + l\alpha\right)}_{=0} B - \frac{Gm_t}{2} \left(\frac{r}{\cos(\alpha - \theta)} \underbrace{\left(\frac{1}{TM_1^3} - \frac{1}{TM_2^3}\right)}_{\rightarrow 0} + l \underbrace{\left(\frac{1}{TM_1^3} + \frac{1}{TM_2^3}\right)}_{\rightarrow \frac{2}{r^3}} \right) - \frac{2k}{m_l}(l-l_0) - \frac{2\lambda\dot{l}}{m_l}$$

Le terme = 0 est due au résultat que nous venons juste de voir au dessus. on obtient alors l'équation :

$$\ddot{l} = \frac{2k}{m_l}l_0 - \frac{2\lambda\dot{l}}{m_l} - l \left(\frac{2k}{m_l} + \frac{Gm_t}{r^3} - \dot{\alpha}^2 \right)$$

C'est cette équation qui contrôle l'élongation de la lune (simulation des effets de marées). Cette déformation est modélisée par un comportement élastique amorti (les termes en k et λ) mais pas uniquement, car l'inertie de rotation de la lune sur elle-même intervient (avec le terme $\dot{\alpha}^2$). Enfin, il reste un terme lié à l'attraction terrestre $\frac{Gm_t}{r^3}$. Seul ce terme peut expliquer le phénomène de synchronisation car c'est le seul qui peut induire une périodicité liée à l'orbite lunaire autour de la terre.

Finalement, le système d'équations à résoudre numériquement pour modéliser notre phénomène est donc le suivant :

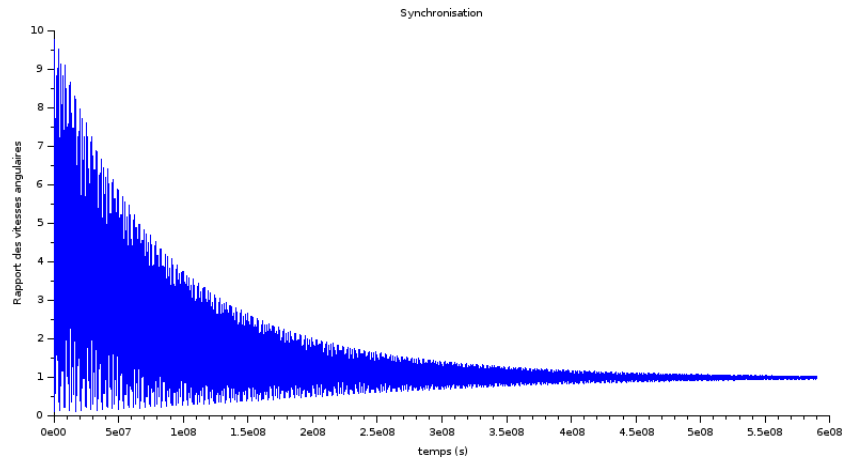
$$\begin{cases} \ddot{r} = r\dot{\theta}^2 - \frac{Gm_t}{r^2} \\ \ddot{\theta} = -\frac{2\dot{r}\dot{\theta}}{r} \\ \ddot{l} = \frac{2k}{m_l}l_0 - \frac{2\lambda\dot{l}}{m_l} - l \left(\frac{2k}{m_l} + \frac{Gm_t}{r^3} - \dot{\alpha}^2 \right) \\ \ddot{\alpha} = -\frac{2\dot{l}\dot{\alpha}}{l} \end{cases}$$

3.3 Exploitation des résultats avec Scilab :

Pour cela nous avons utilisé le logiciel Scilab et codé une fonction qui permet de calculer ces dérivées sur un grand nombre de points et des longues durées. Le plus difficile a été de trouver les bonnes conditions initiales pour lancer l'algorithme. Vous trouverez notre code et ses explications en annexe.

Nous avons donc pu grâce à Scilab calculer le rapport $\frac{\dot{\theta}}{\dot{\alpha}}$ en fonction du temps et montrer qu'il tend vers 1, ce qui signifie qu'il y a bel et bien synchronisation.

FIGURE 3.3 – Mise en évidence de la synchronisation :



Remarque 1. Il est intéressant de voir ici, que finalement on obtient les mêmes résultats pour une constante de raideur $k = 0$, ce qui induit que la force de rappel est inutile dans notre modélisation. Ceci peut sûrement être expliqué par le fait que la force gravitationnelle induit que les deux masses ne s'écartent pas indéfiniment, mais cela reste une hypothèse et serait un point intéressant pour des perspectives futures sur ce projet.

Chapitre 4

Animation avec Pov-Ray :

Après avoir obtenu les résultats grâce au code Scilab, nous avons bien démontré le phénomène étudié. Cependant, nous voulions obtenir une version plus parlante de cette synchronisation de la rotation de la Lune autour de la Terre. Nous avons opté grâce aux conseils de notre professeur pour une simulation sur Pov-Ray des données obtenues grâce à Scilab.

Tout d'abord nous avons découvert ce logiciel qui offre de multiples possibilités pour la simulation. Nous avons commencé par maîtriser des choses simples. En effet, sur Pov-Ray rien n'est laissé au hasard et l'utilisateur doit tout contrôler. Pour créer une simple sphère, il est d'abord nécessaire de choisir l'emplacement de la caméra, son angle de visée ainsi que la position de la source de lumière et sa couleur. Nous avons ensuite pris en main la couleur de la sphère, il est notamment possible de choisir une texture spécifique pour cette dernière. De plus, nous avons pu prendre une image d'un planisphère pour la coller sur notre sphère donnant un résultat très satisfaisant. Nous nous sommes ensuite attaqués au fond pour construire un univers étoilé.

Nous sommes ensuite passé à la création de la Lune. Cependant, un problème d'échelle est très vite apparu. Nous avons défini comme unité de longueur le rayon de la Terre. Mais la distance Terre-Lune était trop importante par rapport à la taille de la Lune : la Lune représente 0.4% de la distance Terre-Lune et n'apparaissait donc pas sur notre simulation. Nous avons donc modifié nos valeurs en divisant la distance Terre-Lune par 100.

Il a fallu ensuite établir le lien entre les résultats Scilab et notre code Pov-Ray. Le premier problème était de s'assurer que les données puissent être interprétées par notre code. Nous avons donc rajouté à la fin du code Scilab des lignes permettant d'enregistrer les données nécessaires de manière à ce qu'elles soient lisibles par Pov-Ray dans un fichier texte. Nous avons ensuite adapté notre caméra afin d'obtenir un repère cohérent avec celui utilisé pour Scilab.

Dans notre modélisation théorique, nous avons représenté la Lune par deux masses séparées d'une distance égale au rayon de la Lune par un ressort. Nous avons donc tenté de reproduire ces deux masses en deux lunes sur Pov-Ray. Après avoir mis toutes les données à l'échelle, nous avons réalisé que la distance entre les deux lunes était insignifiante devant la distance Terre-Lune, les deux Lunes étaient toujours confondues. Après de nombreuses tentatives infructueuses de modifier les données afin d'accroître la distance entre ces deux lunes, tout en gardant des données cohérentes, nous avons changé de direction. En se basant sur les anneaux de Saturne, nous avons modélisé une coupe de cylindre traversant les centres des deux lunes. Ceci permettait bien d'observer le phénomène de synchronisation mais ne permettait pas d'observer les deux lunes. Nous avons donc finalement opté pour une autre solution. Nous avons augmenté la longueur entre les deux lunes non pas sur Pov-Ray mais sur Scilab, ce qui nous a permis de bien modéliser les deux lunes.

Notre dernière épreuve aura été la création d'un Gif. En effet, il a fallu générer un grand nombre d'images pour avoir une impression de mouvement de la Lune tout en observant le phénomène de synchronisation. Le plus grand problème a consisté en choisir un format d'image d'assez bonne qualité pour avoir un beau produit final tout en prenant en compte le temps nécessaire pour générer les images. En effet, nous avons choisi de générer 5 000 images et le temps estimé pour la meilleure qualité pour les générer toutes était de plus de 30h.

Voici quelques résultats de notre animation :

FIGURE 4.1 – Photo de notre animation (1) :



FIGURE 4.2 – Photo de notre animation (2) :



FIGURE 4.3 – Photo de notre animation (3) :

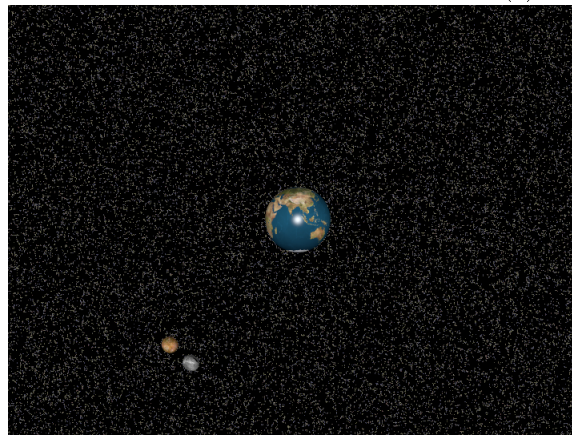
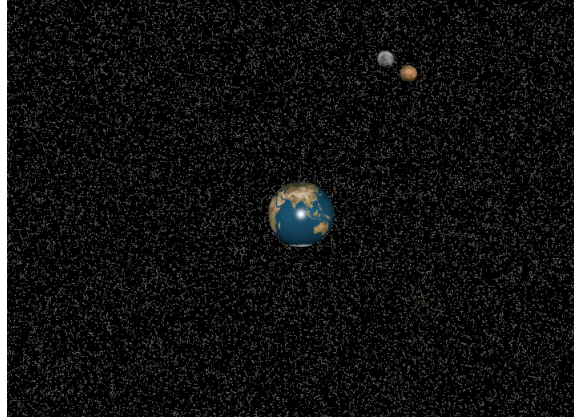


FIGURE 4.4 – Photo de notre animation (4) :



Remarque 2. Nous remarquons bien que la distance entre les deux Lunes varie entre les photos 1 et 2. Ceci illustre la déformation de la Lune par les forces de marées. L'angle entre l'axe des deux Lunes et la Terre varie aussi entre ces deux photos. Ceci illustre le fait que la Lune et la Terre ne sont pas encore synchronisés. Dans les photos 3 et 4, en revanche on remarque bien que la distance ainsi que l'angle entre l'axe des deux Lunes et la Terre ne varie pas. Nous avons donc bien une synchronisation.

Conclusion et perspectives :

Conclusion général :

Tout d'abord, nous pouvons le dire : nous avons réussi à expliquer et modéliser le fait que l'on ne voit qu'une face de la lune. Aucun d'entre nous n'avait de connaissances particulières dans ce domaine, mais nous nous y sommes tous intéressés. En chemin, nous avons réussi à traverser le bosquet de la mécanique du solide, surmonté la forêt des matrices d'inertie, survécu aux sables mouvants de Pov-Ray, combattu les ouragans de Scilab pour finalement réussir à modéliser le phénomène.

Sur une note plus sérieuse, la modélisation obtenue démontre bien qu'au bout d'un certain temps, la force gravitationnelle exercée par la Terre sur la Lune crée des effets de marées sur celle-ci, ce qui induit une dissipation d'énergie. C'est alors ce mécanisme qui entraîne le phénomène de synchronisation et qui explique pourquoi on ne voit plus qu'une seule face de la lune. Ainsi nous avons pu répondre à notre problématique initial.

Pour finir, nous tenons particulièrement à remercier Monsieur Yon pour son aide apportée tout au long de notre projet sans laquelle nous n'aurions pu aboutir à un tel résultat.

Conclusions personnelles sur l'apport de l'EC :

LE ROY Noémie : Ce projet de physique fut pour ma part très enrichissant tant du côté scientifique qu'humain. En effet, le fait de devoir construire une démarche pour aboutir à un résultat était très instructif. De plus, j'ai du m'adapter aux différentes méthodes de travail des personnes de mon groupe, ne les connaissant pas forcément très bien. Dans l'ensemble, j'ai beaucoup aimé travailler sur ce projet. Certes, il était difficile à appréhender mais ce qui m'a plu était qu'à chaque hypothèse qu'on faisait, il fallait tout remettre en question. A chaque fois qu'on trouvait une méthode ou qu'on allait dans une direction, toujours nous devons nous demander si cette résolution était vraiment adaptée à notre problème ou s'il n'y en existerait pas une meilleure. Ce projet nécessitait donc une connaissance précise du problème posé. Il m'a aussi permis de revoir les

cours de mécanique du point dont mes souvenirs étaient un peu bancals. Finalement, ce projet fut bénéfique sur de nombreux points.

DONZÉ Édouard : En ce qui me concerne j'étais déjà au courant qu'il existait une « face cachée » de la Lune, mais je n'avais jamais entendu une réelle explication de ce phénomène, j'ai donc trouvé ce sujet très captivant dès le début. D'autant plus que pour moi la mécanique céleste est assez impressionnante mais reste très complexe ce qui représentait un autre enjeu de ce projet. Hormis le fait que j'ai enfin pu avoir une réponse à cette question, ce projet fut très intéressant et constructif. En effet il m'a permis bien évidemment d'approfondir mes connaissances en physique et mécanique et de me familiariser avec un logiciel de modélisation (Scilab) que je n'utilisais pas auparavant. Concernant le travail de groupe, il m'a permis une fois encore de me rendre compte de la nécessité d'une bonne organisation et d'une bonne entente lors d'un projet conséquent avec des délais fixés. Pour finir, ce projet m'a surtout beaucoup appris sur la méthodologie et les démarches scientifiques, en effet comme nous l'avons dit dans le rapport nous avons dû pour arriver à ces résultats suivre plusieurs étapes clés, remettre en doute et repenser nos représentations et modélisations sans cesse.

JULIA Colombe : J'ai trouvé ce projet tout à fait original et intéressant, il a également été très enrichissant sur plusieurs points. Tout d'abord, j'ignorais totalement pourquoi est ce que l'on voyait toujours la même face de la Lune et mes interrogations ont reçu une réponse plus que complète! Grâce à notre professeur et notre équipe, j'ai pu travailler sur différentes façons d'appréhender le problème tout apprenant à connaître et à travailler avec mes partenaires de projet. Après avoir choisi notre modélisation finale j'ai pu découvrir le logiciel Pov-Ray et approfondir mes connaissances en Scilab. Tout en travaillant avec rigueur et méthode scientifique, c'était stimulant de pouvoir donner une explication plus imagée et facilement appréhendable de l'explication grâce à notre animation. Tout cela n'a pas été sans difficulté notamment dans la découverte du logiciel et la révision des cours de mécanique mais le soutien de notre professeur et le travail de groupe a permis de surmonter ces obstacles!

DUPEYRAT Aliénor : J'ai trouvé ce projet très intéressant car il m'a permis de revoir et approfondir des notions vues en mécanique lors de notre première année. J'avais quelques lacunes dans cette matière, et ce sujet concret m'a permis de comprendre certains points que je ne maîtrisais pas auparavant. Le travail de groupe, qui s'est très bien déroulé, m'a également obligé à respecter les délais de notre projet en se répartissant le travail efficacement. Cela a donc requis une bonne organisation, ce qui est essentiel dans le métier que je serais amenée à exercer. Finalement, les difficultés et impasses rencontrées lors de ce projet nous ont appris à persévérer et ne pas abandonner.

LE MAISTRE Victor : J'ai choisi ce sujet car, bien que je n'ai pas beaucoup de connaissances dans le domaine, j'ai toujours été fasciné par l'astronomie. Ainsi, j'espérais au travers de ce projet en apprendre plus sur cette science mystérieuse.

Et je n'ai pas été déçu, que ce soit en cherchant les équations différentielles régissant l'orbite de la lune ou bien en essayant de modéliser cet orbite, j'ai beaucoup appris. La partie qui m'a le plus intéressé est de loin l'animation sur Pov-Ray car j'ai appris les bases d'un logiciel de modélisation 3D, mais je me suis surtout rendu compte de la puissance de ces logiciels. En effet, je ne m'étais jamais servi de logiciel de modélisation auparavant, et lors de notre modélisation nous nous sentions limité que par notre manque de connaissance du logiciel plus que par le logiciel lui même. Au cours de la modélisation, je me suis aussi rendu compte des véritables échelles, planètes, et distances de notre système solaire. Je ne pensais pas que la lune était si loin et si petite par rapport à la Terre! Concernant le travail de groupe, c'était une première pour moi de travailler dans un projet avec autant de personnes. C'était d'une part plus dur de se synchroniser mais aussi plus satisfaisant de partager cette aventure avec autant de personnes!

Perspectives pour la poursuite de ce projet :

Nous avons au cours de notre projet réussi à démontrer le phénomène de synchronisation de la Lune autour de la Terre en choisissant de représenter la Lune comme deux boules reliées par un ressort. Bien que cette modélisation nous permette de répondre à notre problématique, elle reste tout de même assez loin d'une bonne représentation de la Lune. Ainsi, pour être plus précis, nous pourrions nous servir de la matrice d'inertie de la Lune sur laquelle nous avons travaillé, tout en essayant de nous plonger plus profondément dans la mécanique du solide afin d'en extraire assez d'équations pour répondre à notre problème.

Concernant le logiciel Pov-Ray, nous avons plusieurs perspectives afin d'améliorer la modélisation de la lune. Dans l'immédiat, avec plus de temps et de ressources, nous aurions pu augmenter la qualité de notre animation. En effet, bien que nous ayons généré 5000 images, nous aurions pu tenter d'en générer plus pour obtenir un mouvement de la lune plus fluide. Pour cela il nous aurait fallu plusieurs ordinateurs munis de Pov-Ray afin de pouvoir obtenir les images dans un délai raisonnable. Une autre perspective d'amélioration aurait été celle de faire bouger la caméra. Ceci nous aurait par exemple permis de montrer le système solaire dans son ensemble avant de zoomer sur la Terre et d'observer le phénomène de synchronisation. Le grand problème que cela aurait posé aurait été le même qu'avec le système Terre-Lune, celui des échelles.

Bibliographie

- [1] Pascoli et Gianni ; « *Astronomie fondamentale* » ; Paris : Dunod, 2000.
- [2] Lamoureux Lise et Fortuné Danielle ; « *Mécanique générale : aide-mémoire* » ; Paris : Dunod, 2001.
- [3] Romagnan Jean-Pierre ; « *Comprendre la mécanique* » ; Les Ulis : EDP sciences, DL 2011.

Annexes :

Théorème du moment cinétique appliqué au pendule :

Dans un premier temps nous avons considéré le système comme idéal et l'avons étudié :

Cinématique :

$$\overrightarrow{OM} = L\overrightarrow{U}_r \text{ et donc } \overrightarrow{V} = L\dot{\theta}\overrightarrow{U}_\theta$$

Bilan des forces :

— Poids : $\overrightarrow{P} = mg\overrightarrow{U}_x$

— Tension du fil : $\overrightarrow{T} = -T\overrightarrow{U}_r$

— Force d'inertie d'entraînement : $\overrightarrow{F}_{ie} = -m\overrightarrow{a}_e = -mA \times \cos(\omega t + \varphi)\overrightarrow{U}_y$

Moment des forces :

$$\overrightarrow{M}_o(\overrightarrow{P}) = \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{P} = L\overrightarrow{U}_r \wedge mg\overrightarrow{U}_x = -Lmg * \sin\theta\overrightarrow{U}_z$$

$$\overrightarrow{M}_o(\overrightarrow{T}) = \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{T} = L\overrightarrow{U}_r \wedge -T\overrightarrow{U}_r = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{M}_o(\overrightarrow{F}_{ie}) = \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{F}_{ie} = L\overrightarrow{U}_r \wedge -m\overrightarrow{a}_e = -LmA * \cos\theta * \cos(\omega t + \varphi)\overrightarrow{U}_z$$

Moment cinétique :

$$\overrightarrow{\sigma}_o(M/R) = \overrightarrow{OM} \wedge m\overrightarrow{v} = L\overrightarrow{U}_r \wedge mL\dot{\theta}\overrightarrow{U}_\theta = mL^2\dot{\theta}\overrightarrow{U}_z$$

Théorème du moment cinétique :

$$\frac{d\overrightarrow{\sigma}_o}{dt} = \sum \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{F}$$

$$mL^2\ddot{\theta} = -Lmg * \sin\theta - LmA * \cos\theta * \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\ddot{\theta} = \frac{1}{L} \times (-g \times \sin\theta - A \times \cos\theta \times \cos(\omega t + \varphi))$$

On retrouve donc bien ici la première équation différentielle que nous avons exploitée dans le chapitre 1.

Dans un second temps nous avons rajouté la force de frottements pour qu'il y ait dissipation d'énergie, les nouveaux calculs deviennent donc :

Force de frottements :

$$\vec{F}_f = -\lambda \vec{v} = -\lambda L \dot{\theta} \vec{U}_\theta$$

$$\overrightarrow{M_o(\vec{F}_f)} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}_f = L \vec{U}_r \wedge -\lambda L \dot{\theta} \vec{U}_\theta = -\lambda L^2 \dot{\theta} \vec{U}_z$$

Et on retrouve alors la nouvelle équation que nous avons également étudiée au chapitre 1 :

$$\ddot{\theta} = \frac{1}{L} \times (-g \times \sin\theta - A \times \cos\theta \times \cos(\omega t + \varphi)) - \frac{\lambda \dot{\theta}}{m}$$

Code Scilab de l'exemple du pendule :

Vous trouverez ci-dessous le code scilab commenté de l'exemple du pendule avec les forces de frottements :

```

1 clear
2 function dZ = derivation(t,Z)
3 dZ=zeros(2,1);
4 dZ(1)=Z(2); dZ(2)=-g*sin(Z(1))/L-a*cos(Z(1))*cos(omega*t+phi)/L-lambda/m*Z(2);
5 endfunction
6
7 //donnees du probleme
8 m=2;
9 L=5; //Longeur de la corde
10 g=9.81; //acceleration de la pesenteur
11 Duree=60; //Duree de l'analyse
12 Nbpoints=500; //Nombre de points pour l'affichage
13 tethainit=%pi/180*50; //angle initial du ressort
14 omega=sqrt(g/L*1.5);
15 lambda=0.4;
16 a=0.9;
17 phi=%pi
18
19 T0=0; //Instant initial
20 Z0=[tethainit,0]'; //Vecteur Z a l'instant initial
21 Temps=[0:Duree/(Nbpoints-1):Duree];
22 //Vecteur indiquant les sorties temporelles pour l'affichage
23

```

```

24 EvoZ=ode(Z0,T0,Temps,derivation);
25
26 Excitation=tethainit*cos(omega*Temps+phi);
27 clf;plot2d(Temps',[EvoZ(1,:)'],Excitation'),[1,5]);
28 xtitle('Evolution temporelle de l''angle','temps (s)','Angle (radian)')
```

Principe fondamental de la dynamique appliqué au système Terre-Lune :

Vous trouverez ci-dessus les calculs qui ont permis d'aboutir aux équations données dans le chapitre 3 concernant le principe fondamental de la dynamique appliqué à nos deux masses :

Après l'étude de la cinématique et le bilan des force on obtient

PFd appliqué en M_1 et projeté sur U_r : (Eq 1)

$$\frac{m_l}{2}(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) + \frac{m_l}{4}(\ddot{l} - l\dot{\alpha}^2)\cos(\alpha - \theta) - \frac{m_l}{2}\left(\frac{l\ddot{\alpha}}{2} + \dot{l}\dot{\alpha}\right)\sin(\alpha - \theta) = -\frac{Gm_l m_t}{2TM_1^3}\left(r + \frac{l}{2}\cos(\alpha - \theta)\right) - \frac{k(l-l_0)}{2}\cos(\alpha - \theta) - \frac{\lambda \dot{l}}{2}\cos(\alpha - \theta)$$

PFd appliqué en M_2 et projeté sur U_r : (Eq 2)

$$\frac{m_l}{2}(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) - \frac{m_l}{4}(\ddot{l} - l\dot{\alpha}^2)\cos(\alpha - \theta) + \frac{m_l}{2}\left(\frac{l\ddot{\alpha}}{2} + \dot{l}\dot{\alpha}\right)\sin(\alpha - \theta) = -\frac{Gm_l m_t}{2TM_2^3}\left(r - \frac{l}{2}\cos(\alpha - \theta)\right) + \frac{k(l-l_0)}{2}\cos(\alpha - \theta) + \frac{\lambda \dot{l}}{2}\cos(\alpha - \theta)$$

PFd appliqué en M_1 et projeté sur U_θ : (Eq 3)

$$\frac{m_l}{2}(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) + \frac{m_l}{4}(\ddot{l} - l\dot{\alpha}^2)\sin(\alpha - \theta) + \frac{m_l}{2}\left(\frac{l\ddot{\alpha}}{2} + \dot{l}\dot{\alpha}\right)\cos(\alpha - \theta) = -\frac{Gm_l m_t}{4TM_1^3}\sin(\alpha - \theta) - \frac{k(l-l_0)}{2}\sin(\alpha - \theta) - \frac{\lambda \dot{l}}{2}\sin(\alpha - \theta)$$

PFd appliqué en M_2 et projeté sur U_θ : (Eq 4)

$$\frac{m_l}{2}(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) - \frac{m_l}{4}(\ddot{l} - l\dot{\alpha}^2)\sin(\alpha - \theta) - \frac{m_l}{2}\left(\frac{l\ddot{\alpha}}{2} + \dot{l}\dot{\alpha}\right)\cos(\alpha - \theta) = \frac{Gm_l m_t}{4TM_2^3}\sin(\alpha - \theta) + \frac{k(l-l_0)}{2}\sin(\alpha - \theta) + \frac{\lambda \dot{l}}{2}\sin(\alpha - \theta)$$

Pour simplifier et identifier les termes qui nous intéressent, effectuons des combinaisons linéaires entre ces équations :

(Eq 1) + (Eq 2) → (Eq 5) :

$$m_l(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -\frac{Gm_l m_t}{2}\left(r\left(\frac{1}{TM_1^3} + \frac{1}{TM_2^3}\right) + \frac{l}{2}\cos(\alpha - \theta)\left(\frac{1}{TM_1^3} - \frac{1}{TM_2^3}\right)\right)$$

(Eq 1) - (Eq 2) → (Eq 6) :

$$\frac{m_l}{2}(\ddot{l} - l\dot{\alpha}^2)\cos(\alpha - \theta) - m_l\left(\frac{l\ddot{\alpha}}{2} + \dot{l}\dot{\alpha}\right)\sin(\alpha - \theta) = -\frac{Gm_l m_t}{2}\left(r\left(\frac{1}{TM_1^3} - \frac{1}{TM_2^3}\right) + \frac{l}{2}\cos(\alpha - \theta)\left(\frac{1}{TM_1^3} + \frac{1}{TM_2^3}\right)\right) - k(l-l_0)\cos(\alpha - \theta) - \lambda \dot{l}\cos(\alpha - \theta)$$

(Eq 3) + (Eq 4) → (Eq 7) :

$$m_l(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = -\frac{Gm_l m_t l}{4} \sin(\alpha - \theta) \left(\frac{1}{TM_1^3} - \frac{1}{TM_2^3} \right)$$

(Eq 3) - (Eq 4) → (Eq 8) :

$$\frac{m_l}{2} (\ddot{l} - l\dot{\alpha}^2) \sin(\alpha - \theta) + m_l \left(\frac{l\ddot{\alpha}}{2} + \dot{l}\dot{\alpha} \right) \cos(\alpha - \theta) = -\frac{Gm_l m_t l}{4} \sin(\alpha - \theta) \left(\frac{1}{TM_1^3} - \frac{1}{TM_2^3} \right) - k(l - l_0) \sin(\alpha - \theta) - \lambda \dot{l} \sin(\alpha - \theta)$$

(Eq 5) et (Eq 7) nous donnent alors les premières équations du chapitre 3 ; pour les deux autres il faut encore simplifier :

(Eq 6) $\times \frac{2}{m_l \times \cos(\alpha - \theta)}$ → (Eq 9) :

$$(\ddot{l} - l\dot{\alpha}^2) - 2 \left(\frac{l\ddot{\alpha}}{2} + \dot{l}\dot{\alpha} \right) \tan(\alpha - \theta) = -Gm_t \left(\frac{r}{\cos(\alpha - \theta)} \left(\frac{1}{TM_1^3} - \frac{1}{TM_2^3} \right) + \frac{l}{2} \left(\frac{1}{TM_1^3} + \frac{1}{TM_2^3} \right) \right) - \frac{2k}{m_l} (l - l_0) - \frac{2\lambda \dot{l}}{m_l}$$

(Eq 8) $\times \frac{2}{m_l \times \sin(\alpha - \theta)}$ → (Eq 10) :

$$(\ddot{l} - l\dot{\alpha}^2) + 2 \left(\frac{l\ddot{\alpha}}{2} + \dot{l}\dot{\alpha} \right) \frac{1}{\tan(\alpha - \theta)} = -\frac{Gm_l m_t l}{2} \left(\frac{1}{TM_1^3} - \frac{1}{TM_2^3} \right) - \frac{2k}{m_l} (l - l_0) - \frac{2\lambda \dot{l}}{m_l}$$

(Eq 9) - (Eq 10) → (Eq 11) :

$$\ddot{\alpha} = -\frac{2l\dot{\alpha}}{l} + \frac{Gm_t r}{A l \cos(\alpha - \theta)} \left(\frac{1}{TM_1^3} - \frac{1}{TM_2^3} \right)$$

(Eq 9) + (Eq 10) → (Eq 12) :

$$\ddot{l} = l\dot{\alpha}^2 - \left(\frac{l\ddot{\alpha}}{2} + l\alpha \right) B - \frac{Gm_t}{2} \left(\frac{r}{\cos(\alpha - \theta)} \left(\frac{1}{TM_1^3} - \frac{1}{TM_2^3} \right) + l \left(\frac{1}{TM_1^3} + \frac{1}{TM_2^3} \right) \right) - \frac{2k}{m_l} (l - l_0) - \frac{2\lambda \dot{l}}{m_l}$$

$$\text{Avec } A = \left(\frac{1}{\tan(\alpha - \theta)} + \tan(\alpha - \theta) \right) \text{ et } B = \left(\frac{1}{\tan(\alpha - \theta)} - \tan(\alpha - \theta) \right)$$

On retrouve ainsi bien nos quatre équations du chapitre 3.

Code Scilab de la synchronisation de la Lune :

Voici ci-joint le programme que nous avons codé sur scilab pour mettre en évidence la synchronisation de la Lune :

```

1 clear
2 function dZ = derivation(t,Z)
3 dZ=zeros(8,1); // initialisation du vecteur 8 lignes et 1 colonne
4 dZ(1)=Z(5);
5 dZ(2)=Z(6);
6 dZ(3)=Z(7);
7 dZ(4)=Z(8);

```

```

8 dZ(5)= Z(1)*Z(6)^2-(G*mt/Z(1)^2);
9 dZ(6)= -2*Z(5)*Z(6)/Z(1);
10 dZ(7)= 2*k*10/ml-2*lambda*Z(7)/ml-(2*k/ml+G*mt/Z(1)^3-Z(8)^2)*Z(3);
11 dZ(8)= -2*Z(7)*Z(8)/Z(3);
12 endfunction
13
14
15 //donnees du probleme :
16 mt = 5.972E24; //Masse Terre
17 ml = 7.3477E22; // Masse Lune
18 G = 6.6742E-11; //constante gravitationnelle
19 lambda = 5000000000000000; // coefficient de la force de frottement
20 k = 0; // constante de raideur
21 l0 = 1737.4E3; //Rayon Lunaire
22 r0 = 363104E3 // Perigee
23 v0 = 1052 // vitesse de la Lune au perigee en m/s
24 tetha0 = 0;
25 alpha0 = %pi/2;
26 rpoint0 = 0;
27 tethapoint0 = v0/r0;
28 lpoint0= 0 ;
29 alphapoint0 = 10*tethapoint0;
30 // La lune tourne sur elle-meme 10 fois plus rapidement qu'elle
31 //tourne autour de la terre
32 Duree = 250*27.321582*24*3600 //Duree de l'analyse : environ 18 ans
33 Nbpoints = 2000; //Nombre de points pour l'affichage
34 T0 = 0; //Instant initial
35 Z0 = [r0,tetha0,l0,alpha0,rpoint0,tethapoint0,lpoint0,alphapoint0]';
36 //Vecteur Z a l'instant initial
37 Temps=[0:Duree/(Nbpoints-1):Duree]';
38 //Vecteur indiquant les sorties temporelles pour l'affichage
39
40 EvoZ=ode(Z0,T0,Temps,derivation);
41
42 for n=1:Nbpoints
43     Diff(n) = (EvoZ(6,n)/(EvoZ(8,n)));
44     x1(n)= EvoZ(1,n)*cos(EvoZ(2,n))+EvoZ(3,n)*cos(EvoZ(4,n))/2;
45     y1(n)= EvoZ(1,n)*sin(EvoZ(2,n))+EvoZ(3,n)*sin(EvoZ(4,n))/2;
46     x2(n)= EvoZ(1,n)*cos(EvoZ(2,n))-EvoZ(3,n)*cos(EvoZ(4,n))/2;
47     y2(n)= EvoZ(1,n)*sin(EvoZ(2,n))-EvoZ(3,n)*sin(EvoZ(4,n))/2;
48 end // cela permet de calculer le rapport tethapoint / alphapoint
49 //et les coordonees de M1 et M2 a tous les instants
50
51 clf;plot2d(Temps,Diff(:),2); // on trace la difference en fonction
52 // du temps, 2 correspond au style (ici tracer en bleu)
53 xtitle('Synchronisation','temps (s)','Rapport des vitesses angulaires');

```

Code de la modélisation sur Pov-Ray :

Vous trouverez ci-dessous le code commenté utilisé sur Pov-Ray pour obtenir notre animation :

```
1 global_settings { assumed_gamma 1.0 }
2 #declare Starfield2 = texture {
3   pigment {
4     granite // Fond étoile
5     turbulence <1, 1, 1>
6
7   color_map {
8     [ 0 color rgb <0, 0, 0>
9     ]
10    [ 0.27 color rgb <0, 0, 0>
11    ]
12    [ 0.27 color rgb <0.5, 0.5, 0.4>
13    ]
14    [ 0.285 color rgb <0.8, 0.8, 0.4>
15    ]
16    [ 0.285 color rgb <0, 0, 0>
17    ]
18    [ 0.47 color rgb <0, 0, 0>
19    ]
20    [ 0.47 color rgb <0.4, 0.4, 0.5>
21    ]
22    [ 0.485 color rgb <0.4, 0.4, 0.8>
23    ]
24    [ 0.485 color rgb <0, 0, 0>
25    ]
26    [ 0.68 color rgb <0, 0, 0>
27    ]
28    [ 0.68 color rgb <0.5, 0.4, 0.4>
29    ]
30    [ 0.695 color rgb <0.8, 0.4, 0.4>
31    ]
32    [ 0.695 color rgb <0, 0, 0>
33    ]
34    [ 0.88 color rgb <0, 0, 0>
35    ]
36    [ 0.88 color rgb <0.5, 0.5, 0.5>
37    ]
38    [ 0.895 color rgb <1, 1, 1>
39    ]
40    [ 0.895 color rgb <0, 0, 0>
41    ]
```



```

42 [ 1 color rgb <0, 0, 0>
43 ]
44 } }}
45 #include "colors.inc"
46 #include "textures.inc"
47
48 //-----
49 camera{ ultra_wide_angle
50     angle 75
51     right x*image_width/image_height
52     location <-0 ,0 ,-15.0>
53     look_at <0.0 ,0.0 , 0.0>}
54 // camera positionne en recul sur l'axe z regardant vers le centre de la terre
55
56 light_source{ <0,0,-40>
57 // Source de lumiere place derriere la camera de couleur blanche
58     color rgb<1,1,1> }
59
60 sphere{ <0, 0, 0>, 20000 texture{Starfield2}} //Fond etoile
61
62 // La Terre:
63 #version 3.7;
64 //Gestion des donnees a lire
65 #fopen infos "rotation_Pov.txt" read
66 #declare Count=0;
67 #while (Count <= frame_number)
68     #read (infos,x1)
69     #read (infos,y1)
70     #read (infos,x2)
71     #read (infos,y2)
72     #declare Count=Count+1;
73 #end
74 #fclose info
75 *#local temp = clock;
76 #local N_per_Rev = 300; // Number of Elements per revolutions
77 #local N_of_Rev = 10.00;*/ // Total number of revolutions
78 #declare Sphere1 = union //Lune 01
79 {#local x1 =x1/(10000*6371); // Normalisation des Coordonnees x de la lune 1
80 #local y1 = y1/(10000*6371); // Normalisation Coordonnees y de la lune 1
81
82 sphere{ <0,0,0>, 0.270
83     texture{ pigment{ image_map {
84         png "gifs/lune.png" map_type 1 // Planisphere Lune Grise
85     } //end of image_map

```

```

86     } // end of normal
87     translate<x1, y1, 0>
88     rotate < 0,360*clock,0>//<-!!!!
89     }}
90
91     #declare Sphere2 = union{
92     #local x2 =x2/(10000*6371); // Coordonnees x de la lune 1
93     #local y2 =y2/(10000*6371); // Coordonnees y de la lune 1
94     sphere{ <0,0,0>, 0.270
95         texture{ pigment{ image_map {
96             gif "gifs/Lune_02.gif" map_type 1 // Planisphere lune Orange
97         } //end of image_map
98         } // end of normal
99     }
100     translate< x2, y2, 0>
101     rotate < 0,360*clock,0>//<-!!!!
102     }
103     }
104
105     #declare Sphere3 = union { // La Terre
106     sphere{ <0,0,0>, 1
107         texture{ pigment{ image_map {
108             png "gifs/earth.png" map_type 1 // planisphere Terre
109         } //end of image_map
110         } // end of normal
111         } // end of pigment
112     finish { diffuse 0.9 phong 1}
113     // end of texture
114     translate< 0, 0, 0>
115     rotate < 0,360*clock,0>//<-!!!!
116     } // fin de sphere -----
117     //----- end
118     }
119     object { Sphere1} // Affichage des trois planetes
120     object { Sphere2}
121     object {Sphere3}

```