

## Amélioration de la machine de jet



**Etudiants :**

Pierre Bénéz

Laura BERTRAND

Maialen Carricart

Zifeng Fang

Tianwei Lan

**Enseignant-responsable du projet :**

Didier Vuillamy



Date de remise du rapport : **13/06/2016**

Référence du projet : **STPI/P6/2016 – 26**

Intitulé du projet : **Amélioration de la machine de jet**

Type de projet : **expérimental, simulation**

Objectifs du projet (10 lignes maxi) :

**Améliorer la machine de jet de l'an dernier en imaginant un autre mécanisme pour obtenir une plus grande portée de jet.**

Mots-clefs du projet (4 maxi) : **Trébuchet, machine, mouvement**

Si existant, n° cahier de laboratoire associé : **xxx**

## TABLE DES MATIERES

1. Introduction .....	5
2. Méthodologie / Organisation du travail .....	6
3. Travail réalisé et résultats .....	7
3.1. Histoire des machines de jet .....	7
3.2. Présentation des différents modèles .....	10
3.3. Partie théorique.....	12
3.3.1. Calculs théoriques.....	12
3.3.2. Suite des calculs sur Excel avec la méthode Runge Kutta .....	16
3.4. Partie expérimentale .....	21
3.4.1. Explication de la phase de construction de la machine.....	21
3.4.2. Explication de la phase expérimentale et présentation des résultats.....	24
3.4.3. Explication des résultats et comparaison entre résultats théoriques et expérimentaux .....	26
4. Conclusions et perspectives.....	29
5. ANNEXE : Composition de la machine.....	31
6. Bibliographie .....	32



## 1. INTRODUCTION

Au début de notre quatrième semestre à l'INSA nous avons choisi un sujet pour notre projet P6 intitulé amélioration de la machine de jet. La machine de jet est une machine inspirée du grand trébuchet du Moyen Age permettant de lancer des projectiles à une certaine distance. L'objectif était donc de reprendre la machine de l'année dernière et de penser à des changements pour obtenir un meilleur rendement. En effet, le système pensé l'année dernière était prometteur mais a connu des problèmes lors de la réalisation ne permettant pas d'obtenir le rendement prévu théoriquement. Initialement la machine de l'année dernière prévoyait qu'une barre roulerait sans glisser sur une roue lui permettant ainsi de s'allonger durant le lancer pour gagner de la portée de lancer. Mais en réalité la barre glissait et donc la barre ne s'allongeait pas correctement et ne lançait pas le projectile de la manière voulue. Nous nous sommes donc appuyés sur le concept mais nous avons modifié la machine pour éviter ces problèmes. Après une longue phase de réflexion et de conception de la machine nous avons finalement arrêté notre choix sur un modèle tout aussi prometteur que celui de l'année dernière.

Nous tenons à remercier M. Vuillamy pour l'aide précieuse qu'il nous a donné et pour son implication sans laquelle nous n'aurions pas réussi à réaliser ce projet.

Dans ce rapport nous allons tout d'abord faire une légère présentation de l'histoire des différentes machines de jet qui ont existé puis nous allons exposer les différents modèles auxquels nous avons pensé ainsi que notre choix final. Ensuite nous expliquerons les calculs théoriques et le programme qui nous ont donné les prévisions et les données théoriques sur nos lancers. Enfin, nous montrerons comment nous avons construit notre machine ainsi que les résultats expérimentaux que nous avons obtenus et nous expliquerons tout le déroulé de ces tests.

## 2. METHODOLOGIE / ORGANISATION DU TRAVAIL

Concernant l'organisation du travail, nous avons tout d'abord tous participé à la conception de notre machine. Nous avons tous réfléchi aux différentes caractéristiques que nous pourrions donner à notre modèle pour obtenir la meilleure portée de lancer possible. Nous nous sommes ensuite tous intéressés aux débuts des calculs puis nous nous sommes enfin tous consacrés au début de la construction de notre machine.

Nous nous sommes ensuite répartis les tâches entre nous.

**Pierre** a continué les calculs théoriques et a aidé Maialen concernant les calculs sur Excel. Concernant le rapport, il s'est chargé de décrire et expliquer les résultats expérimentaux obtenus lors des différents tests sur notre machine de jet et les a comparés avec les résultats théoriques.

**Maialen** s'est occupée des calculs sur Excel ainsi que de la rédaction de la partie qui leur est consacrée. Elle a également rédigé la partie historique de la machine de jet.

**Laura** s'est chargée de la fin de la construction de notre machine et a rédigé la partie expliquant les étapes de cette dernière. Elle a également rédigé la partie calculs théoriques.

**Tianwei** a participé à la fin de la construction de la machine et s'est occupé des schémas des différents modèles envisagés. Il s'est également chargé de la préparation de la présentation orale.

**Zifeng** a également contribué à la fin de la construction de la machine et a rédigé la partie présentant les différents modèles. Il a également participé à la préparation de la présentation orale.

### 3. TRAVAIL REALISE ET RESULTATS

#### 3.1. Histoire des machines de jet

Les machines de jet existent depuis l'Antiquité. Elles étaient utilisées pendant les guerres mais surtout lors de sièges. Nous pouvons distinguer deux catégories de machines de jet, celles à contrepoids et celles avec un système de jet s'apparentant aux arcs. La plus connue des machines à arc est la baliste qui est en fait une sorte de grande arbalète montée sur un socle lançant des lances ou des petits projectiles. Nous ne pouvons évidemment pas parler de toutes les machines ayant existé donc nous allons nous concentrer sur la catégorie de notre machine c'est-à-dire les catapultes à contrepoids.

Ces catapultes sont apparues au Moyen-âge et étaient utilisées pour différentes raisons. En effet, il y avait des machines utilisées plutôt pour l'attaque et d'autres plutôt pour la défense. De plus, le nombre de personnes nécessaires pour les utiliser différait suivant la taille de la machine. Nous en citerons 5 ici.

La **Pierrière** est la machine la plus petite et la plus facile à utiliser. Elle était utilisable par les femmes et les enfants pas entraînés car il ne fallait pas une force particulière pour la déclencher. Par contre elle n'était utilisée qu'à but défensif car la portée maximum des projectiles était de 60m et le poids de ces derniers n'excédait pas les 15 kg. C'est la machine la moins puissante mais la plus ancienne existante dans cette catégorie. Le fonctionnement est très simple, il suffisait de placer le projectile au bout de la fronde et de tirer, à l'aide de cordes, sur la deuxième partie de la verge pour propulser le boulet. Avec une équipe entraînée, ils arrivaient à atteindre la cadence d'un tir par minute.

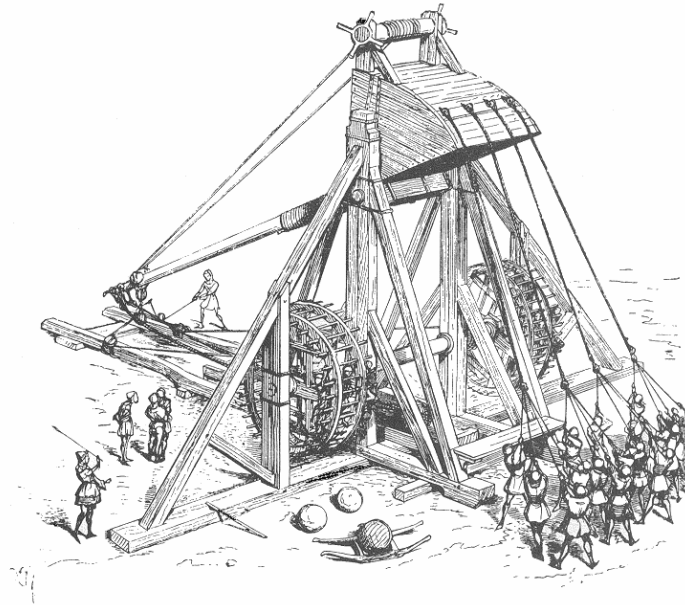


La **Bricole** est souvent confondue avec la Pierrière car le système de projection est exactement le même. En effet, la seule différence notable entre les deux machines est l'ajout d'un contrepoids. Cet ajout permet de faciliter le tir et nécessite moins de force pour faire balancer la verge. Comme pour la Pierrière le projectile est lâché lorsque la verge atteint l'axe vertical et que le contrepoids se heurte au socle. La taille de cette machine est légèrement plus grande que la Pierrière et donc les



masses pouvant être projetées sont plus lourdes. Elles varient entre 10 et 30kg pour une portée de tir jusqu'à 80m. Cette machine était aussi utilisée dans un but défensif car du haut des remparts il était plus facile de toucher des gens avec une si petite portée. La cadence était la même que pour la Pierrière d'un tir par minute mais il fallait plus de monde pour la déclencher.

Le **Mangonneau** est une machine beaucoup plus connue qui servait à attaquer des murailles ou des forts. Du fait de sa taille imposante et du poids du contrepoids, elle pouvait lancer des projectiles de 100kg à plus de 150m. Le fonctionnement est aussi différent des deux machines précédentes. Le contrepoids pesait quelques tonnes et était fixé sur la verge. Si la précision était plus importante que les machines existantes alors, ramener le contrepoids prenait beaucoup de temps et nécessitait l'utilisation d'un treuil enchaîné à de grandes roues. Et c'est avec la force des hommes que les roues tournaient. Il fallait compter deux tirs en une heure avec cette machine. De plus, l'inconvénient de cette machine était qu'avec la masse du contrepoids le socle supportait trop de vibrations à chaque lancer et les à-coups déplaçaient la masse.



Le **trébuchet** (ou grand trébuchet) est la machine référence en termes de machines de jet du Moyen-âge. La précision et la portée du trébuchet étaient plus grandes que le mangonneau notamment grâce au contrepoids articulé dont il disposait. La masse de son contrepoids variait entre 10 et 18 tonnes et celle des projectiles de 80 à 125kg. La portée de cette machine dépassait les 220m

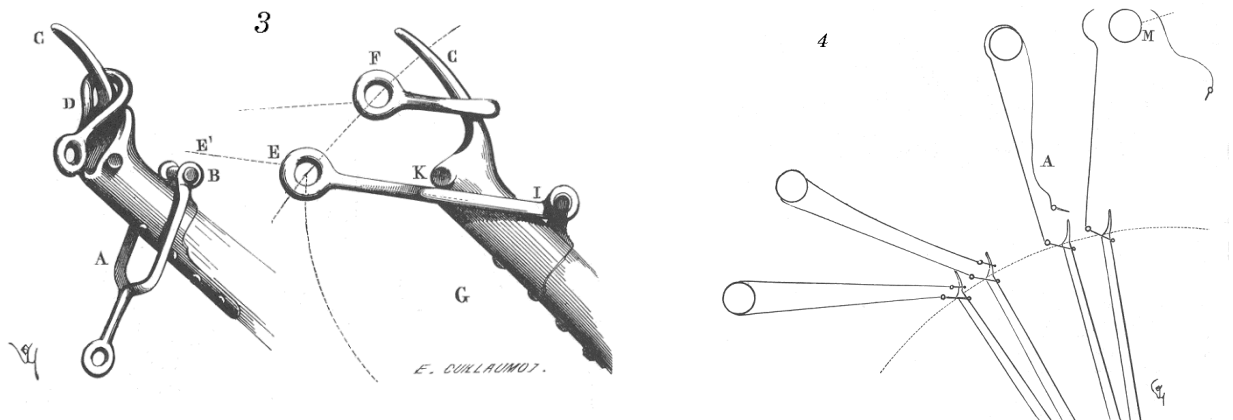


ce qui était très pratique pour détruire des murs ou pour passer au-dessus des fortifications. Il fallait néanmoins remonter le contrepoids et au vu de sa masse cela mettait autant de temps que le mangonneau, on ne pouvait donc tirer que deux fois en une heure. L'avantage de cette machine était qu'avec la nouvelle articulation, l'engin supportait beaucoup moins de vibrations et la charpente tenait plus longtemps.

Le *couillard* est la dernière machine de jet à contrepoids créée avant l'arrivée des armes à feu comme les canons. Elle réunit l'articulation du contrepoids du trébuchet et la légèreté et la facilité de la Pierrière. C'est pour cela que même si la portée est plus petite que le trébuchet elle était beaucoup utilisée que ce soit pour l'attaque ou la défense. La cadence de tir pouvait atteindre 10 tirs en une heure et lançait quand même de 35 à 80kg de projectile. C'était la machine compromise entre rapidité et portée. Les projectiles pouvaient même atteindre les 180m. Pour tirer il fallait néanmoins la participation de 16 personnes. Le nom de cette machine lui vient de la forme particulière de son contrepoids. En effet, la verge se séparait en deux parties disposant chacune leur propre masse. Le socle et l'axe de rotation se situait dans l'espace entre les masses ne provoquant aucun choc lors du lancer.



Le système pour lâcher le projectile était le même pour chaque machine, il s'agissait d'une fronde accrochée d'une manière particulière de telle sorte que lorsque la verge atteignait le point de largage, une des deux cordes se détachait pour laisser le projectile partir. Nous avons trouvé un schéma expliquant ce système.



Dans notre projet nous avons décidé de nous inspirer de ces grandes machines et des systèmes qui les composent. Nous avons donc choisi d'utiliser le même système pour lâcher notre boulet.

### 3.2. Présentation des différents modèles

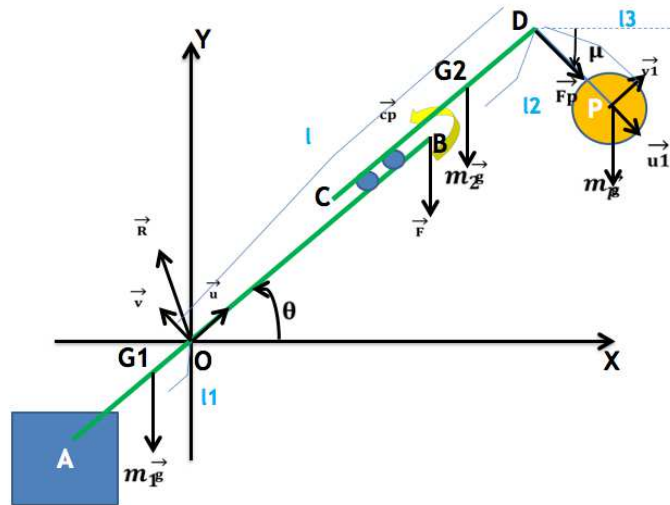


Figure 1

Il s'agit du modèle que nous avons choisi. La particularité de ce modèle réside dans l'agrandissement de la barre avec une plus fine barre qui va glisser grâce à des roulements à l'intérieur d'une barre principale pour augmenter le bras lors du mouvement. Le point D est en position B au début du mouvement et une goupille au niveau du point D est attachée via une corde au contrepoids pour éviter que le contrepoids puisse s'échapper au début du mouvement. Au moment où la corde va se tendre, la goupille va se retirer et permettre de lâcher le contrepoids. Un autre avantage est que nous pouvons décider à quelle hauteur nous souhaitons retirer la goupille en décidant la longueur de la corde liée à la goupille.

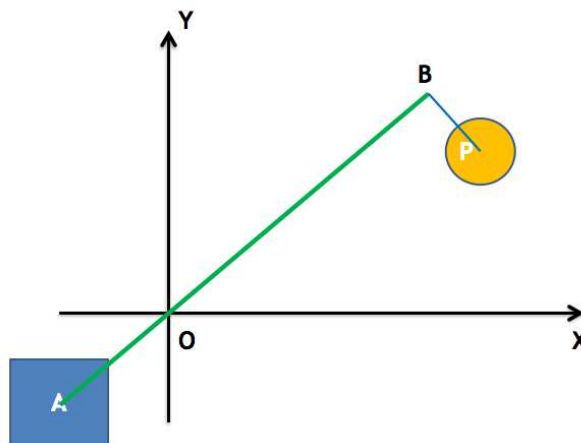


Figure 2

Le modèle de Figure2 est le modèle le plus simple, il est seulement composé d'un contrepoids, d'un projectile et d'une barre. Il n'y a aucune amélioration par rapport au trébuchet ordinaire et nous ne pouvons pas augmenter la distance de jet.

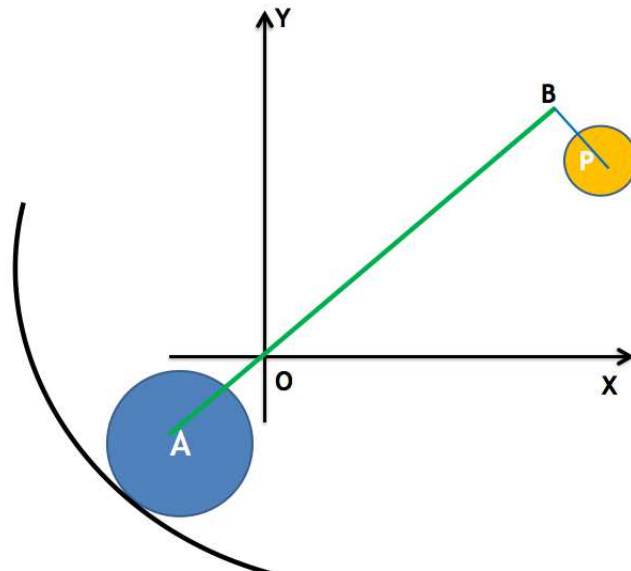


Figure 3

Pour la Figure3, il existe une piste pour le contrepoids A. Lorsqu'on relâche le contrepoids, la trajectoire de A est guidée, ce qui permet d'agrandir la distance OB tout en diminuant la distance AO au niveau de la barre. Le désavantage est la complexité pour réaliser la piste.

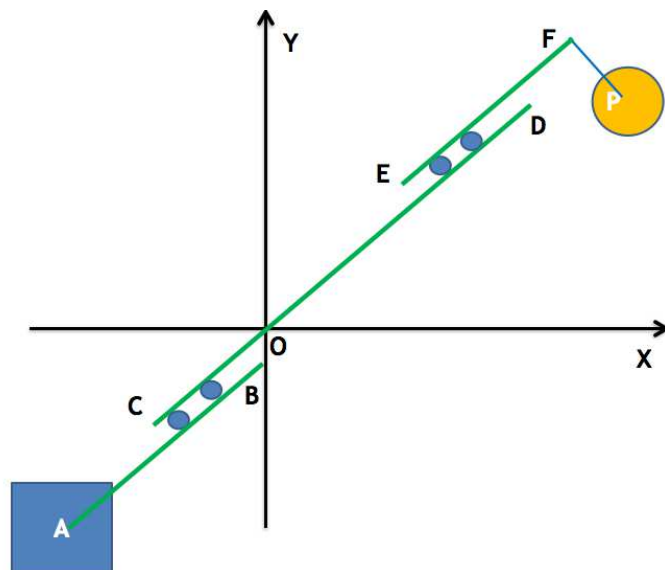


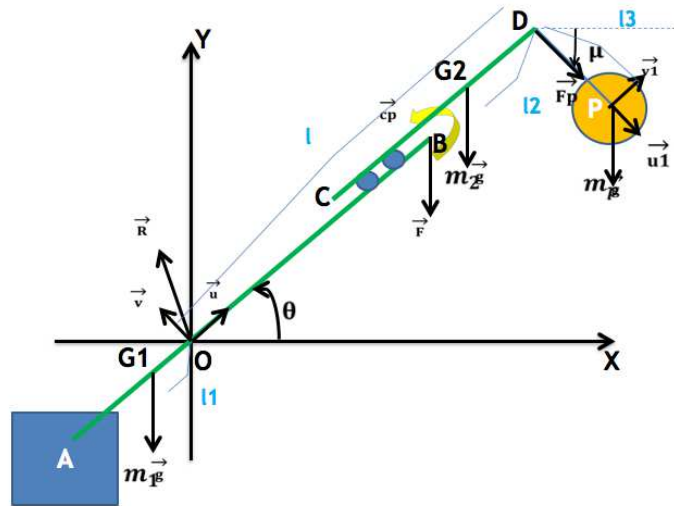
Figure 4

La Figure 4 fonctionne exactement comme celui de Figure 1 à la différence que l'on agrandit les deux bouts de la barre. Il n'y a pas d'avantage sur la distance de jet supplémentaire au modèle de la figure 1. De plus, ce modèle nécessite que l'on doive empêcher les deux barres de glisser puis analyser s'il faut les laisser glisser en même temps ou avec un décalage. Et pour réaliser ce modèle, nous aurions dû également penser à construire le trébuchet plus en hauteur pour permettre à la partie de la barre avec le contrepoids de ne pas toucher le sol.



### 3.3. Partie théorique

#### 3.3.1. Calculs théoriques



Nous avons donc choisi et étudié ce modèle ci-dessus.

Mouvement sur la barre AB :

$$m_1 \gamma_{G1} = m_1 \vec{g} + \vec{R} + \vec{F} \quad (1)$$

$$J_1 \ddot{\theta} \vec{z} = \overrightarrow{OG_1} \wedge m_1 \vec{g} + \overrightarrow{OB} \wedge \vec{F} + \overrightarrow{C_p} \quad (2)$$

Mouvement sur la barre CD :

$$m_2 \gamma_{G2} = m_2 \vec{g} - \vec{F} + \vec{F}_p \quad (3)$$

$$\frac{d\overrightarrow{\sigma_{CD/O}}}{dt} = \overrightarrow{OB} \wedge (-\vec{F}) - \overrightarrow{C_p} + \overrightarrow{OG_2} \wedge m_2 \vec{g} + \overrightarrow{OD} \wedge \vec{F}_p \quad (4)$$

Mouvement du boulet P :

$$m_p \vec{\gamma}_p = m_p \vec{g} - \vec{F}_p \quad (5)$$

$$\vec{F} = (m_p + m_2) \vec{g} - m_p \gamma_p - m_2 \gamma_{G2} \quad (8)=(5)+(3)$$



$$\vec{F}_p = m_p \vec{g} - m_p \vec{\gamma}_p \quad (9)$$

Et on sait que  $\vec{F} \cdot \vec{u} = 0$  et  $\vec{u} = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} &-(m_p + m_2) g \sin \theta - m_p (\gamma_{px} \cos \theta + \gamma_{py} \sin \theta) \\ &- m_2 (\gamma_{G2x} \cos \theta + \gamma_{G2y} \sin \theta) = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

De même, on sait que  $\vec{F}_p \cdot \vec{v}_1 = 0$  et  $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} \cos \mu \\ \sin \mu \end{pmatrix}$

$$-m_p g \cos \mu - m_p (-\gamma_{px} \sin \mu + \gamma_{py} \cos \mu) = 0 \quad (10b)$$

On simplifie par  $m_p$  :

$$-g \cos \mu + \gamma_{px} \sin \mu - \gamma_{py} \cos \mu = 0 \quad (10b)$$

$$J_1 \ddot{\theta} \vec{z} + \frac{d\sigma_{CD/O}}{dt} = \vec{OG}_1 \wedge m_1 \vec{g} + \vec{OG}_2 \wedge m_2 \vec{g} + \vec{OD} \wedge \vec{F}_p \quad (4')=(2)+(4)$$

$$\rightarrow \frac{d\sigma_{CD/O}}{dt}$$

$$\sigma_{CD/O} = \int_C^D dm \overline{OM} \wedge \overline{V}_M$$

$$\text{Avec } \overline{V}_M = \overline{V}_{Gz} + \dot{\theta} \vec{z} \wedge \overline{G}_2 \overline{M}$$

$$\sigma_{CD/O} = \int_C^D dm (\overline{OG}_2 + \overline{G}_2 \overline{M}) \wedge (\overline{V}_{Gz} + \dot{\theta} \vec{z} \wedge \overline{G}_2 \overline{M})$$

$$\overline{\sigma}_{CD/O} = \overline{OG}_2 \wedge \int dm (\overline{V}_{Gz} + \dot{\theta} \vec{z} \wedge \overline{G}_2 \overline{M}) + \int dm \overline{G}_2 \overline{M} \wedge \overline{V}_{Gz} + \int dm \overline{G}_2 \overline{M} \wedge (\dot{\theta} \vec{z} \wedge \overline{G}_2 \overline{M})$$

$$\overline{\sigma}_{CD/O} = m_2 \overline{OG}_2 \wedge \overline{V}_{Gz} + J_2 \ddot{\theta} \vec{z}$$

$$\text{Avec } J_2 = \int dm \overline{G}_2 \overline{M}^2$$

$$\frac{d\sigma_{CD/O}}{dt} = m_2 \overline{V}_{Gz} \wedge \overline{V}_{Gz} + m_2 \overline{OG}_2 \wedge \overline{V}_{Gz} + J_2 \ddot{\theta} \vec{z}$$

$$\frac{d\sigma_{CD/O}}{dt} = m_2 (l - l_2) \vec{u} \wedge \overline{V}_{Gz} + J_2 \ddot{\theta} \vec{z}$$

$$\overline{OG}_2 = (l - l_2) \vec{u}$$

$$\overline{V}_{Gz} = l \vec{u} + (l - l_2) \dot{\theta} \vec{v}$$

$$\vec{\gamma}_{G2} = \ddot{l}\vec{u} + l\dot{\vartheta}\vec{v} + ((l - l_2)\ddot{\theta} + l\dot{\vartheta})\vec{v} - (l - l_2)\dot{\vartheta}^2\vec{u}$$

Donc

$$\frac{d\sigma_{CD/O}}{dt} = (m_2(l - l_2)(l\dot{\vartheta} + (l - l_2)\ddot{\theta} + l\dot{\vartheta}) + J_2\ddot{\theta})\vec{z}$$

$$\rightarrow \overrightarrow{OG_1} \wedge m_1\vec{g} = l_1\vec{u} \wedge m_1\vec{g} = l_1 \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \wedge m_1g \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OG_1} \wedge m_1\vec{g} = -m_1gl_1 \cos\theta \vec{z}$$

$$\rightarrow \overrightarrow{OG_2} \wedge m_2\vec{g} = (l - l_2)\vec{u} \wedge m_2\vec{g}$$

$$\overrightarrow{OG_2} \wedge m_2\vec{g} = -m_2g(l - l_2) \cos\theta \vec{z}$$

$$\rightarrow \overrightarrow{OD} \wedge \vec{F}_p = l\vec{u} \wedge (m_p\vec{g} - m_p\gamma_G)$$

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DP} = l\vec{u} + d_3\vec{u}_1$$

$$\vec{V}_p = l\dot{\vartheta}\vec{v} + d_3\dot{\mu}\vec{v}_1$$

$$\vec{\gamma}_p = (l - l\dot{\vartheta}^2)\vec{u} + (2l\dot{\vartheta} + l\ddot{\vartheta})\vec{v} + d_3\ddot{\mu}\vec{v}_1 + d_3\dot{\mu}^2\vec{u}_1$$

Donc

$$\overrightarrow{OD} \wedge \vec{F}_p = -m_p l (g \cos\vartheta - (2l\dot{\vartheta} + l\ddot{\vartheta}))\vec{z} - m_p l d_3 (\vec{u} \wedge \ddot{\mu}\vec{v}_1 - \dot{\mu}^2\vec{u}_1)$$

Or

$$\vec{u} \wedge \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -\sin\mu \\ \cos\mu \end{pmatrix} = (\cos\theta \cos\mu + \sin\theta \sin\mu)\vec{z} = \cos(\mu - \vartheta)\vec{z}$$

Et

$$\vec{u} \wedge \vec{u}_1 = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \cos\mu \\ \sin\mu \end{pmatrix} = \cos\vartheta \sin\mu - \sin\vartheta \cos\mu = \sin(\mu - \vartheta)\vec{z}$$

Donc

$$\overrightarrow{OD} \wedge \vec{F}_p = -m_p l \left( (g \cos\vartheta - (2l\dot{\vartheta} + l\ddot{\vartheta})) - d_3(\ddot{\mu} \cos(\mu - \vartheta) - \dot{\mu}^2 \sin(\mu - \vartheta)) \right)$$

On obtient donc

$$\begin{aligned}
 & J_1 \ddot{\theta} + m_2(l - l_2)(2\dot{l}\dot{\vartheta} + (l - l_2)\ddot{\theta}) + J_2 \ddot{\theta} \\
 & = -m_1 g l_1 \cos \theta + -m_2 g(l - l_2) \cos \theta \\
 & - m_p l \left( (g \cos \vartheta + (2\dot{l}\dot{\theta} + l\ddot{\theta})) \right. \\
 & \left. + d_3(\ddot{\mu} \cos(\mu - \vartheta) - \dot{\mu}^2 \sin(\mu - \vartheta)) \right)
 \end{aligned} \tag{4'}$$

Développement de (10) :

$$\begin{aligned}
 & -(m_p + m_2)g \sin \theta - m_p \vec{\gamma}_p \cdot \vec{u} - m_2 \vec{\gamma}_{G2} \cdot \vec{u} = 0 \\
 & -(m_p + m_2)g \sin \theta - m_p \left( (\ddot{l} - l\dot{\vartheta}^2) \vec{u} + (2\dot{l}\dot{\vartheta} + l\ddot{\theta}) \vec{v} + d_3 \ddot{\mu} \vec{v}_1 - d_3 \dot{\mu}^2 \vec{u}_1 \right) \cdot \vec{u} \\
 & - m_2 \left( (\ddot{l} - (l - l_2)\dot{\vartheta}^2) \vec{u} + (2\dot{l}\dot{\theta} + (l - l_2)\dot{\vartheta}^2) \vec{v} \right) \cdot \vec{u} = 0 \\
 & -(m_p + m_2)g \sin \theta - m_p (\ddot{l} - l\dot{\vartheta}^2 + d_3 \ddot{\mu} \sin(\theta - \mu) - d_3 \dot{\mu}^2 \cos(\theta - \mu)) - m_2 (\ddot{l} - (l - l_2)\dot{\vartheta}^2) = 0
 \end{aligned}$$

On obtient donc :

$$\begin{aligned}
 & \ddot{l}(m_p + m_2) + \ddot{\mu}(m_p d_3 \sin(\vartheta - \mu)) \\
 & = m_p (l\dot{\vartheta}^2 + d_3 \dot{\mu}^2 \cos(\vartheta - \mu) - g \sin \vartheta) \\
 & + m_2 ((l - l_2)\dot{\vartheta}^2 - g \sin \vartheta) = 0
 \end{aligned} \tag{10}$$

Développement de (10b) :

$$\begin{aligned}
 & \vec{g} \cdot \vec{v}_1 - \vec{\gamma}_p \cdot \vec{v}_1 = 0 \\
 & -g \cos \mu - \left( (\ddot{l} - l\dot{\vartheta}^2) \vec{u} + (2\dot{l}\dot{\vartheta} + l\ddot{\theta}) \vec{v} + d_3 \ddot{\mu} \vec{v}_1 - d_3 \dot{\mu}^2 \vec{u}_1 \right) \cdot \vec{v}_1 = 0 \\
 & g \cos \mu + (\ddot{l} - l\dot{\vartheta}^2) \sin(\vartheta - \mu) + (2\dot{l}\dot{\theta} + l\ddot{\theta}) \cos(\vartheta - \mu) + d_3 \ddot{\mu} = 0
 \end{aligned}$$

On obtient donc :

$$\begin{aligned}
 & \ddot{l} \sin(\vartheta - \mu) + \ddot{\mu} d_3 + \ddot{\theta} l \cos(\vartheta - \mu) \\
 & = -g \cos \mu + l\dot{\vartheta}^2 \sin(\vartheta - \mu) - 2\dot{l}\dot{\vartheta} \cos(\vartheta - \mu)
 \end{aligned} \tag{10b}$$

Et enfin on reporte (4') :

$$\begin{aligned}
 & \ddot{\theta} (J_1 + J_2 + m_2(l - l_2)^2 + m_p l^2) + \ddot{\mu} d_3 m_p l \cos(\mu - \vartheta) \\
 & = -m_1 g l_1 \cos \theta - m_2 (g(l - l_2) \cos \theta \\
 & + (l - l_2) 2\dot{l}\dot{\vartheta}) \\
 & - m_p l (g \cos \vartheta + 2\dot{l}\dot{\theta} - d_3 \dot{\mu}^2 \sin(\mu - \vartheta))
 \end{aligned} \tag{4'}$$

### 3.3.2. Suite des calculs sur Excel avec la méthode Runge Kutta

Pour pouvoir récupérer les résultats théoriques, il fallait pouvoir résoudre les trois équations obtenues dans la partie calculs, c'est-à-dire les équations (4'), (10) et (10b). Il s'agit d'un système d'équations différentielles du second ordre ainsi la méthode de résolution usuelle est la méthode Runge Kutta.

Explication rapide de la méthode Runge Kutta d'ordre 4 :

Le but de cette méthode est d'obtenir les valeurs de  $l$ ,  $\mu$  et  $\theta$  en utilisant les dérivées premières et les dérivées secondes. Tout d'abord les coefficients devant les variables  $\dot{l}, \dot{\theta}, \dot{\mu}$  forment une matrice de dimension 3x3 et en inversant cette matrice on obtient les valeurs de  $\ddot{l}, \ddot{\theta}, \ddot{\mu}$  en fonction de leur dérivée première et de  $l, \mu, \theta$ . Runge Kutta permet à partir de ces expressions de retrouver les valeurs recherchées en faisant 4 incrémentations et inversions de matrice. Les variables utilisées sont X1, X2, X3, X4, X5, X6 qui correspondent à :

$$X1=\mu \quad X2=\dot{\mu} \quad X3=\theta \quad X4=\dot{\theta} \quad X5=l \quad X6=\dot{l}$$

Ce système d'équations étant compliqué à résoudre à la main, nous avons dû utiliser un tableur Excel dans lequel nous avons exploité la partie programmation. Nous avons juste à donner les valeurs de départ à  $t=0$  et le programme nous donnait tout le reste. Voici les données nécessaires au programme pour la résolution du système d'équations différentielles :

X1= Mu_deg degré)	-89,00	}	Valeurs des variables à T=0
X2= Mu_point degré/s)	0		
X3=teta (degre)	-45		
X4=teta_point (degres/sec)	0		
X5 = L (m)	1,63		
X6 = L_point (m/s)	0		
T init	0	}	Données constantes au cours du temps dépendantes de la machine
T final	3		
dt, pas de temps d'intégration	0,01		
masse de barre AB,m_barre_AB	2,27		
distance AO,d_AO	0,86		
masse de P,m_P	0,52		
longueur corde DP,l_3	0,6		
longueur OB,d_OB	1,63		
distance OG1,l_1			
Algebrique, est calculé	-0,629669927		
longueur CG2,l_2			
est calculée	0,4		
dt_print	0,001		
Masse barre CD, m_2	0,5		
distance AB,d_AB			
est calculé	2,49		
distance CD, d_CD	0,8		
masse de la grosse masse ,m_A	10		
rayon du boulet ,R	0,06		
Lmax, longueur maximale de OD	2,43		

Il faut savoir qu'avant chaque incrémentation il fallait inverser la matrice avec les nouvelles valeurs. Pour cela nous avons utilisé une boucle sur Excel qui le faisait à chaque fois. Voici un morceau de notre code montrant la première incrémentation.

```
' 1 er increment *****
' calcul de A1,B1,C1,D1,...D3

Call sub_A1(m_p, L_3, X3an, X1an, A1)
Call sub_B1(B1)
Call sub_C1(m_p, m_2, C1)
Call sub_D1(m_p, X5an, X4an, L_3, X2an, X1an, X3an, m_2, L_2, d1)
Call sub_A2(L_3, A2)
Call sub_B2(X5an, X1an, X3an, B2)
Call sub_C2(X3an, X1an, C2)
Call sub_D2(X1an, X5an, X4an, X3an, X6an, D2)
Call sub_A3(m_p, X5an, L_3, X1an, X3an, A3)
Call sub_B3(J1, J2, m_2, X5an, L_2, m_p, B3)
Call sub_C3(C3)
Call sub_D3(m_1, L_1, X3an, m_2, X5an, L_2, X6an, X4an, m_p, L_3, X2an, X1an, d3)

' détermination des dérivées secondes
Call sub_dérivée_sec(A1, B1, C1, d1, A2, B2, C2, D2, A3, B3, C3, d3, mu_sec, teta_sec, l_sec)

k1(1) = dt * x1_fd(X2an) ' est d(mu)          , x1a=Mu, x2a=mu_point
k1(2) = dt * mu_sec ' est d(mu_point)      , X3 = alpha; X4 alpha_point
k1(3) = dt * x3_fd(X4an) ' est d(teta)
k1(4) = dt * teta_sec ' est d(teta_point)
k1(5) = dt * x5_fd(X6an) * (1 - ifix) ' modif vuillamy
k1(6) = dt * l_sec * (1 - ifix) ' modif vuillamy
' *****
' 2 ieme increment *****
time_2 = (i - 2) * dt + T_init + dt / 2 ' time_2 est le temps courant absolu

X1an = X1a + k1(1) / 2 ' Mu
X2an = X2a + k1(2) / 2 ' mu_point
X3an = X3a + k1(3) / 2 ' teta
X4an = X4a + k1(4) / 2 ' teta_point
X5an = X5a + k1(5) / 2 ' L
X6an = X6a + k1(6) / 2 ' L_point
```

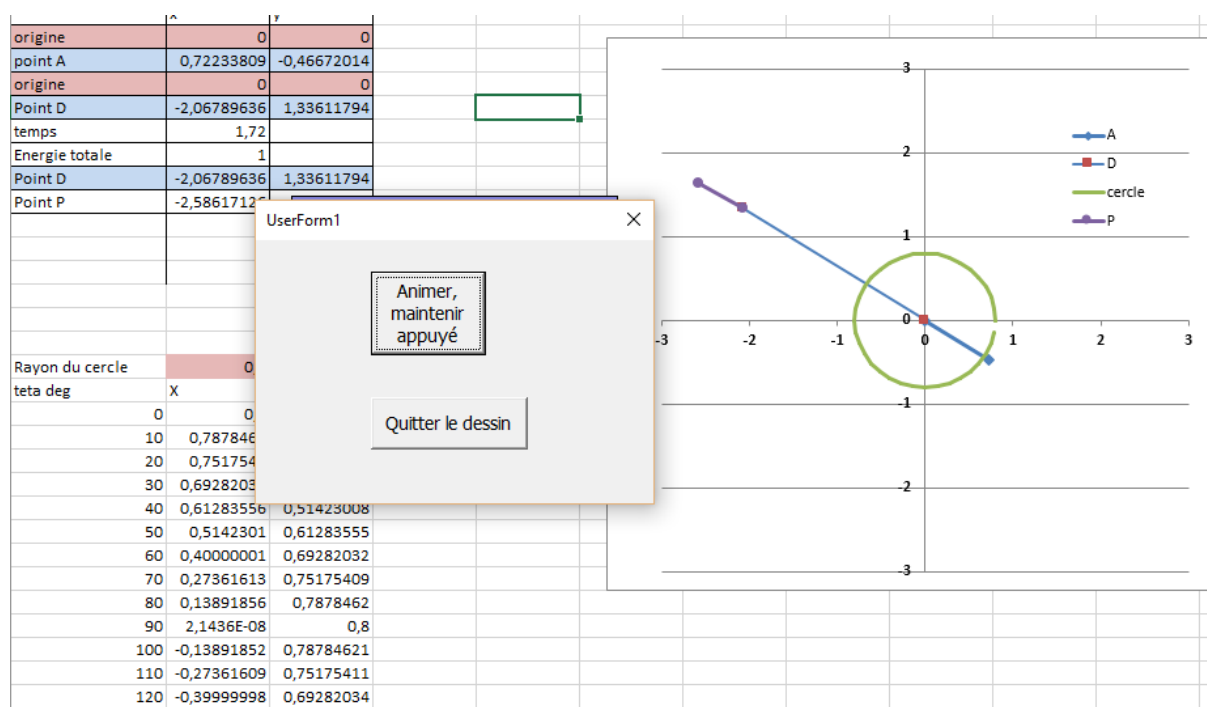
La première partie de ce bout de programme correspond au calcul des coefficient de la matrice qui changent après chaque incrémentation suivant le mouvement de la machine. Ensuite le calcul de « sub\_dérivée\_sec » permet d'inverser la matrice et donc d'obtenir les valeurs des dérivées secondes. Les calculs de k1(1) jusqu'à k1(6) sont les incrémentations de Runge Kutta qui viennent ensuite s'ajouter au variables X1, X2, X3, X4, X5, X6 énoncées précédemment. Comme chaque calcul des coefficients modifie la matrice, les incrémentations changent de la première à la quatrième. A la fin du calcul par la méthode Runge Kutta il faut faire la somme de toutes les incrémentations comme ceci :

```
' nouvelles valeurs :
X1a = X1a + (1 / 6) * (k1(1) + 2 * k2(1) + 2 * k3(1) + k4(1))
X2a = X2a + (1 / 6) * (k1(2) + 2 * k2(2) + 2 * k3(2) + k4(2))
X3a = X3a + (1 / 6) * (k1(3) + 2 * k2(3) + 2 * k3(3) + k4(3))
X4a = X4a + (1 / 6) * (k1(4) + 2 * k2(4) + 2 * k3(4) + k4(4))
X5a = X5a + (1 / 6) * (k1(5) + 2 * k2(5) + 2 * k3(5) + k4(5))
X6a = X6a + (1 / 6) * (k1(6) + 2 * k2(6) + 2 * k3(6) + k4(6))
'*****
```

Grâce à cette méthode et au programme nous pouvons donc obtenir les valeurs de  $l$ ,  $\mu$  et  $\theta$  et à partir de ces valeurs obtenir la position à chaque instant de notre boulet au cours du mouvement.

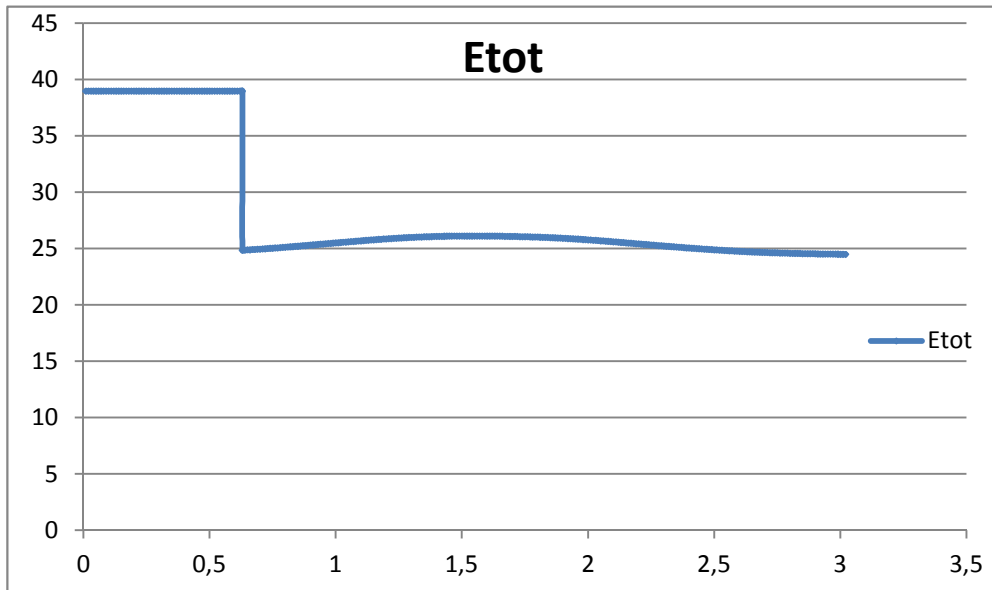
La particularité de notre machine est que la verge s'allonge au cours du temps jusqu'à une distance limite  $L_{max}$ . Or notre programme d'intégration par la méthode Runge Kutta ne prévoit qu'un seul modèle à la fois et donc nous avons dû combiner deux modèles. C'est-à-dire que nous utilisons un premier modèle avec la barre qui s'allonge jusqu'à ce qu'elle atteigne la valeur  $L_{max}$  et à ce moment-là le programme basculait sur un autre modèle. Ce deuxième modèle est juste un modèle dans lequel la barre est considérée comme de longueur fixe égale à  $L_{max}$ . Les valeurs d'entrée sont les dernières calculées par la partie du programme précédent. Nous avons donc dû écrire sur Excel la méthode Runge Kutta deux fois avec une condition pour passer de l'un à l'autre.

Les valeurs obtenues nous servent beaucoup pour obtenir les valeurs théoriques de la portée du boulet ou de la vitesse de la barre mais toutes ces données ne sont pas vraiment visuelles. Nous avons donc écrit un autre bout de programme dans lequel nous demandions à Excel d'afficher sur un graphique l'allure de la barre suivant les données calculées ainsi nous pouvions en cliquant sur une touche voir l'évolution de l'allure de la machine.

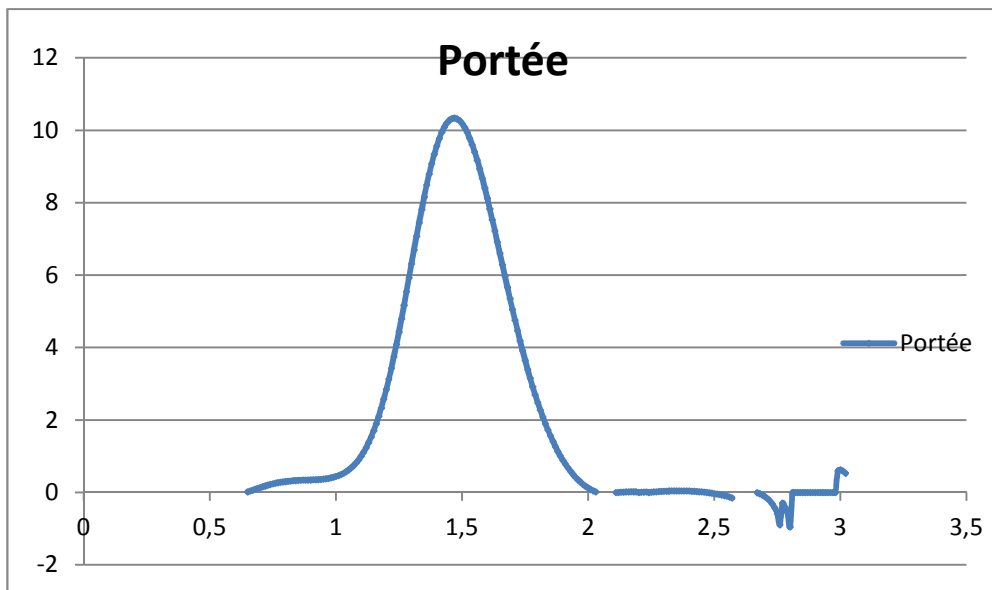


Sur la partie en haut à gauche de la feuille de calcul les positions des points A et D ainsi que celle du boulet sont données sous formes de coordonnées et à chaque fois que l'on appuie sur la case « Animer, maintenir appuyé », ces coordonnées passe aux suivantes, calculées à  $t+dt$ . Ainsi si l'on reste appuyé sur la case le graphique va s'animer comme si nous voyions l'évolution en temps réel de la position de la barre. Toutes ces coordonnées sont stockées dans la feuille « results » de Excel et le programme de l'animation va juste les chercher au bon endroit pour pouvoir les remettre dans la partie en haut à gauche.

Comme le programme nous donne toutes les valeurs recherchées nous pouvons à partir de là calculer diverses choses telles que la position ou la vitesse du boulet et de la barre mais aussi l'énergie totale du système ou la portée du boulet suivant le moment où il est lâché. Ainsi nous pouvons réaliser des graphes de l'évolution de ces données au cours du temps.



Si nous observons le graph de l'énergie totale nous nous rendons compte que si l'énergie totale est sensée se conserver au cours du temps ici nous observons une chute de cette énergie. Cela peut être expliqué par le fait que lorsque la barre s'allonge jusqu'à son maximum, le choc dû à la fin de l'allongement n'est pas élastique et donc il y a une déperdition d'énergie.



Si nous observons le graph de la portée, nous pouvons observer que les valeurs maximales sont localisées dans un intervalle de temps assez restreint. Pour obtenir la plus grande portée il faudrait donc se situer au milieu du pic. Or tout se passe en moins de 1 secondes, il est donc difficile de trouver le bon moment. Nous avons reporté dans le tableau ci-dessous les valeurs de la portée théorique suivantes la hauteur à laquelle le boulet est lâché et nous verrons par la suite une comparaison avec les données expérimentales. Nous avons décidé de comparer trois hauteurs pour les différents boulets et deux contrepoids.

Masse du Boulet (g)	Hauteur du projectile (m) (inst*)	Masse du contrepoids (kg)	Portée (m)	Hauteur du point D au moment du lâcher (m)
520	2.49	10	6.1	1.88
690	2.49	10	4.9	1.88
750	2.49	10	4.5	1.88

Masse du Boulet (g)	Hauteur du projectile (m) (inst*)	Masse du contrepoids (kg)	Portée (m)	Hauteur du point D au moment du lâcher (m)
520	2.66	10	7.6	2
690	2.66	10	6.8	2
750	2.66	10	6.3	2
520	2.66	14	11.3	2
690	2.66	14	8.4	2
750	2.66	14	8.6	2

Masse du Boulet (g)	Hauteur du projectile (m) (inst*)	Masse du contrepoids (kg)	Portée (m)	Hauteur du point D au moment du lâcher (m)
520	2.79	10	10.8	2.28
690	2.79	10	9.8	2.28
750	2.79	10	9.3	2.28

\*inst = lors de l'installation avec la barre rétractée

Le calcul de la hauteur du point D a été réalisée grâce à des calculs de géométrie car si au repos nous décidons que la hauteur de la barre sera de 2m49 avec le sol, dans la réalité, avec le mouvement, ce n'est pas la même hauteur à laquelle le boulet est lâché.

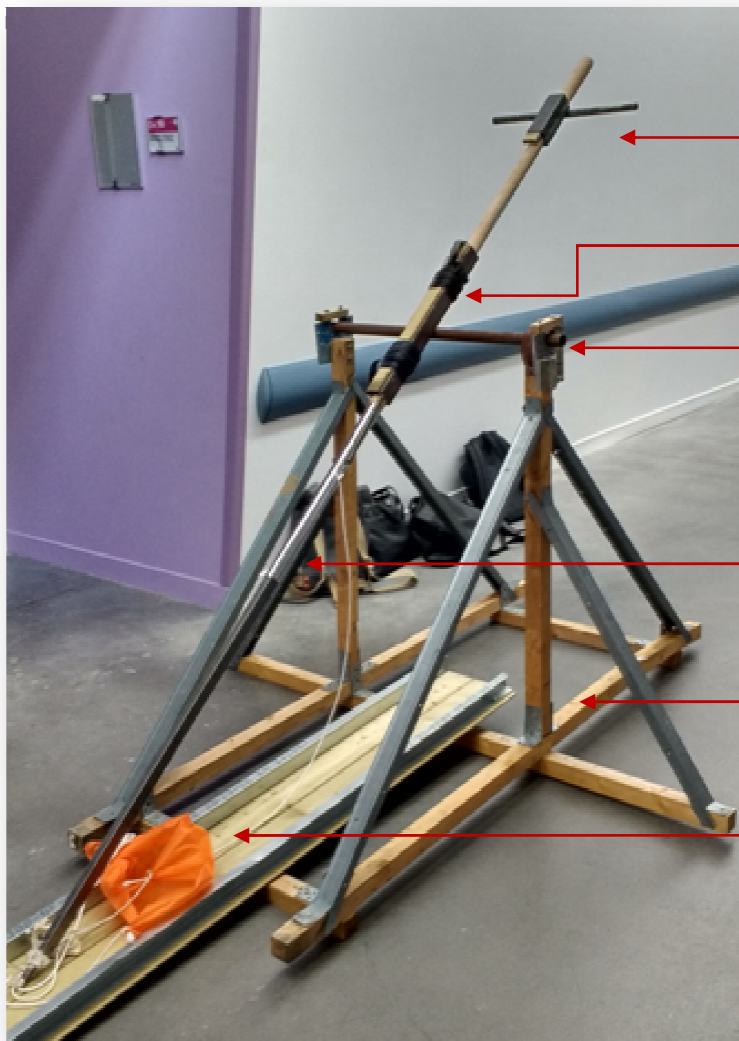
Notre modélisation par le programme Excel n'est pas totalement fidèle à notre machine car dans cette dernière le boulet traîne horizontalement durant les premiers instants et ne commence à faire son mouvement que lorsque la barre est totalement allongée et qu'elle ne touche plus le sol. Or dans notre modèle le boulet est considéré comme en suspend dans le vide alors même s'il commence dans une position horizontale, il ne traîne pas aussi longtemps que dans la vraie machine. Cette petite approximation peut sembler minime mais en réalité le pic durant lequel la portée est la plus longue dépend en grande partie de cela.



### 3.4. Partie expérimentale

#### 3.4.1. Explication de la phase de construction de la machine

Pour notre construction, nous avons récupéré les poutres en bois du support de la machine de jet de l'an dernier que nous avons vissé les uns aux autres. Nous avons ensuite ajouté l'axe en métal qui permettra à notre barre de tourner autour pour lancer le projectile. Concernant notre barre, nous l'avons calée avec une planche de bois puis fixée à l'axe grâce à des sangles pour qu'elle ne bouge pas.



Emplacement du  
contrepoids

Sangle

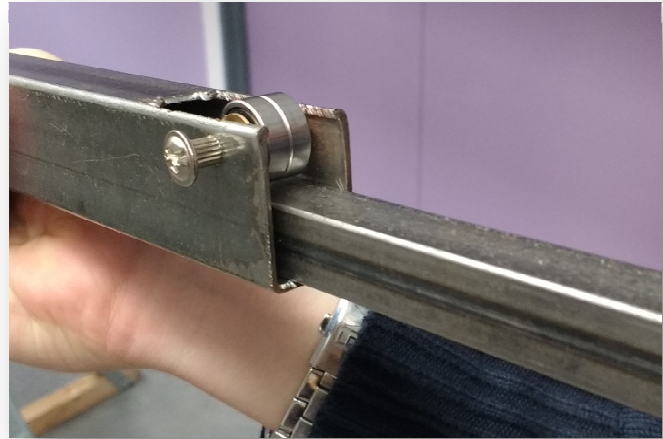
Axe en  
métal

Barre

Support en bois

Emplacement du projectile

Concernant la construction de notre barre, la particularité de notre machine de jet est l'agrandissement de la partie de la barre qui projette le boulet (ici des ballons remplis d'eau de différentes masses). Nous avons souhaité que la barre s'agrandisse au cours du mouvement pour que la barre transmette plus d'énergie au projectile. Nous avons donc pensé à insérer une barre plus fine dans la barre principale qui, à l'aide de roulements, sortira de la barre principale lors du mouvement grâce à l'inertie. Le projectile est installé au bout de cette barre plus fine et sera lâché d'une plus haute altitude que si nous l'avions simplement accroché au bout de la barre principale.



Pour installer nos roulements, nous avons dû couper légèrement les extrémités opposées de chacune des deux bars. Ainsi, un roulement permettait à la barre plus fine d'éviter les frottements avec le dessous de la barre principale et de même pour les frottements avec le dessus pour le deuxième roulement.

Pour éviter que la barre plus fine ne puisse s'échapper totalement de la barre principale, nous avons accroché le bout de cette barre avec une ficelle fixée à un ressort lui-même fixé à l'axe en métal. Nous avons pris une longueur de ficelle telle qu'elle se tende et retienne la barre lorsqu'elle est presque sur le point de sortir totalement de l'autre barre.

De même, pour éviter que notre barre se retourne après le mouvement, nous avons attaché un sac assez lourd au contrepois grâce à une corde de telle sorte que la corde soit tendue lorsque le contrepois arrive en bas, c'est-à-dire à la fin du mouvement.

Concernant le lâcher du projectile, nous avons installé un système de goupille qui permet de lâcher deux des trois ficelles attachées à la poche retenant le projectile à un certain moment du mouvement laissant le projectile libre de s'envoler grâce à son inertie. Pour cela, nous avons coincé les deux bouts de ficelle dans une goupille. Cette goupille a été attachée à une corde que nous retenions à une certaine distance de telle sorte que lorsque la corde se tendait lors du mouvement, la goupille se retirait et lâchait les deux bouts de ficelle.



Voici quelques photos lors de la préparation au lancement :



### **3.4.2. Explication de la phase expérimentale et présentation des résultats**

Une fois la réalisation de notre machine de jet terminée, nous sommes passés à la phase de test.

Nous avons emprunté des masses d'autres au gymnase afin de faire office de contrepoids, et utilisé des balles remplies d'eau comme projectiles.

L'axe de rotation de la barre était placé à une hauteur de 114 cm.

Les paramètres que nous avons fait varier sont les suivants :

- La hauteur à partir de laquelle le boulet est lâché.
- La distance entre le bâti de la machine et le point où l'on retenait la corde accrochée à la goupille.
- Le poids du boulet

Pour effectuer nos essais, il fallait au moins être deux. En effet, pour effectuer un lancer, une personne devait lâcher le contrepoids et une autre devait tenir tendu le fil relié à la goupille afin de libérer le boulet. Cependant, il était plus aisé de faire les tests de la machine à 3 ou 4 personnes, afin d'effectuer les mesures dans les meilleures conditions.

Voici l'ensemble de nos résultats :

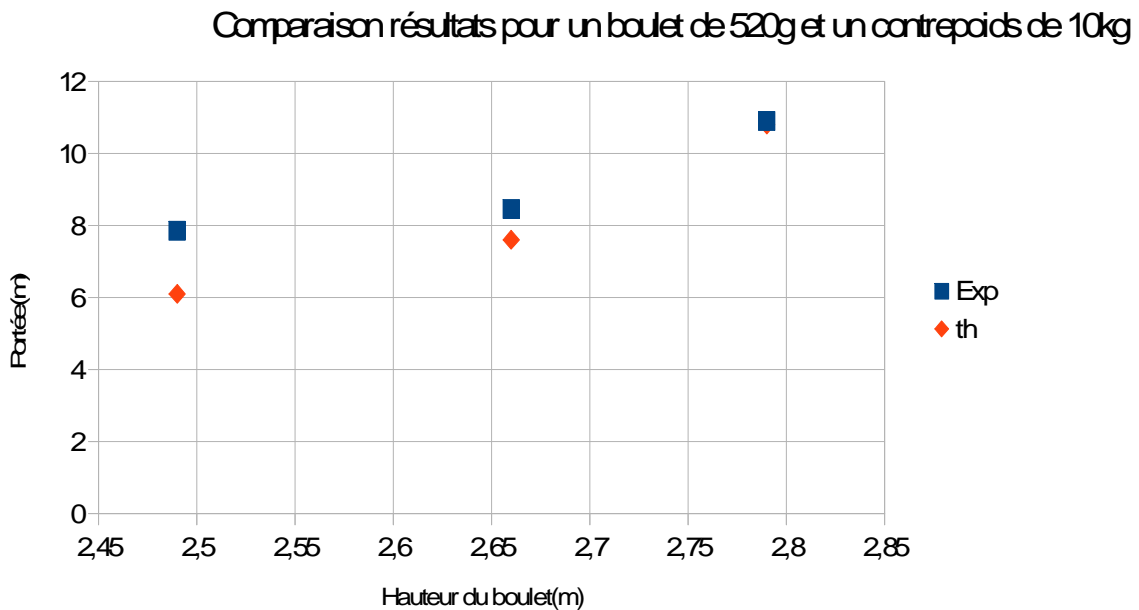
Hauteur du projectile (m)	Distance bâti/ bout de corde (m)	Poids du boulet (g)	Contrepoids (kg)	Résultat (m)	Problème éventuel
2.49	3.83	520	10	7.85	
2.66	3.4	520	10	8.46	
2.79	3.46	520	10	5	Problème avec la poche retenant le boulet
2.79	3.46	520	10	10.90	
2.66	3.4	520	14	15.1	
2.49	3.83	690	10	8.35	
2.66	3.4	690	10	4.13	Problème de dégoupillage
2.66	3.4	690	10	8.72	
2.79	3.46	690	10	9.17	
2.66	3.4	690	14	13.2	
2.49	3.83	750	10	7.84	
2.66	3.4	750	10	9.20	
2.79	3.46	750	10	7.40	Le boulet a heurté le mur
2.79	3.46	750	10	9.05	
2.66	3.4	750	14	11.7	

Nous tenons de plus à noter que le record établi par notre machine s'élève à 16,20m pour un contrepoids de 14kg et un boulet de 520g. Nous avons établi ce record lors d'un jet où l'objectif était de prendre une vidéo du mouvement du mécanisme du trébuchet. Ainsi, nous n'avons malheureusement pas pris de mesures précises quant aux préparatifs du lancer.

### 3.4.3. Explication des résultats et comparaison entre résultats théoriques et expérimentaux

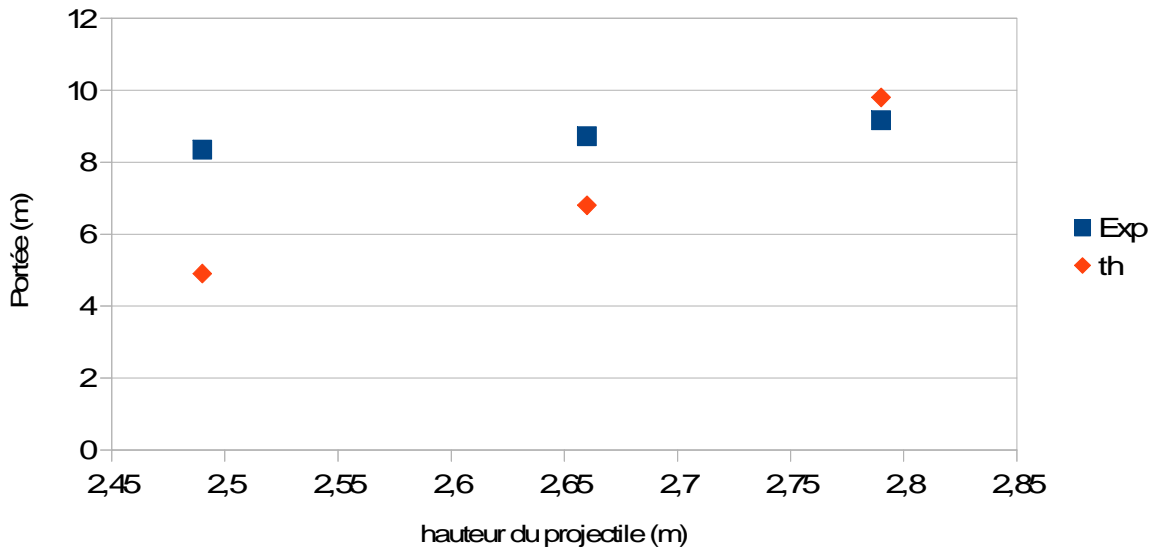
Nous allons à présent procéder à une comparaison entre les résultats théoriques, obtenus grâce à notre programme Excel, et les résultats expérimentaux.

En général, nous pouvons observer que les résultats théoriques sont inférieurs aux résultats expérimentaux. Cette incohérence est, comme nous l'avons expliquée précédemment, causée par le fait que dans notre programme, le boulet n'est pas posé sur un plan incliné comme lors de nos expériences, ce qui a pour conséquences de diminuer drastiquement les portées des résultats théoriques.



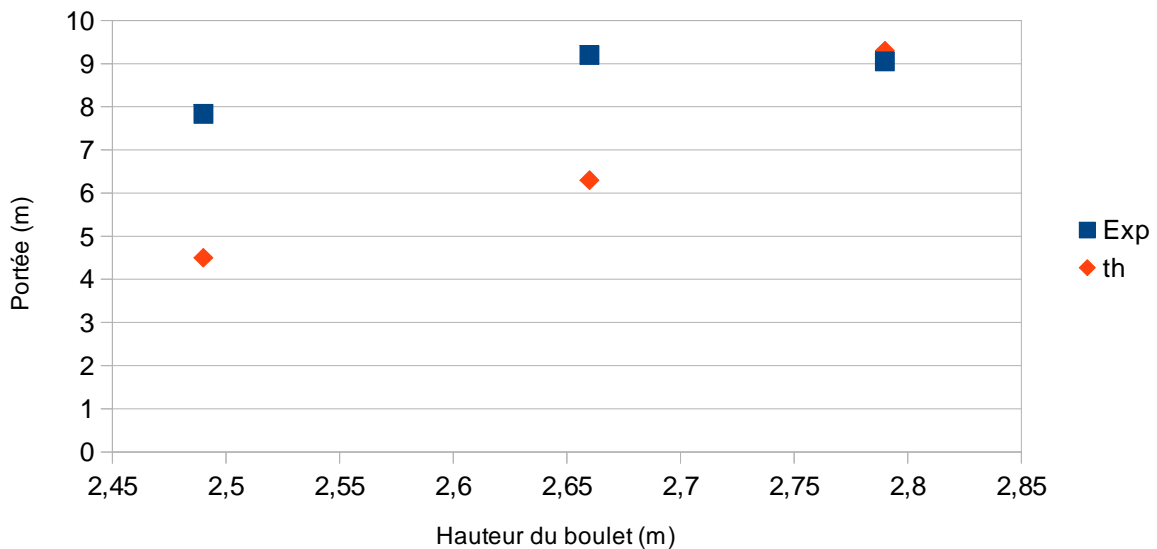
Nous pouvons remarquer, que comme les résultats théoriques, les portées des résultats expérimentaux augmentent avec la hauteur du boulet. Nos résultats expérimentaux sont donc cohérents entre eux ici.

Comparaison résultats pour une masse de 690 g et un contrepois de 10kg



Ici encore, les portées augmentent avec la hauteur à laquelle est lâché le boulet. La différence de portée en fonction de la hauteur pour les résultats expérimentaux est ici plus faible que pour les résultats théoriques. Cela est causé par le fait que les forces de frottements jouent un rôle important dans les résultats expérimentaux alors qu'ils sont négligés dans la théorie. Ainsi la variation de la hauteur à laquelle le boulet est lâché a un impact moins important pour les résultats expérimentaux.

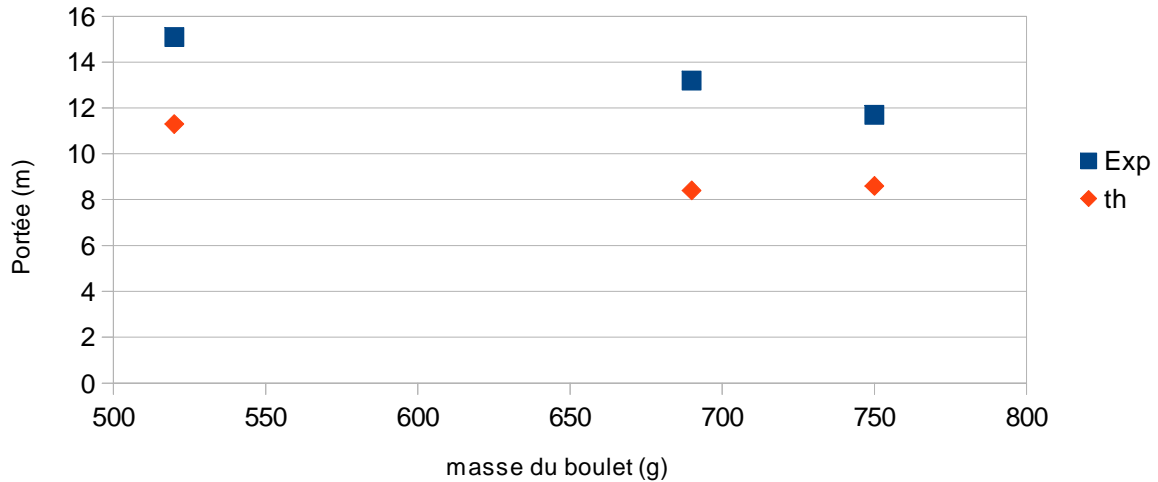
Comparaison résultats pour un boulet de 750g et un contrepois de 10kg



Le phénomène de frottements expliqué précédemment est encore plus flagrant pour le boulet à 750g. A cela s'ajoute le fait que plus la masse du boulet est élevée, plus les imperfections du protocole de l'expérience, comme les frottements de l'air ou encore les imperfections causées par la goupille ou par l'extension de la barre, ont un impact important sur la portée. Ainsi, le nombre d'expérience effectué est trop faible pour que les résultats soient réellement significatifs.

### Comparaison résultats pour un contrepoids de 14 kg

Hauteur du boulet: 2,66m



Nous pouvons remarquer ici que les résultats théoriques et expérimentaux ont sensiblement les mêmes variations, ce qui est une preuve de la justesse de notre conception théorique.

Finalement, les portées des résultats théoriques sont inférieures à celles des résultats expérimentaux à cause d'un défaut de conception expliqué précédemment. Cependant, nous pouvons être satisfaits par cohérence de nos résultats expérimentaux avec nos résultats théoriques. De plus, nous pouvons remarquer que les portées atteintes par notre machine sont relativement bonnes et pourraient aisément être améliorées par de petits ajustements de notre machine, comme par exemple, en améliorant le système de goupille.



#### 4. CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

##### Conclusions personnelles :

**Maialen :** Ce projet P6 a été très enrichissant car il m'a permis d'appliquer toutes les notions de mécanique dans le but de modéliser le comportement réel d'un système. La partie programmation m'a également beaucoup plu car je ne savais pas jusqu'alors que sur Excel nous pouvions modéliser le mouvement d'un système de manière si visuelle. Le plus de ce projet est pour moi la partie expérimentation où nous avons pu nous rendre compte de ce qu'était notre machine et comment elle fonctionnait en réalité. Je tiens à remercier M.Vuillamy sans qui nous n'aurions pas réussi à finaliser ce projet notamment à cause de la partie programmation qui nous était la plus inconnue.

**Pierre :** Pour ma part, j'ai trouvé ce projet vraiment très intéressant car il s'agissait d'un projet complet. En effet, il nous a fallu utiliser de nombreuses compétences différentes, comme de la mécanique théorique (calculs sur papier), de la programmation, et de la mécanique (construction de la machine).

Je tiens à remercier particulièrement M. Vuillamy pour son implication et son aide dans la réalisation de notre projet, notamment pour avoir pris sur son temps pour nous aider dans la partie qui, pour moi, a été la plus compliquée, c'est à dire la phase de programmation.

**Laura :** J'ai trouvé ce projet très enrichissant. J'ai beaucoup aimé concevoir notre propre machine de jet, chercher quelles caractéristiques nous pouvions attribuer à notre machine pour qu'elle soit la plus performante possible puis la construire avec les moyens du bord. Nous avons également pu développer nos connaissances en mécanique en étudiant le mouvement complet de notre trébuchet.

Je souhaite remercier M. Vuillamy qui s'est énormément impliqué dans ce projet et qui a consacré beaucoup de temps pour nous aider.

**Tianwei :** Ce projet fut pour moi une expérience très enrichissante. Je m'intéresse toujours aux machines militaires. Pendant ce projet, nous avons pu, à partir d'une idée et un calcul théorique, suivre toute l'évolution et l'avancement d'un projet, jusqu'à la production et le résultat pratique. Malgré les difficultés qu'on a rencontrées, on les a surmontées. Je tiens à remercier M. Vuillamy pour son aide très précieuse et indispensable lors de ce projet.

**Zifeng :** Ce fut une expérience très intéressante pour moi de faire ce projet. Durant la recherche de ressources, le cours théorique et l'établissement du trébuchet, j'ai appris beaucoup de connaissances sur cette arme médiévale. Bien que nous ayons rencontré de nombreuses difficultés, nous les avons vaincu et finissons parfaitement ce projet.

Je tiens à remercier mes camarades, mais aussi notre professeur M.Vuillamy pour son aide énorme et indispensable pour notre projet.

Perspectives pour la poursuite de ce projet :

- Amélioration du système de dégoupillage pour lâcher le projectile.
- Modèle informatique qui prenne en compte le mouvement horizontal du boulet jusqu'à ce que la barre se lève.
- Alourdir le socle de la machine pour éviter que cette dernière ne bouge durant les tests.

## 5. ANNEXE : COMPOSITION DE LA MACHINE

Les longueurs utilisées sont :

- Barre AB= 2.49m
- Barre CD= 0.8m
- Corde reliant le boulet à la barre= 0.6m

Les masses utilisées sont :

- Barre AB= 2.27kg
- Barre CD=0.5kg

Les barres ont été achetées dans le commerce.

Les roulements (de diamètre intérieur : 5mm) ont été achetés chez un fournisseur de matériel pour l'industrie.

La barre principale est constituée d'un manche de fourche, en hêtre, qui a été usinée à l'atelier du Département de Mécanique de sorte que l'on puisse emmancher un tube, qui est ici un tube d'aspirateur.

La section initialement circulaire de ce tube métallique a été déformée pour pouvoir introduire le tube à section rectangulaire. Celui-ci est tenu dans le tube grâce aux efforts de déformation lié à son enfoncement forcé.

Le reste du matériel utilisé provient du projet de l'année dernière.

## 6. BIBLIOGRAPHIE

<http://medieval.mrugala.net/Armes%20de%20siege/Pierriere.htm>

[https://fr.wikipedia.org/wiki/Couillard\\_\(arme\)](https://fr.wikipedia.org/wiki/Couillard_(arme))

<https://fr.wikipedia.org/wiki/Tr%C3%A9buchet>

<https://fr.wikipedia.org/wiki/Mangonneau>

[https://fr.wikipedia.org/wiki/Bricole\\_\(arme\)](https://fr.wikipedia.org/wiki/Bricole_(arme))