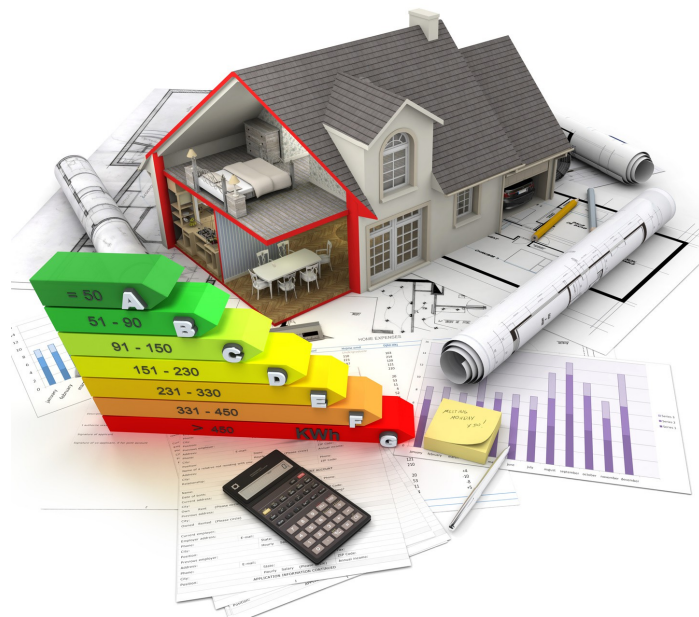


## **Vaut-il mieux isoler sa maison par l'intérieur ou par l'extérieur?**



**Etudiants :**

**Constantin Dedeyan**

**Tristan Raison**

**Myriam Guyot**

**Laurine Silberman**

**Cécile Hanquart**

---

**Enseignant-responsable du projet : J.Yon**



Date de remise du rapport : **08/06/2016**

Référence du projet : **STPI/P6/2016 – 44**

Intitulé du projet : ***Vaut-il mieux isoler sa maison par l'intérieur ou par l'extérieur?***

Type de projet : **Résolution Analytique, modélisation numérique**

Objectifs du projet :

***L'objectif de notre projet est de comprendre et d'étudier les transferts thermiques mis en jeu dans une paroi, et d'appréhender le problème de son isolation selon différents cas possibles. L'objectif final est de pouvoir dire si il est plus avantageux d'isoler sa maison par l'intérieur ou par l'extérieur, et pourquoi.***

Mots-clefs du projet : ***Isolation, transferts thermiques, déperdition, économie.***

Si existant, n° cahier de laboratoire associé : - - -

## TABLE DES MATIERES

|  |    |
|--|----|
| 1. Introduction.....   | 5  |
| 2. Méthodologie / Organisation du travail.....                                 | 5  |
| 3. Travail réalisé et résultats.....   | 6  |
| 3.1. Poser le problème.....  | 6  |
| 3.1.1. Densité de flux et flux thermique.....                                  | 6  |
| 3.1.2. Équation de la chaleur.....   | 6  |
| 3.1.3. Hypothèses de résolution.....   | 7  |
| 3.2. Étude en régime stationnaire.....   | 7  |
| 3.2.1. Paroi mono-couche.....  | 8  |
| 3.2.2. Paroi bi-couche.....  | 9  |
| 3.3. Étude en régime instationnaire.....                                       | 11 |
| 3.3.1. Étude analytique.....   | 11 |
| 3.3.2. Modélisation.....   | 14 |
| 4. Conclusions et perspectives.....  | 18 |
| 5. Bibliographie.....  | 19 |
| 6. Annexes (non obligatoire – exemples ci-dessous).....                        | 20 |
| 6.1. Démonstrations.....   | 20 |
| 6.2. Obtention des matrices par linéarisation de l'équation de la chaleur..... | 23 |
| 6.3. Programmes informatiques réalisés.....                                    | 24 |
| 6.4. Journal de bord.....  | 27 |

## 1. INTRODUCTION

Au quatrième semestre de notre cursus à l'INSA de Rouen, nous avons l'occasion de mobiliser nos connaissances dans le cadre du projet de Physique. Le projet que nous avons choisi nous invite à entrer dans le domaine des transferts thermiques liés à l'habitat.

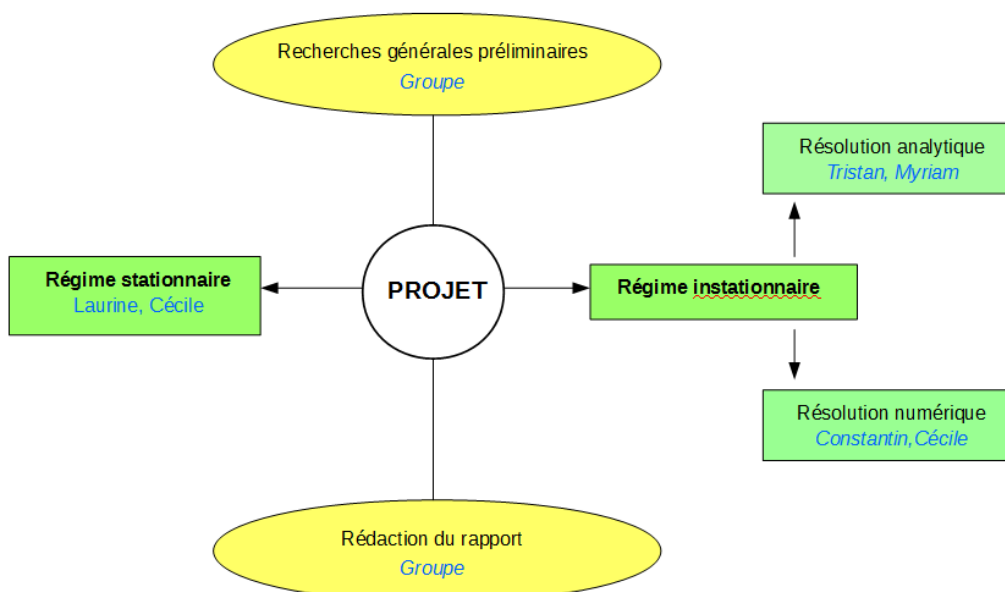
Dans le secteur de la construction, l'isolation efficace des bâtiments est une question de premier ordre. En effet, il s'agit d'assurer le confort des occupants tout en répondant aux contraintes environnementales actuelles. Le but de ce projet est de connaître le meilleur moyen d'isoler une paroi. Nous voulons déterminer si dans des conditions identiques, une isolation extérieure est plus efficace qu'une isolation intérieure.

Afin de répondre à cette question, nous poserons d'abord la base des transferts thermiques avec l'équation de la chaleur. Dans un second temps, nous aborderons la résolution du problème en régime stationnaire, et enfin en régime instationnaire.

## 2. MÉTHODOLOGIE / ORGANISATION DU TRAVAIL

Étant donné que nos connaissances dans le domaine des transferts thermiques et de l'isolation étaient très limitées au début du projet, la première partie de notre travail a consisté à faire tous ensemble des recherches très ouvertes sur le sujet afin de mieux poser le cadre de notre travail.

Très rapidement, nous avons séparé les régimes stationnaire et instationnaire. Nous avons travaillé en deux binômes et un monôme : un binôme pour le cas stationnaire, l'autre pour la résolution analytique en instationnaire et le monôme appréhendant le codage et l'utilisation du logiciel Scilab.



### 3. TRAVAIL RÉALISÉ ET RÉSULTATS

#### 3.1. Poser le problème

Pour évaluer si l'isolation est efficace ou non, il faut s'intéresser aux transferts thermiques dans la paroi. Pour cela nous devons définir ce qu'est le flux thermique.

##### 3.1.1. Densité de flux et flux thermique

Quand on met en contact deux solides de températures différentes, la température entre les deux corps n'est pas homogène : pendant un certain temps, le corps le plus chaud cède de l'énergie thermique au plus froid sans transfert de matière, jusqu'à l'équilibre. Le système est alors dynamique<sup>1</sup>.

Ce type de transfert thermique sans transfert de matière est appelé conduction thermique, et est représenté par la loi de Fourier :

$$\vec{\varphi} = -k \text{grad}(T) \quad \text{où} \quad \varphi = \frac{d\Phi}{dS}$$

$\vec{\varphi}$  représente la quantité de chaleur qui traverse  $dS$  pendant l'unité de temps, appelé flux de chaleur par unité de surface ou densité de flux ( $\text{W.m}^{-2}$ ).

$k$  représente la conductivité thermique ( $\text{W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$ ).

$T$  représente la température (K).

Ce transfert de chaleur est possible car le matériau est soumis à un gradient de température. « Le gradient de température est le vecteur qui caractérise en un point donné la variation de température. Ce vecteur est en tout point normal à la surface isotherme passant par ce point »<sup>2</sup>. Un flux de chaleur s'écoule alors.

Le flux thermique à travers une surface  $S$  est exprimé par unité de temps ( $\text{J.s}^{-1}$  ou  $\text{W}$ ) :

$$\Phi = \frac{dQ}{dt} = \int \int_S \vec{\varphi} \cdot \vec{n} dS$$

On étudie alors la température localement et on constate l'existence de surfaces isothermes.

Pour étudier le profil de température dans la paroi, il faut résoudre l'équation de la chaleur.

##### 3.1.2. Équation de la chaleur

L'équation de la chaleur<sup>3</sup> dans le cas général est la suivante :

$$k \Delta T + P = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t}$$

1 Source: livre intitulé « Transfert thermiques Application à l'habitat »

2 Source : INSA de Lyon

3 Démonstration en annexe

$\frac{\partial T}{\partial t}$  représente la variation de température dans le temps.

$a = \frac{k}{\rho C_p}$  représente la diffusivité thermique propre au matériau ( $m^2.s^{-1}$ ) avec  $k$  la conductivité thermique ( $W.m^{-1}.K^{-1}$ ),  $\rho$  la masse volumique ( $kg.m^{-3}$ ) et  $C_p$  la capacité thermique ( $J.K^{-1}$ ).

$P$  représente la production volumique de chaleur ( $W.m^{-3}$ ).  
 $\Delta T$  représente le transfert thermique.

### 3.1.3. Hypothèses de résolution

Notre système d'étude est une paroi ne produisant pas d'énergie. L'équation de la chaleur devient :

$$k \Delta T = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t}$$

Nous faisons l'hypothèse que l'isolation à choisir dépend du régime des variations de température (stationnaire ou instationnaire) et du fait que l'on choisisse de maintenir la fraîcheur ou la chaleur à l'intérieur.

Pour notre étude, nous fixons  $T_{inte}$ . Dans le cas stationnaire, nous fixons aussi  $T_{ext}$  alors que dans le cas instationnaire nous la faisons osciller.

On considère que la surface de la paroi présente une température uniforme selon les axes  $y$  et  $z$ . Nous travaillerons donc seulement selon l'axe  $x$  qui représente l'épaisseur de la paroi  $e_p$ . Nous sommes donc sous la forme unidimensionnelle.

Ainsi, on obtient l'équation de la chaleur sous la forme :

$$k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t}$$

et

$$\vec{grad}(T) \text{ devient } \frac{dT}{dx} .$$

### 3.2. Étude en régime stationnaire

En régime stationnaire, on fixe la température intérieure  $T_{inte}$  et la température extérieure  $T_{ext}$ . Après un certain temps, un équilibre entre ces deux températures s'installe.

Nous allons observer comment la température évolue dans l'épaisseur de la paroi selon les matériaux.

L'étude en régime stationnaire implique :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = 0 .$$

L'équation de la chaleur prend alors la forme :

$$k \Delta T = 0$$

Donc :

$$\Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$$

La solution de cette équation est de la forme :

$$T(x) = ax + b$$

Le profil de température dans la paroi est donc une droite affine de pente a et d'ordonnée b.

Plus la pente représentant la variation de température en fonction de l'épaisseur de la paroi est forte, plus la déperdition thermique est importante.

Le flux thermique ne dépend ni de la position dans la paroi ni du matériau. On obtient alors le flux thermique à travers une surface :

$$\Phi(0) = \Phi(e_p) = \int \int_S \vec{\varphi} \cdot \vec{n} dS$$

Comme on cherche à déterminer la déperdition thermique, on s'intéresse au gradient de température au niveau de  $T_{inte}$ .

### 3.2.1. Paroi mono-couche

Dans cette partie, on considère que la paroi, d'épaisseur  $e_p$  et de conductivité thermique  $k_p$ , n'est composée que d'un matériau.

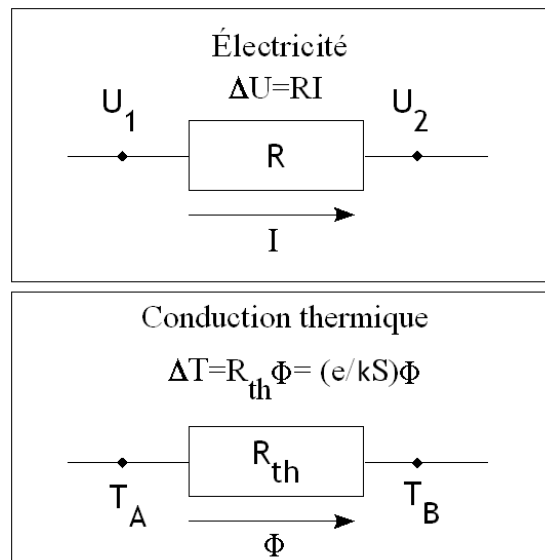
Le flux qui traverse la paroi est exprimé par :

$$\Phi(0) = \Phi(e_p) = \frac{k_p S}{e_p} (T_{inte} - T_{ext})$$

Avec pour norme de densité de flux :

$$\varphi_p = -k_p \frac{dT}{dx} = -k_p \frac{T_{inte} - T_{ext}}{e_p}$$

Par analogie avec la résistance électrique, il est possible d'exprimer la résistance thermique de la paroi en considérant la différence de température comme un potentiel<sup>4</sup> :



*Analogie électrique de résistances*

4 Source image: Wikipédia

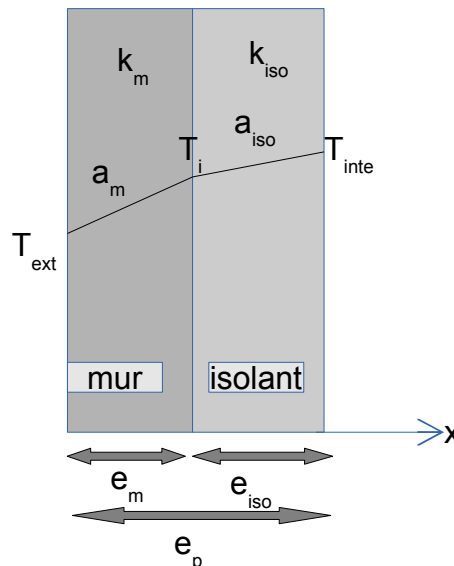


Dans notre cas d'étude, on obtient :

$$R_{(th P)} = \frac{1}{S} \frac{e_P}{k_P}$$

### 3.2.2. Paroi bi-couche<sup>5</sup>

Pour être plus réalistes, considérons maintenant une paroi composée de deux matériaux.



La paroi d'épaisseur  $e_p$  est composée d'un mur d'épaisseur  $e_m$  et d'un isolant d'épaisseur  $e_{iso}$ .

Chaque matériau a sa propre conductivité thermique :  $k_m$  pour le mur et  $k_{iso}$  pour l'isolant. L'évolution de la température dans chaque matériau est représentée par une fonction  $T(x)$  solution de l'équation de la chaleur. Mais pour chaque matériau la pente de la fonction  $T(x)$  est différente : elle est représentée par  $a_m$  pour le mur et par  $a_{iso}$  pour l'isolant.

À la limite entre le mur et l'isolant, on définit une température intermédiaire, notée  $T_i$ , pour faciliter les calculs.

On s'intéresse au flux à travers cette paroi bi-couche :

$$\Phi(0) = \Phi(e_p) = \Phi(e_m + e_{iso})$$

Par continuité du flux et des températures, en  $x=e_m$ , c'est-à-dire pour  $T_i$ , on obtient :

$$k_m a_m S = k_{iso} a_{iso} S \quad (1)$$

L'expression de chaque pente est :

$$a_m = \frac{T_i - T_{ext}}{e_m} \quad (2)$$

et

$$a_{iso} = \frac{T_{inte} - T_i}{e_{iso}} \quad (3)$$

(2) et (3) dans (1) :

$$\frac{k_m}{e_m} (T_i - T_{ext}) = \frac{k_{iso}}{e_{iso}} (T_{inte} - T_i)$$

5 Démonstration plus détaillée en annexe

Le flux thermique étant le même partout dans la paroi, on peut choisir de calculer :

$$T_i - T_{ext} = \frac{T_{inte} - T_{ext}}{1 + \left(\frac{k_m}{e_m}\right) * \left(\frac{e_{iso}}{k_{iso}}\right)}$$

En remplaçant cette expression dans (2) et dans (3) on a :

$$a_m = \frac{T_{inte} - T_{ext}}{e_m + \frac{k_m e_{iso}}{k_{iso}}} \quad \text{et} \quad a_{iso} = \frac{T_{inte} - T_{ext}}{e_{iso} + \frac{k_{iso} e_m}{e_{iso} k_m}}$$

On a donc :

$$\Phi_m = \Phi_{iso} = \Phi_P = \frac{S k_m}{e_m + \frac{k_m e_{iso}}{k_{iso}}} (T_{inte} - T_{ext}) = \frac{S}{\frac{e_m}{k_m} + \frac{e_{iso}}{k_{iso}}} \Delta T$$

Par analogie à la résistance électrique, on peut exprimer les résistances thermiques de chaque matériau :

$$R_{(thm)} = \frac{1}{S} \frac{e_m}{k_m} \quad \text{et} \quad R_{(thiso)} = \frac{1}{S} \frac{e_{iso}}{k_{iso}}$$

On reconnaît ces expressions dans l'expression de  $\Phi_P$  ci dessus. Ainsi, on peut poser :

$$R_{(thP)} = R_{(thm)} + R_{(thiso)} = \frac{1}{S} \frac{e_m}{k_m} + \frac{1}{S} \frac{e_{iso}}{k_{iso}}$$

On obtient alors :

$$\Phi_P = \frac{\Delta T}{R_{(thP)}} \quad \text{où} \quad \frac{1}{R_{(thP)}} = \frac{S}{\frac{e_m}{k_m} + \frac{e_{iso}}{k_{iso}}}$$

Ceci démontre que dans le cas du régime stationnaire, l'isolation par l'intérieur ou par l'extérieur ne fait pas de différence. Le principe est de cumuler plusieurs épaisseurs peu importe l'ordre.

La résolution numérique est en adéquation avec le modèle analytique ci-dessus. En régime stationnaire, jusqu'à ce que l'équilibre soit atteint, la courbe tend vers une droite.

Étudions maintenant, le régime instationnaire, plus réaliste.

### 3.3. Étude en régime instationnaire

On considère maintenant que la paroi subit des fluctuations thermiques.

L'équation de la chaleur est de la forme :

$$\frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} \quad (1)$$

#### 3.3.1. Étude analytique

Pour résoudre l'équation, nous allons procéder à deux changements de variables successifs :

- 1<sup>er</sup> Changement de variable :

Soit  $\theta(x, t) = T(x, t) - T_m$ , avec  $T_m$  = température à l'extérieur de la paroi température à l'interface "mur-extérieur". On effectue un changement de variable:

Maintenant (1)  $\leftrightarrow$  
$$\frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial \theta(x, t)}{\partial t}$$

#### Conditions initiales :

On simule les fluctuations de température extérieure par une fonction sinusoïdale (adaptée au mouvement ondulatoire). Pour une question de cohérence entre C1 et C3, on choisit une fonction sinus plutôt qu'une fonction cosinus. D'où :

$$\theta(0, t) = A \sin(\omega_0 t) \quad (C1)$$

$$\theta(L, t) = (T_{inte} - T_m) \quad (C2)$$

$$\theta(x, 0) = \frac{(T_{inte} - T_m) \cdot x}{L} \quad (C3)$$

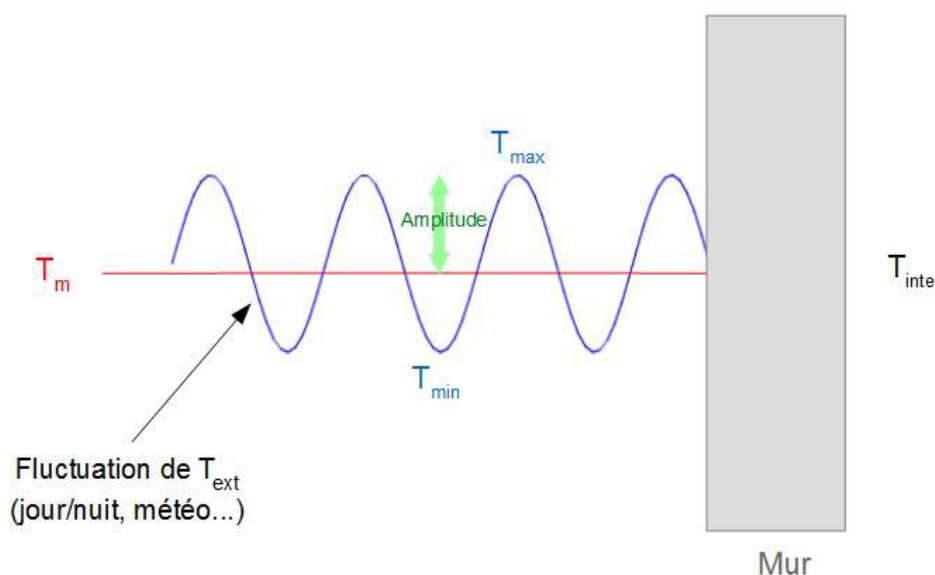


Schéma représentant les conditions en régime instationnaire

• 2<sup>e</sup> changement de variable :

Pour optimiser nos calculs permettant de résoudre l'équation différentielle, nous allons dans un premier temps séparer les variables de temps et d'espace, en notant :  $\theta(x,t) = X(x).Y(t)$

$$\frac{Y \partial^2 X}{\partial x^2} = \frac{1}{a} \frac{X \partial Y}{\partial t} = i\omega \quad \text{on fait intervenir } \omega \text{ pour avoir une solution ondulatoire.}$$

On obtient :

$$\theta(x,t) = (\alpha e^{(1+i)\sqrt{\frac{\omega}{2a}}x} - \beta e^{-(1+i)\sqrt{\frac{\omega}{2a}}x}) e^{i\omega t}$$

Cependant, on ne connaît pas  $\omega$ , et plusieurs valeurs peuvent correspondre à notre problème (cela est lié au fait que notre solution soit une fonction de type Fourier, plusieurs fréquences peuvent correspondre avec la solution). Ainsi, la solution générale sera une combinaison linéaire de toutes les solutions particulières en fonction des  $\omega_i$ , sachant que chaque  $\omega$  impose  $\alpha_i$  et  $\beta_i$ .

Donc l'équation générale s'écrit:

$$\theta(x,t) = \sum (\alpha_i e^{(1+i)\sqrt{\frac{\omega_i}{2a}}x} - \beta_i e^{-(1+i)\sqrt{\frac{\omega_i}{2a}}x}) e^{i\omega_i t}$$

Chaque  $D_i$  est lié à  $\omega_i$ , tel que: si  $\omega_i$  n'est pas solution  $\leftrightarrow D_i=0$ . (permet d'annuler le signal pour cette fréquence en lui attribuant une amplitude nulle).

$$\theta(x,t) = \sum D_i (e^{(1+i)\sqrt{\frac{\omega_i}{2a}}x} - E e^{-(1+i)\sqrt{\frac{\omega_i}{2a}}x}) e^{i\omega_i t}$$

$$\theta(x,t) = \sum_i (\alpha_i e^{\Phi_i(x)} \cos(\omega_i t + \Phi_i(x)) + \beta_i e^{-\Phi_i(x)} \cos(\omega_i t - \Phi_i(x)))$$

$$\text{avec } \Phi_i(x) = \sqrt{\frac{\omega_i}{2a}} x$$

Appliquons maintenant les conditions initiales:

$$\text{C1: } \theta(x,t) = \sum_i (\alpha_i e^{\Phi_i(0)} \cos(\omega_i t + \Phi_i(0)) + \beta_i e^{-\Phi_i(0)} \cos(\omega_i t - \Phi_i(0)))$$

$$\leftrightarrow \theta(0,t) = \sum_i (\alpha_i + \beta_i) \cos(\omega_i t) = A \sin(\omega_i t)$$

$$\leftrightarrow \alpha_i = \beta_i$$

$$\text{d'où } \theta(x, t) = \sum_i (\alpha_i 2 \sinh(\Phi_i(x)) + \beta_i) (\cos(\Phi_i(x)) \cos(\omega_i t) - \sin(\Phi_i(x)) \sin(\omega_i t)) ,$$

où  $\sinh$  représente le sinus hyperbolique.

$$\text{C2 : } \theta(L, t) = \sum_i (\alpha_i e^{\Phi_i(L)} \cos(\omega_i t + \Phi_i(L)) + \beta_i e^{-\Phi_i(L)} \cos(\omega_i t - \Phi_i(L))) = T_{inte} - T_m$$

$$\leftrightarrow \theta(L, t) = \sum_i (\alpha_i e^{\Phi_i(L)} \cos(\omega_i t + \Phi_i(L)) + \beta_i e^{-\Phi_i(L)} \cos(\omega_i t - \Phi_i(L))) = T_{inte} - T_m - \theta(0, t)$$

$$\leftrightarrow \theta(L, t) = \sum_i (\alpha_i e^{\Phi_i(L)} \cos(\omega_i t + \Phi_i(L)) + \beta_i e^{-\Phi_i(L)} \cos(\omega_i t - \Phi_i(L))) = T_{inte} - T_m - A \cos(\omega_0 t)$$

$$\text{C3 : } \theta(x, 0) = \sum_i (\alpha_i 2 \sinh(\Phi_i(x)) + \beta_i) \cos(\Phi_i(x))$$

On pourrait résoudre analytiquement cette équation mais cela serait ardu et ferait alors appel aux transformées de Fourier. Ceci n'étant pas l'objectif principal du projet, nous avons alors simplifier la résolution.

Pour ce faire, on peut considérer qu'après un certain temps, le signal est en régime permanent. On se place alors en régime asymptotique, ce qui permet de ne considérer qu'une seule fréquence d'oscillation mais également une seule amplitude.

On peut le faire, car après avoir pénétré dans le solide, le signal ondulatoire va se caler sur une seule fréquence, on retrouvera alors " un régime permanent ".

Cette hypothèse nous mène aux résultats suivant :

$$\omega_i = \omega_0 \quad \text{et} \quad \alpha_i = \alpha$$

Alors:

$$\theta(x, t) = \alpha 2 \sinh\left(\sqrt{\frac{\omega_0}{2a}} x\right) (\cos\left(\sqrt{\frac{\omega_0}{2a}} x\right) \cos(\omega_0 t) - \sin\left(\sqrt{\frac{\omega_0}{2a}} x\right) \sin(\omega_0 t)) \quad (\text{A})$$

Il est évident que la simplification effectuée précédemment apparaît comme grossière, cependant elle est uniquement utilisée dans le but de valider le modèle numérique que nous utiliserons par la suite.

Dans cette expression, le  $\alpha$  conditionne l'amplitude des oscillations  $\Delta T$  (variation de température).

Le but ici, c'est d'arriver à extraire l'amplitude des oscillations. Cela nous permettra, par la suite de pouvoir représenter une "enveloppe" (Amplitude MAX – Amplitude MIN) sur un graphique. On pourra alors par la suite, vérifier en comparant, que notre courbe obtenue par résolution numérique concorde bien avec la théorie (la courbe devra pour cela se situer entre les bornes de l'enveloppe) .

L'expression (A) peut s'exprimer de la manière suivante :

$$\theta(x, t) = A \cos(\Phi_x - \omega_0 t)$$

Ici A exprime l'amplitude des oscillations.

Par identification on a alors :

$$A = 2\alpha \sin_h\left(\sqrt{\frac{\omega_0}{2a}} x\right)$$

Afin de s'assurer de la conformité de notre approche numérique, Il est aussi intéressant de calculer la déperdition thermique dans le cas de ce même mur simple, et de la comparer à la valeur théorique.

On sait que  $\vec{\varphi} = -k \vec{grad}(T)$ . Dans notre cas, il est plus intéressant de calculer ce flux en  $x=0$ , afin de calculer la déperdition thermique entre l'intérieur de la maison et le mur.

Rappelons que nous avons admis :  $\theta(x, t) = A \cos(\Phi_x - \omega_0 t)$ .

Afin de calculer la déperdition thermique maximale, on peut calculer  $-k \vec{grad}(A)$ .

Après calcul on obtient :

$$\vec{grad}(A) = \left(\frac{\delta A}{\delta x}\right) * \vec{x} = 2\alpha * \left(\sqrt{\frac{\omega_0}{2a}}\right) * \cos_h\left(\sqrt{\frac{\omega_0}{2a}} x\right) * \vec{x}$$

### 3.3.2. Modélisation

Le modèle théorique est implacable, cependant il est grandement simplifié. Pour obtenir des réponses complètes il nous a fallu en revanche utiliser un modèle numérique qui nous permettrait de calculer des cas plus complexes. Ou du moins obtenir une réponse à l'aide d'un modèle numérique plus proche de la vie réelle.

Nous avons donc utilisé le logiciel Scilab pour modéliser un mur de briques simple, dont une extrémité était à la température de 20°C (température approximative pour l'intérieur d'une maison) et dont l'autre extrémité était soumise à une température oscillant entre 10 et -10°C selon des périodicités différentes.

Suite aux calculs théoriques (Linéarisation de l'équation de la chaleur), on en a déduit que la température T évoluait de la manière suivante<sup>6</sup> :

$$T(i+1, j) = T(i, j) + \frac{k \Delta t}{\rho C_p (\Delta x)^2} (T(i, j-1) - 2T(i, j) + T(i, j+1)) \quad \text{où} \quad A = \frac{k \Delta t}{\rho C_p (\Delta x)^2}$$

Sous forme matricielle cette formule donne :

$$T(i+1) = T(i) + A * M * T(i)$$

Avec M une matrice dont la diagonale est remplie de la valeur -2 et dont les diagonales en dessous et au dessus sont remplies de la valeur 1.

Or Scilab est un outil de calcul spécialisé pour le calcul matriciel. Nous avons donc travaillé notre programme sous forme de matrices et de vecteurs.

On a donc divisé l'épaisseur du mur en un vecteur et le temps de l'étude en un autre vecteur.

6 Démonstration en annexe

On a ensuite effectué une boucle sur le temps calculant à chaque instant, en chaque point, la température du mur à l'instant suivant. Une fois le modèle à une seule couche (le mur de briques seul) terminé. Nous avons travaillé sur le modèle à deux couches. (Le mur de briques et l'isolant).

La matrice A\*M correspond en quelque sorte à une représentation du mur (ou en tout cas des coefficients de calcul qui lui sont associés). Lors du calcul avec un isolant, la matrice

A\*M (précédemment de la forme :A\*  $\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$  par exemple pour un mur divisé en

trois points) devient une matrice dont l'un des cotés représente l'isolant et l'autre représente le mur.

$$\begin{array}{ccc|ccc|ccc|ccc} -2*B & 1*B & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1*B & -2*B & 1*B & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1*B & -2*B & 1*C & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1*B & -2*C & 1*C & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1*C & -2*C & 1*C & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1*C & -2*C & 1*C & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1*C & -2*C & 1*C & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1*C & -2*C & 1*C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1*C & -2*C & 1*C & 0 \end{array}$$

où le coefficient C correspond au mur et B à l'isolant si un tiers du mur était fait d'isolant à gauche.

On applique encore le même type de raisonnement. Seulement cette fois ci, pour pouvoir répondre à la question, on a calculé les pertes de flux à chaque instant à l'extrémité du mur.

$$\phi(t) = \frac{T(x=1,t) - T(x=2,t) * k_m}{\Delta x}$$

Ce calcul de flux est réitéré à chaque instant puis stocké dans un vecteur qu'on a nommé « flux ».

On a ensuite pu extraire la perte de flux maximale au cours du temps.

Cependant, on s'est rendu compte que la perte de flux maximale augmentait avec la périodicité. Nous avons donc récolté ces valeurs dans un tableau.

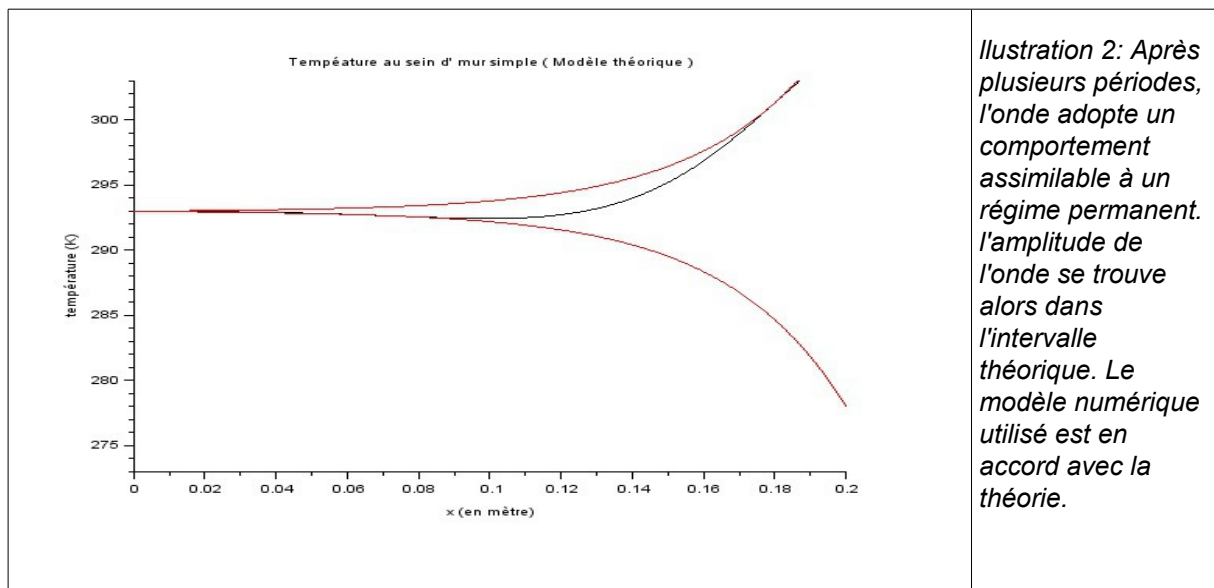
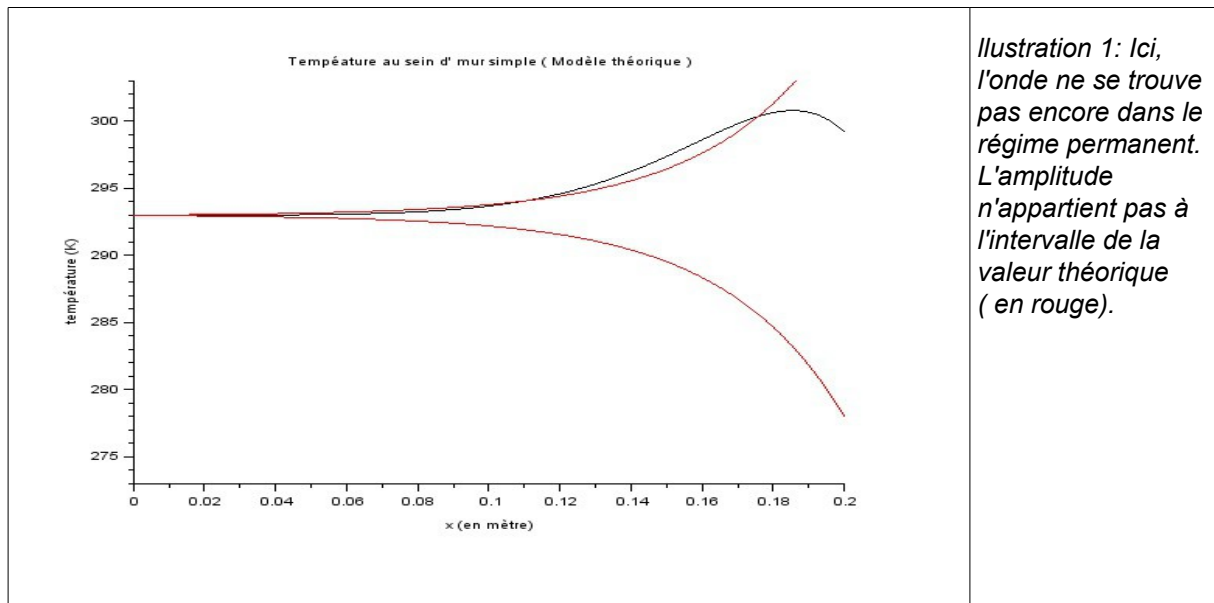
Comment les résultats analytiques peuvent nous permettre de valider nos résultats numériques ?

Étant donné que nous sommes capables d'exprimer l'amplitude du signal nous allons pouvoir comparer les résultats obtenus avec ceux de la partie numérique.

Nous avons alors inséré une nouvelle fonction "enveloppe" sur Scilab. Cette fonction calcule en chaque instant t, et chaque point de l'espace x l'amplitude maximale et minimale de la fonction T(x,t). Pour que la théorie soit validée, notre modèle numérique doit alors être compris entre la valeur minimale et la valeur maximale du modèle théorique. En ajoutant alors notre fonction issue de la partie numérique il nous a alors été possible de vérifier, que le modèle que nous utilisons était en accord avec la théorie.

Pour vérifier la théorie on se placera donc dans le cas d'un mur simple sans isolant. Le mur est d'une longueur de 20 cm et, est composé de brique (k=0.84).

Le programme Scilab qui nous a permis de d'obtenir ces résultats est fourni en annexe.  
Nos résultats peuvent se présenter sous la forme de graphique :



Finalement, quelque soit la fréquence utilisée, après un certain nombre de période, l'onde retrouve toujours un régime permanent et varie entre les valeurs maximale et minimale de l'amplitude.

Donc en  $x=0$  on a :

$$\vec{\varphi} = -k \vec{grad}(T) = -k * 2 * \alpha * \sqrt{\frac{\omega_0}{2}} a * \vec{x}$$

Pour mieux visualiser comment se représente le gradient, dans notre cas, c'est un vecteur qui est tangent à la pente de l'enveloppe (en  $x=0$ ).



Pour une période de 6 heures, une épaisseur de 20cm, sur un mur de brique on obtient :

$$\varphi_{théorique} = 18260 \text{ W} \quad \text{et} \quad \varphi_{numérique} = 18000 \text{ W}$$

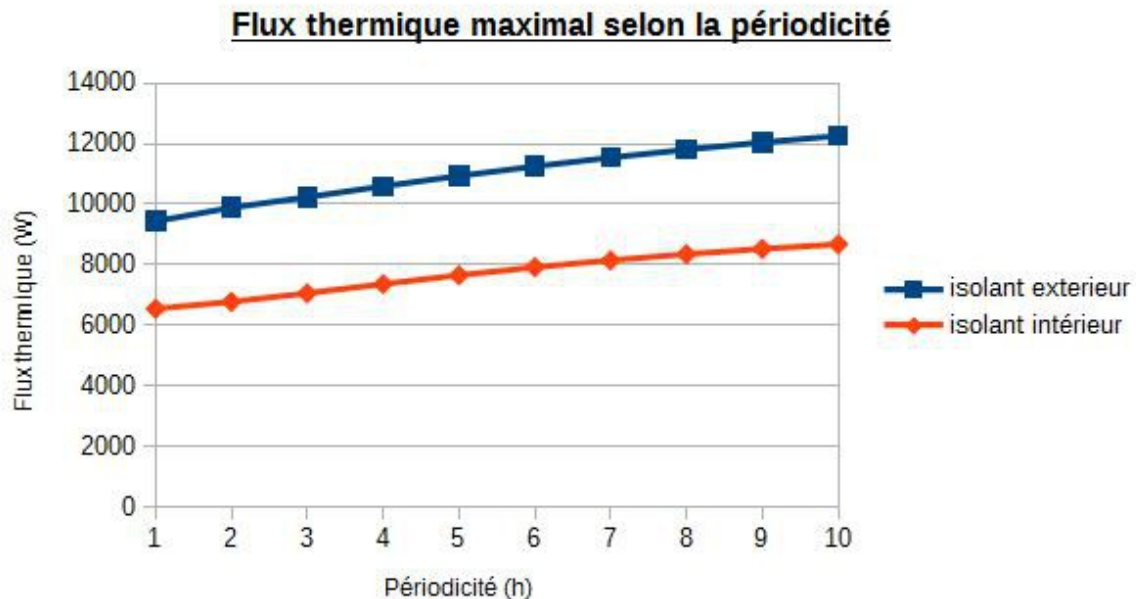
où :

- $k = 0,74 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$  ;
- $\omega_0 = 2.9 \cdot 10^{-4} \text{ rad} \cdot \text{sec}^{-1}$  ;
- $a = 6.67 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$  ;
- $\rho = 1500 \text{ W} \cdot \text{m}^{-3}$
- $\alpha = 10$  (pas d'unité)

Après calcul, on a un écart relatif de 1.4 % , notre modèle numérique s'avère être en accord avec la théorie.

Finalement nous avons construit un graphique représentant la perte de flux maximale en fonction de la périodicité de la variation de température.

Ce graphique est composé de deux courbes, une modélisant un isolant à l'intérieur (rouge) l'autre avec l'isolant à l'extérieur (bleu). Nos résultats sont présentés dans ce graphique.



Grâce à ces graphes nous pouvons maintenant apporter une réponse à la problématique de notre projet. En effet, quelque soit la période, pour un isolant placé à l'extérieur le flux thermique est plus élevé, ce qui signifie que la déperdition thermique est plus faible si l'on place l'isolant à l'intérieur de la maison.

## 4. CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

Nos recherches sur les transferts thermiques, plus précisément sur le flux thermique, nous ont permis de résoudre l'équation de la chaleur en régime stationnaire puis en régime instationnaire. Grâce aux outils numériques, nous avons pu résoudre le problème qui nous était posé : l'isolation par l'intérieur est plus efficace.

Si au premier abord notre sujet nous a beaucoup inspirés et attirés, nous nous sommes vite rendus compte de la complexité de sa résolution. En effet, aucun de nous n'avait alors de connaissances en échanges thermiques du bâtiment, et encore moins en isolation. De plus, nous ne nous connaissions pas au début du projet. Heureusement, nous avons réussi à mettre en place une bonne cohésion de groupe, qui nous a permis de persévérer malgré les difficultés rencontrées tout au long du projet. Nous nous sommes investis pleinement dans ce sujet concret qui peut nous concerner au quotidien. Cette expérience scientifique et humaine nous servira donc dans le futur.

Nous savons maintenant que l'isolation intérieure d'un mur est la plus efficace. Ainsi, d'autres perspectives s'ouvrent à nous. Certes l'isolation intérieure est plus efficace mais est-elle plus rentable ? Il faudrait s'intéresser à présent aux coûts d'une isolation intérieure plutôt qu'à l'extérieur pour pouvoir choisir la meilleure solution. De même, géographiquement les besoins ne sont pas les mêmes. Finalement, nous devons prendre en compte plusieurs paramètres qui ne peuvent pas nous permettre d'avoir une unique réponse au problème posé.

## 5. BIBLIOGRAPHIE

- Livre(s):

[1] Henri Cortès, Joseph Blot, "Transfert thermiques Application à l'habitat", *Ellipses*, 1999.

- Sites internet:

[2] [http://www.grasp.ulg.ac.be/nvdw/NVdw/Documents\\_files/thermo9.pdf](http://www.grasp.ulg.ac.be/nvdw/NVdw/Documents_files/thermo9.pdf)

(valide à la date du 07/06/16)

[3] <https://www.lama.univ-savoie.fr/~gisclon/cies.pdf>

(valide à la date du 07/06/16)

[4] <http://docinsa.insa-lyon.fr/polycop/download.php?id=160504&id2=3>

(valide à la date du 07/06/16)

[5] [https://fr.wikipedia.org/wiki/Conductivit%C3%A9\\_thermique](https://fr.wikipedia.org/wiki/Conductivit%C3%A9_thermique)

(valide à la date du 07/06/16)

- Illustrations:

[6] <http://www.guidebeton.com/media/isolation-thermique.jpg>

[7] [https://fr.wikipedia.org/wiki/Conduction\\_thermique#/media/File:Mur\\_analogie\\_elec.png](https://fr.wikipedia.org/wiki/Conduction_thermique#/media/File:Mur_analogie_elec.png)

## 6. ANNEXES (NON OBLIGATOIRE – EXEMPLES CI-DESSOUS)

### 6.1. Démonstrations

#### 1) Équation de la chaleur<sup>7</sup>

On considère un matériau de masse volumique  $\rho$ , de volume  $\tau$  délimité par une surface  $S$ , de chaleur massique  $C_p$ , libérant une puissance  $p$  par unité de volume. Soient  $\Phi_e$  le flux émis par la source,  $\Phi_s$  le flux stocké par le matériaux,  $\Phi_r$  le flux sortant et  $n_r$  le vecteur normal à la surface orienté vers l'extérieur :

$$\Phi_e = \Phi_s + \Phi_r = \int \int \int_{\tau} p d\tau$$

En considérant l'enthalpie  $H$ , une température  $T$  et le temps  $t$ , on sait que :

$$\Phi_s = \frac{dH}{dt} = \frac{dH}{dT} \frac{dT}{dt} = C \frac{dT}{dt} \text{ où } C = \frac{dH}{dT} = mC_p$$

D'où le flux  $d\Phi_s$  emmagasiné par un volume élémentaire  $d\tau$ , de masse  $dm = \rho d\tau$  et de capacité  $C_p dm = \rho C_p d\tau$  :

$$d\Phi_s = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} d\tau$$

Donc le flux total stocké dans le volume  $\tau$  est :

$$\Phi_s = \int \int \int_{\tau} \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} d\tau$$

Et les pertes sont représentées par :

$$\Phi_r = \int \int_S \vec{\varphi} \cdot \vec{n}_r dS$$

D'après Green :

$$\int \int_S \vec{\varphi} \cdot \vec{n}_r dS = \int \int \int_{\tau} (\vec{\nabla} \cdot \vec{\varphi}) d\tau$$

On a alors :

$$\Phi_e = \Phi_s + \Phi_r$$

$$\Phi_r = \Phi_e - \Phi_s$$

7 Démonstration issue du livre « Transfert thermiques Application à l'habitat »

$$\int \int_S \varphi \cdot \vec{vec} n_r dS = \int \int \int_{\tau} p d\tau - \int \int \int_{\tau} \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} d\tau$$

$$\int \int \int_{\tau} (\nabla \cdot \vec{\varphi}) d\tau = \int \int \int_{\tau} p d\tau - \int \int \int_{\tau} \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} d\tau$$

$$\nabla \cdot \vec{\varphi} = p - \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t}$$

Sachant que  $\vec{\varphi} = -\lambda \vec{grad}(T)$ , on aboutit à :

$$-\lambda \cdot \nabla \cdot (\vec{grad} T) = p - \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t}$$

En y introduisant maintenant le Laplacien de température  $\Delta T$ , on obtient la dite équation de la chaleur :

$$\lambda \Delta T + p = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t}$$

où  $\frac{\partial T}{\partial t}$  représente la variation de température dans le temps ;

$\frac{\lambda}{\rho C_p}$  représente la diffusivité thermique propre au matériau ( $m^2 \cdot s^{-1}$ ) avec  $\lambda$  la conductivité thermique ( $W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$ ),  $\rho$  la masse volumique ( $kg \cdot m^{-3}$ ) et  $C_p$  la capacité thermique ( $J \cdot K^{-1}$ ) ;

$p$  la production volumique de chaleur ( $W \cdot m^{-3}$ ) ;

$\Delta T$  représente le transfert thermique.

## 2) Stationnaire bi-couche :

On s'intéresse au flux à travers cette paroi bi-couche :

$$\Phi(0) = \Phi(e_p) = \Phi(e_m + e_{iso})$$

Par continuité du flux et des température, en  $x=e_m$ , c'est-à-dire pour  $T_i$ , on obtient :

$$k_m a_m S = k_{iso} a_{iso} S \quad (1)$$

L'expression de chaque pente est :

$$a_m = \frac{T_i - T_{ext}}{e_m} \quad (2) \quad \text{et} \quad a_{iso} = \frac{T_{inte} - T_i}{e_{iso}} \quad (3)$$

(2) et (3) dans (1) :

$$\frac{k_m}{e_m} (T_i - T_{ext}) = \frac{k_{iso}}{e_{iso}} (T_{inte} - T_i)$$

$$\leftrightarrow T_i \left( \frac{k_m}{e_m} + \frac{k_{iso}}{e_{iso}} \right) = \frac{k_{iso}}{e_{iso}} T_{inte} + \frac{k_m}{e_m} T_{ext}$$

$$\leftrightarrow T_i = \frac{\frac{k_{iso}}{e_{iso}} T_{inte} + \frac{k_m}{e_m} T_{ext}}{\frac{k_m}{e_m} + \frac{k_{iso}}{e_{iso}}}$$

Le flux thermique étant le même partout dans la paroi, on peut choisir de calculer :

$$T_i - T_{ext} = \frac{T_{inte} - T_{ext}}{1 + \left(\frac{k_m}{e_m}\right) * \left(\frac{e_{iso}}{k_{iso}}\right)}$$

$$T_i - T_{ext} = \frac{\frac{k_{iso}}{e_{iso}} (T_{inte} - T_{ext})}{\frac{k_{iso}}{e_{iso}} \left(1 + \frac{k_m}{e_m} + \frac{e_{iso}}{k_{iso}}\right)} = \frac{T_{inte} - T_{ext}}{1 + \left(\frac{k_m}{e_m}\right) * \left(\frac{e_{iso}}{k_{iso}}\right)}$$

En remplaçant cette expression dans (2) on a :

$$a_m = \frac{T_i - T_{ext}}{e_m} = \frac{1}{e_m} \frac{T_{inte} - T_{ext}}{1 + \frac{k_m e_{iso}}{e_m k_{iso}}}$$

$$a_m = \frac{T_{inte} - T_{ext}}{e_m + \frac{k_m e_{iso}}{k_{iso}}}$$

Avec le même raisonnement, on trouve :

$$a_{iso} = \frac{T_{inte} - T_{ext}}{e_{iso} + \frac{k_{iso} e_m}{e_{iso} k_m}}$$

On a donc :

$$\Phi_m = \Phi_{iso} = \Phi_P = \frac{S k_m}{e_m + \frac{k_m e_{iso}}{k_{iso}}} (T_{inte} - T_{ext}) = \frac{S}{\frac{e_m}{k_m} + \frac{e_{iso}}{k_{iso}}} \Delta T$$

Par analogie électrique, on peut exprimer :

$$R_{(thm)} = \frac{1}{S} \frac{e_m}{k_m} \quad \text{et} \quad R_{(thiso)} = \frac{1}{S} \frac{e_{iso}}{k_{iso}}$$

On reconnaît ces expressions dans l'expression de  $\Phi_P$  ci dessus. Ainsi, on peut poser :

$$R_{(thP)} = R_{(thm)} + R_{(thiso)} = \frac{1}{S} \frac{e_m}{k_m} + \frac{1}{S} \frac{e_{iso}}{k_{iso}}$$

On obtient alors :

$$\Phi_P = \frac{\Delta T}{R_{(thP)}} \quad \text{où} \quad \frac{1}{R_{(thP)}} = \frac{S}{\frac{e_m}{k_m} + \frac{e_{iso}}{k_{iso}}}$$

## 6.2. Obtention des matrices par linéarisation de l'équation de la chaleur

On part de l'équation de la chaleur :

$$k \Delta T = \rho C_P \frac{\partial T}{\partial t} \Leftrightarrow k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \rho C_P \frac{\partial T}{\partial t} \Leftrightarrow \frac{\partial^2 T(t, x)}{\partial t} = \frac{k}{\rho C_P} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (1)$$

Il est nécessaire de fixer les conditions aux limites liées au temps et à l'espace.

A l'état initial :

- $T(t=0, \forall x) = T_{inte}$  temporelle
- $T(\forall t, x=0) = T_{inte}$  spatiale
- $T(\forall t, x=L) = T_{ext}$  spatiale

On a approximé (1) pour résoudre numériquement  $T(i\Delta t, j\Delta x)$  on crée des vecteurs temps et espace.

On peut maintenant résoudre :

- dans le temps :  $\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{T(i+1, j) - T(i, j)}{\Delta t}$
- dans l'espace :  $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(i, j) = \frac{T(i+1, j) - 2T(i, j) + T(i, j-1))}{(\Delta x)^2}$

Donc  $T(i+1, j) = T(i, j) + \frac{k\Delta t}{\rho C_P (\Delta x)^2} (T(i, j-1) - 2T(i, j) + T(i, j+1))$

où  $A = \frac{k\Delta t}{\rho C_P (\Delta x)^2}$  comporte les caractéristiques propre au matériau.

On crée une matrice de la forme :

$$\begin{bmatrix} T(i+1,0) \\ \vdots \\ T(i+1,j) \\ \vdots \\ T(i+1,L) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T(i,0) \\ \vdots \\ T(i,j) \\ \vdots \\ T(i,L) \end{bmatrix} + A * \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} T(i,0) \\ \vdots \\ T(i,j) \\ \vdots \\ T(i,L) \end{bmatrix}$$

### 6.3. Programmes informatiques réalisés

Programme de modélisation sur Scilab en régime instationnaire pour une paroi un matériau :

```

Tint=20+273;
Text=0+273;
nbptstime=50000;
nbptsspace=100;
deltaaffichage=100;
k=0.84; //conductivité thermique W.m^-1.K^-1
rho=1500; //masse volumique en Kg.m^-3
c=840; //capacité thermique en J.KG^-1.K^-1
L=0.2; //épaisseur du mur en m
Tps=10*3600; //temps en secondes
time=linspace(0,Tps,nbptstime);
space=linspace(0,L,nbptsspace);
deltt=Tps/(nbptstime-1);
deltx=L/(nbptsspace-1);
A=(k*deltt)/(rho*c*deltx^2);
T=ones(nbptsspace,1)*Tint;

M=-2*eye(nbptsspace,nbptsspace)+diag(ones(1,nbptsspace-1),1)+
diag(ones(1,nbptsspace-1),1);
t=0;
for i=1:1:nbptstime
    t=t+deltt;
    T=T+A*M*T;
    T(1)=Tint;

```



```
T($)=Text+10*sin(2*pi/(10*60)*t);
if modulo(i,deltaaffichage)==0 then
    clf
    plot2d(space,T)
end
end
```

Programme de modélisation sur Scilab en régime instationnaire pour une paroi deux matériaux :

```
clear
Tint=20+273;
Text=0+273;
Periodicite=60*60*10; //Période des oscillations thermiques à
l'extérieur en secondes
Tps=10*Periodicite; //durée de la modélisation
nbptsspace=50; //mettez un multiple de 100 s'il vous plaît.
km=0.84; //conductivité thermique W.m^-1.K^-1 (pour le mur)
kiso=0.04; //(pour l'isolant)
rhoM=1500; //masse volumique en Kg.m^-3 (pour le mur)
rhoiso=4000; //(pour l'isolant)
cm=840; //capacité thermique en J.KG^-1.K^-1 (pour le mur)
ciso=25; //(pour l'isolant)
L=0.2; //épaisseur de la paroi
ratiomur=0.6; //pourcentage de l'épaisseur de la paroi (compris
entre 0 et 1)
Nbimages=100; //nombre d'images que l'on veut afficher

deltaaffichage=int(Tps/Nbimages); //calcul du temps entre chaque
image
deltat=Periodicite/3000; //calcul du temps entre chaque calcul
time=[0:deltat:Tps]; //vecteur représentant le temps
nbptstime=size(time,'*'); // nombre de points du vecteur time
space=linspace(0,L,nbptsspace); //vecteur représentant l'espace à
travers le mur
deltx=L/(nbptsspace-1); //distance entre chaque point de calcul du
mur
```

```

Am=(km*deltat)/(rho*cm*deltx^2); // coefficient principal utile
dans le calcul pour le mur

Aiso=(kiso*deltat)/(rhoiso*ciso*deltx^2); //coefficient          pour
l'isolant

T=ones(nbptsspace,1)*Tint; // on initialise la température du mur à
celle de l'intérieur sur toute la longueur du mur

nbptsmur=int(nbptsspace*ratiomur); //nombre de points de calcul dans
le mur

M1=Am*(-2*eye(nbptsmur,nbptsmur)+diag(ones(1,nbptsmur-1),1)
+diag(ones(1,nbptsmur-1),1)); //première partie de calcul de la
matrice M

M2=zeros(nbptsmur,nbptsspace-nbptsmur); //deuxième partie
M2(1,nbptsspace-nbptsmur)=Aiso; //initialisation d'un point de M2
M3=zeros(nbptsspace-nbptsmur,nbptsmur); //troisième partie
M3(nbptsspace-nbptsmur,1)=Am; //initialisation d'un point de M3
M4=Aiso*(-2*eye(nbptsspace-nbptsmur,nbptsspace-nbptsmur)
+diag(ones(1,nbptsspace-nbptsmur-1),-1)+diag(ones(1,nbptsspace-
nbptsmur-1),1)); //quatrième partie
M=[M4,M3;M2,M1]; //création de M par concaténation

t=0;
flux=[];
for i=1:1:nbptstime //on boucle sur chaque point du temps
    t=t+deltat; //le temps avance de delta t à chaque itération de
la boucle

    T=T+M*T; //calcul principal de la température dans le mur. On
calcule la température dans le mur grâce à la température précédente

    T(1)=Tint; //la température du coté de la maison est constante et
égale à Tint

    T($)=Text+10*sin(2*pi/Periodicite*t); //la température du coté
lu dehors est une sinusoïde imposée de périodicité etc d'amplitude
variable

    T(nbptsspace-nbptsmur)=(kiso*T(nbptsspace-
nbptsmur+2)+km*T(nbptsspace-nbptsmur-1))/(kiso+km); //on impose
certaines conditions au niveau de la coupure mur/isolant

    T(nbptsspace-nbptsmur+1)=T(nbptsspace-nbptsmur); //
essentiellement des continuités de flux et température

    fluxt=(cm*(T(1)-T(2)))/deltx;
    flux=[flux fluxt];

    if modulo(i,deltaaffichage)==0 then //on affiche la courbe qu'à
certains moments pour éviter de surcharger graphiquement

        clf

        plot2d(space,T,-1,rect=[0,260,L,300]) //création de la
courbe

```

```
end  
end  
scf()  
plot2d(time, flux)  
maxflux=max(flux)  
maxflux
```

## 6.4. Journal de bord

### séance 1

- ✓ Découverte du groupe, du sujet et des consignes du projet P6: un rapport à rédiger et une soutenance (11 semaines de recherches, 1 semaine de vérification du rapport, 1 semaine de préparation à la soutenance).
- ✓ Nous avons exposé chacun notre façon de voir le problème posé: "Sous l'effet des variations de la température extérieure (jour/nuit), quelle configuration permet le moins de perte de chaleur?".
- ✓ Le professeur nous a aiguillés sur la réflexion à suivre et les points cruciaux de nos recherches: conduction, flux, densité de flux, équation de la chaleur (en 2D et en stationnaire puis en dynamique), analogie au modèle électrique, modélisation grâce à Scilab, grandeurs utiles à la modélisation dont les conductivités thermiques par matériaux). La piste d'une expérimentation à base de maquette a été évoquée. La question d'une partie historique dans le rapport a été posée. Début des recherches.

### séance 2

- ✓ Bilan du début de séance: expérimentation par maquette abandonnée, initiation aux subtilités de Scilab, étude de cas avec applications numériques, bilan de la compréhension de l'analogie électrique dans le cas stationnaire.
- ✓ Démonstration de l'équation de la chaleur par le professeur à partir de la loi de Fourier. Mise en application dans le cas d'un mur avec un isolant (avec analogie de l'électricité). Raisonnement de la démonstration à retrouver pour la prochaine séance.
- ✓ Les applications numériques dans le cas du mur avec isolation intérieure et du mur avec isolation extérieure nous montrent qu'en régime stationnaire la déperdition est la même. Résultats à exploiter avec plus de cas par la suite.

### séance 3

- ✓ Bilan du début de séance: stationnaire presque fini, début de recherche sur l'instationnaire.

- ✓ Fin de la démonstration pour le stationnaire qui prouve que l'isolation par l'intérieur ou par l'extérieur ne fait pas de différence dans le cas de températures intérieures et extérieures fixes. Le principe est de cumuler plusieurs épaisseurs peu importe l'ordre.
- ✓ Test numériques en faisant varier les paramètres suivants un par un (et en fixant les autres): épaisseur du mur, épaisseur de l'isolation, matériau du mur, matériau de l'isolant, température intérieure, température extérieure, surface du mur.
- ✓ Modélisation de fonction simple sur Scilab.
- ✓ Les recherches sur le régime instationnaire nous indiquent une équation non linéaire à résoudre. Une résolution "à la main" et une avec Scilab sont à prévoir.
- ✓ Mise en forme de la démonstration du cas stationnaire à faire pour la prochaine séance.

#### **séance 4**

- ✓ Mise en page de la démo pour le stationnaire: mise en ordre avec commentaires et formules sous Libreoffice.
- ✓ Suite des recherches sur l'instationnaire mais nous rencontrons des difficultés face aux nombreuses formules.
- ✓ Recherche documentaire à la BU pour compléter les tutoriels de Scilab.
- ✓ Empreint du livre "Transferts thermiques, Application à l'habitat, Étude par la méthode nodale" pour compléter qualitativement la démonstration pour le cas stationnaire.

#### **séance 5**

- ✓ Cours sur l'in-stationnaire: comment résoudre analytiquement et numériquement l'équation de la chaleur. Analytiquement, il faut approximer les termes contenant une dérivée partielle. Numériquement, il faut mettre l'équation sous forme de vecteurs et de matrices sous Scilab pour que la matrice finale représente le mur. Le but étant de déterminer la déperdition en chaque point du mur selon l'épaisseur à laquelle se trouve ce point d'étude, en fixant la température intérieure et en faisant varier la température extérieure suivant une sinusoïde.
- ✓ Mise en forme du raisonnement d'approximation pour la résolution analytique.
- ✓ Suite de la mise en page de la démo du stationnaire avec l'aide du livre.

#### **séance 6**

- ✓ Fin de la mise en forme du raisonnement d'approximation pour la résolution analytique en régime instationnaire.
- ✓ Vérification de la démonstration du stationnaire par le professeur qui donne suite à l'établissement du plan du rapport du projet.
- ✓ Réalisation du programme pour la résolution numérique pour le régime stationnaire abouti: tracé des courbes de la température en fonction de l'épaisseur du mur. On

constate qu'au cours du temps, la courbe tend à être une droite quand l'équilibre est atteint. Ce qui est cohérent avec le modèle théorique en régime stationnaire.

- ✓ Suite des recherches pour la résolution analytique du régime instationnaire et éclaircissement de certains points avec le professeur.

### **séance 7**

- ✓ Début de la rédaction de la première partie : notion de flux et début de la démonstration de l'équation de la chaleur. Rangement des éléments de la "démonstration du stationnaire" dans les nouvelles parties du plan.
- ✓ Suite des recherches pour la résolution analytique du régime instationnaire.

### **séance 8**

- ✓ Création du programme de modélisation numérique pour le régime instationnaire avec deux matériaux (paroi=mur+isolant): création de 2 matrices sur la diagonale et de 2 matrices complémentaires.
- ✓ Résolution mathématique en instationnaire : suite de la tentative de résolution, équations différentielles, avec l'aide du professeur.
- ✓ Début de la rédaction de la résolution analytique.

### **séance 9**

- ✓ Suite du programme de modélisation numérique pour le régime in-stationnaire avec 2 matériaux (paroi=mur+isolant): simplification du programme et résolution de quelques problèmes (taille de la matrice notamment) mais problème de continuité.
- ✓ Explication de la méthode de résolution par le professeur. Deux équations différentielles: une spatiale selon  $x$  et une temporelle selon  $t$ , donc deux solutions générales qu'il est possible de résoudre avec les transformées de Fourier mais cela s'avère trop compliqué. On se contente du cas particulier qui nous intéresse quand on tend vers un régime permanent. On se sert alors des conditions limites pour trouver la solution particulière: ici, l'amplitude de la sinusoïde initiale.
- ✓ Suite de la rédaction de la méthode de résolution analytique en régime instationnaire.

### **séance 10**

- ✓ Suite du programme de modélisation numérique pour le régime instationnaire avec deux matériaux (paroi=mur+isolant): solution pour le problème de continuité en posant une valeur de température intermédiaire à chaque image.
- ✓ Suite de la rédaction de la méthode de résolution analytique en régime instationnaire.

- ✓ Suite de la résolution mathématique pour pouvoir comparer le modèle théorique et le modèle numérique avec un matériau pour la paroi.

### **séance 11**

- ✓ Finalisation de la rédaction de la démonstration du stationnaire avec définition des notions clés, paroi mono-couche et paroi bi-couche.
- ✓ Début de la rédaction du rapport avec entre autres introduction et rappel des objectifs.
- ✓ Programme avec courbes théoriques et courbes du modèle numérique: la courbe du modèle numérique est conforme aux courbes du modèle théorique après quelques oscillations: le modèle numérique est validé, on peut l'utiliser pour une paroi bi-couche (modèle qu'on ne sait pas résoudre analytiquement).
- ✓ Cas de la paroi bi-couche à finir pour la séance suivante en étudiant les variations du flux en fonction du nombre d'oscillations pour voir si la fréquence des oscillations influence le choix de l'isolation (intérieure ou extérieure).

### **séance 12**

- ✓ Correction du rapport par le professeur : partie poser le problème, stationnaire et insationnaire à reprendre pour que le raisonnement soit plus logique, pour que les hypothèses communes aux deux régimes soient posées dès le départ et pour que les grandes démonstrations soient en annexes.
- ✓ Suite de la résolution numérique pour avoir la réponse au problème: tracer des courbes de flux pour comparer le flux avec isolation à l'intérieur et celui avec isolation à l'extérieur. Interprétations à faire.
- ✓ Bibliographie et notes de bas de page pour les sources à faire.