UV Traitement du signal

Cours 4

Systèmes linéaires continus

Définition et caractérisations (temporelle et fréquentielle)

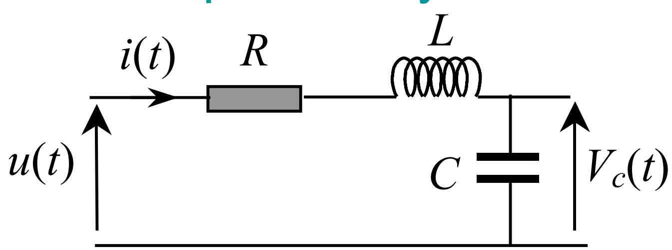
ASI 3

Contenu du cours

- Introduction
  - Définition d'un système
  - Classification des systèmes
- Réponse d'un système LTI (Linéaire à Temps Invariant) à une entrée : caractérisation temporelle
  - Notion de convolution : définition et propriétés
  - Réponse impulsionnelle d'un système
  - Réponse à une entrée quelconque
- Réponse fréquentielle d'un système
  - Théorème de Plancherel
  - Caractérisation des systèmes LTI par la fonction de transfert
  - Transformée de Laplace
    - Définition
    - Propriétés
  - Fonction de transfert d'un système : notion de pôles et zéros
  - Détermination de la réponse temporelle d'un système par la TL

Introduction

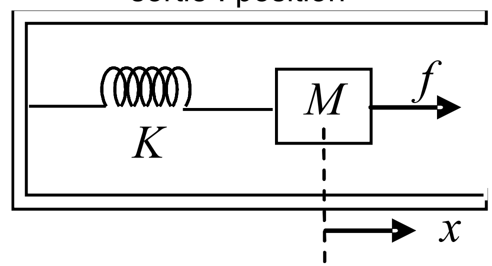
Exemples de systèmes



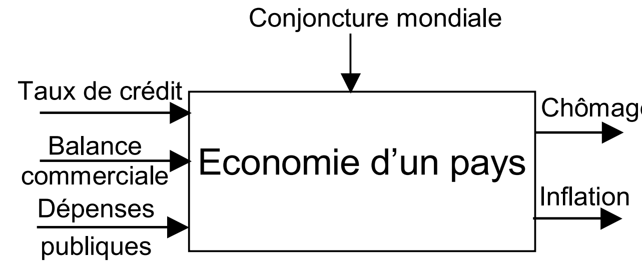
- Système électrique

entrée : force

sortie : position



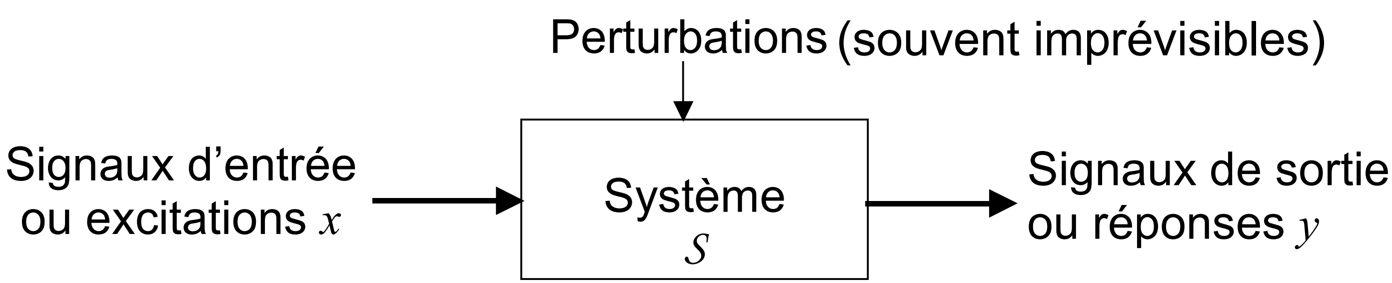
- Système mécanique



- Système économique

Définition

Un système est un ensemble d'éléments fonctionnels interagissant entre eux et qui établit un lien de cause à effet entre ses signaux d'entrées et ses signaux de sortie

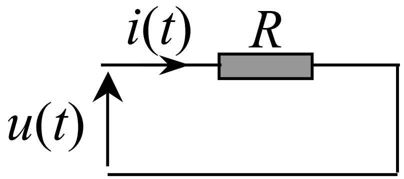


Notation : $y = S[x]$

Classification des systèmes

- Système statique

La réponse du système à une excitation est instantanée

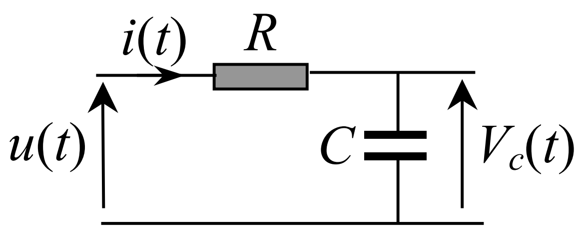


Équation

$$y(t) = i(t) = \frac{1}{R} u(t)$$

- Système dynamique

La réponse est fonction de l'excitation et des réponses passées



Équation

u(t) = V(t) + Ri(t)

et i(t) = CdV(t)/dt

donc

u(t) = V(t)+RC dV(t)/dt

d'où :

$$RC\dot{y}(t) + y(t) = u(t)$$

avec $y(t) = V_c(t)$

- Systèmes mono variable et multivariable

  - Monovariable : système à une entrée et une sortie
  - Multivariable : nombre d'entrées + nombre de sorties > 2

Classification des systèmes

- Linéarité

Si $x(t) = a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t)$ alors $y(t) = a_1 S[x_1(t)] + a_2 S[x_2(t)]$

- Causalité

La réponse du système ne peut pas se produire avant l'excitation qui l'engendre

Conséquence : si $x(t) = 0$ pour $t < 0$ alors $y(t) = S[x(t)] = 0$ pour $t < 0$

- Invariance temporelle

Un décalage temporel en entrée induit le même décalage en sortie. La réponse du système est invariante par translation dans le temps. Le système est dit alors invariant.

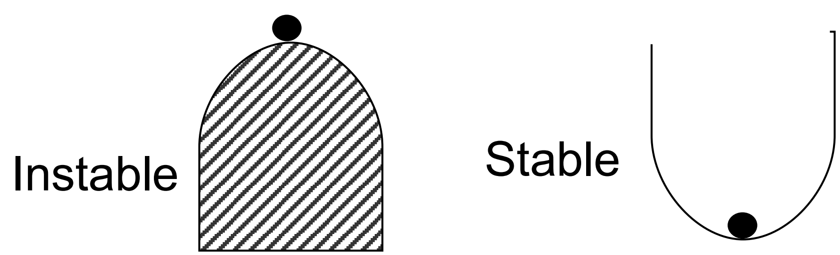
Si $y(t) = S[x(t)]$ alors $y(t - t_0) = S[x(t - t_0)]$

- Stabilité

▪Un système est dit stable si en réponse à une entrée bornée, sa sortie est bornée

$$\exists\, M_x \,/\, |x(t)| < M_x \Rightarrow \exists\, M_y \,/\, |y(t) = S[x(t)]| < M_y$$

▪Système qui, perturbé, revient à son état initial après disparition de la perturbation



Exemples

- Tachymètre
  - Entrée : Vitesse d'un véhicule $v(t)$
  - Sortie : Position angulaire de l'aiguille $\theta(t)$

    Propriétés : linéaire, causal, invariant

- Exemple de système
  - *non linéaire* : hauteur d'une vague en fonction du vent
  - *non causal* : retour vers le futur
  - *non invariant* : y(t) = t.x(t); parcmètre (le tarif dépend de l'heure)

Dans la suite, on étudiera les systèmes monovariables continus linéaires à temps invariant (systèmes LTI)

Caractérisation d'un système LTI

❑ Relation entrée/sortie

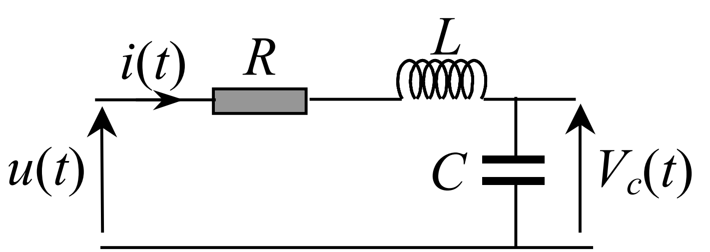
La plus courante : équation différentielle linéaire à coefficients constants

$$a_n y^{(n)}(t) + \cdots + a_1 y^{(1)}(t) + a_0 y(t) = b_m x^{(m)}(t) + \cdots + b_1 x^{(1)}(t) + b_0 x(t)$$

avec $y^{(i)} = \dfrac{d^i y(t)}{dt^i}$ (dérivée d'ordre i)

- Caractérisation complète du système par la connaissance des coefficients
- Sortie $y(t)$ calculable par la connaissance de $x(t)$

❑ Exemple



Entrée du système : $x(t) = u(t)$

Sortie du système : $y(t) = V_c(t)$

◆ Lois de l'électricité

$$Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} + V_c(t) = u(t)$$

et $i(t) = C\dot{V}_c(t)$

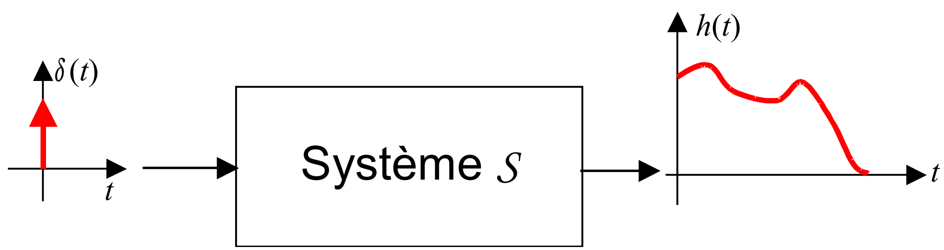
On en déduit :

$$\boxed{LC\ddot{V}_c(t) + RC\dot{V}_c(t) + V_c(t) = u(t)}$$

Caractérisation d'un système LTI

❑ Réponse impulsionnelle

La réponse impulsionnelle d'un système est sa réponse à une entrée sous forme d'impulsion de Dirac



$$h(t) = S[\delta(t)]$$

❑ Avantages de la réponse impulsionnelle

- caractérisation complète du système
- permet de calculer la sortie du système LTI pour d'autres signaux d'entrée

Comment calculer la sortie du système avec un signal d'entrée quelconque à partir de la réponse impulsionnelle ?

$\Rightarrow$ notion de convolution

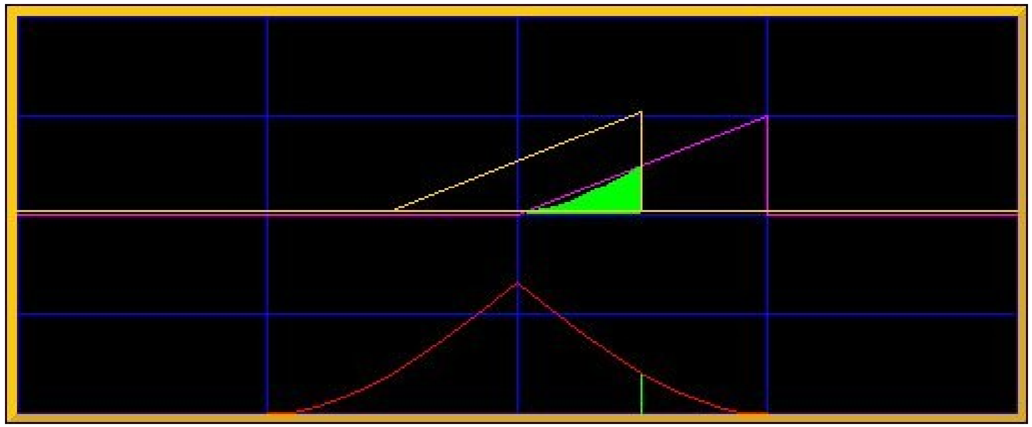
Notion de convolution

Définition

On appelle produit de convolution de deux signaux $f(t)$ et $g(t)$ et on note $f * g$, l'expression

$$f(t)*g(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\,g(t-\tau)\,d\tau$$

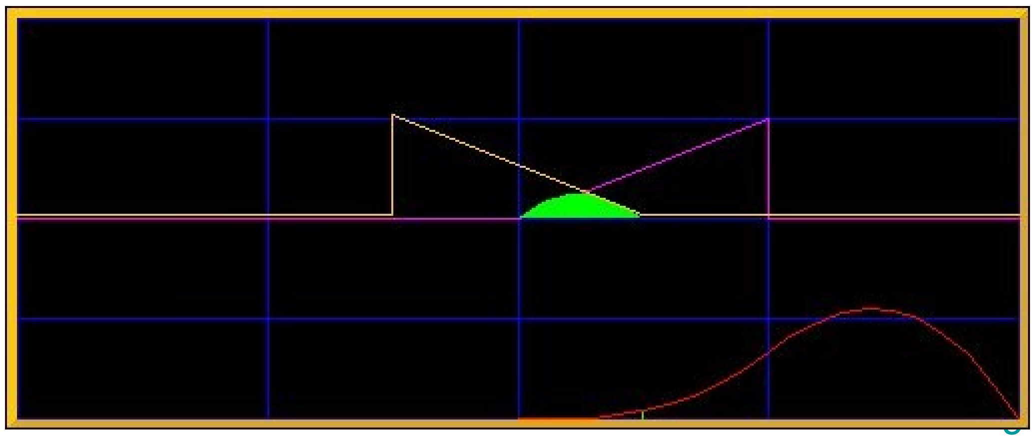
Ressemble beaucoup à une corrélation



Rappel :

$$C_{fg}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,g(t-\tau)\,dt$$

Pour la convolution, un des signaux est inversé



Images provenant des applets de
http://cnyack.homestead.com/files/aconv/convau1.htm

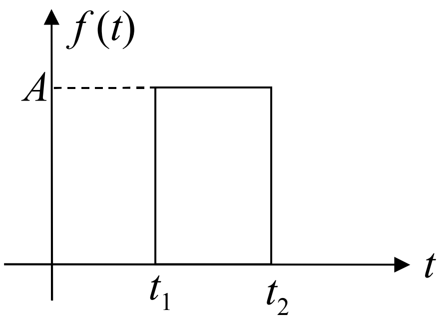
Notion de convolution

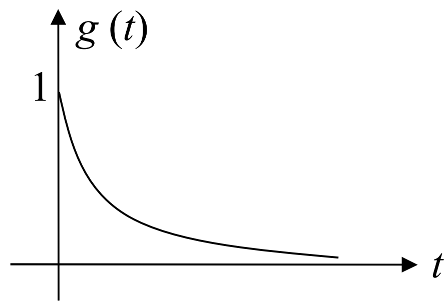
- Cas de signaux causaux $(f(t) = 0,\ g(t) = 0$ pour $t < 0)$

La convolution devient : $$f(t) * g(t) = \int_0^{\infty} f(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau$$

- Exemple

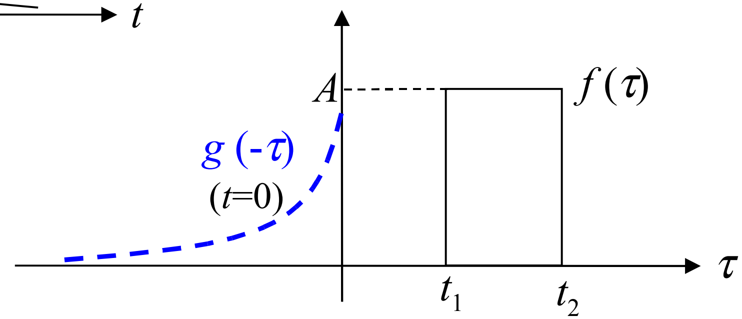
Calculer le produit de convolution des signaux suivants





$g(t) = e^{-at}\Gamma(t)$

$a > 0$



Posons $z(t) = f(t) * g(t)$.

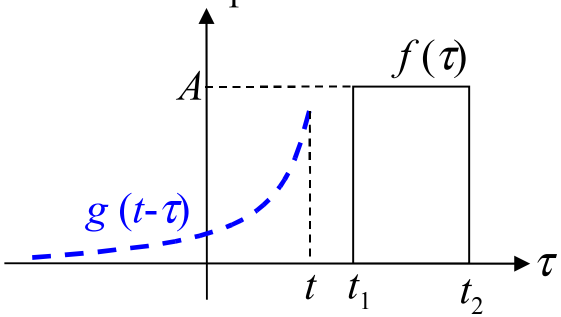
On a $z(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau$

Notion de convolution

$$z(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)e^{-a(t-\tau)}\Gamma(t-\tau)d\tau \quad \Rightarrow \quad z(t) = \int_{0}^{t} f(\tau)e^{-a(t-\tau)}d\tau$$ car $\Gamma(t-\tau) \neq 0$ pour $\tau < t$

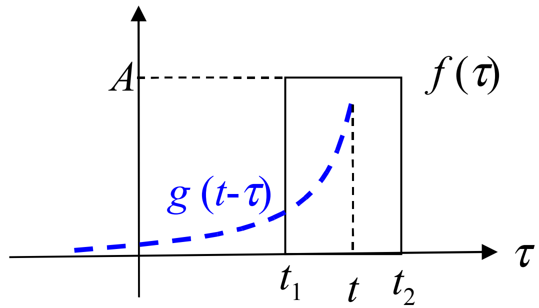
On distingue 3 cas :

- $t < t_1$



$$f(\tau) = 0 \Rightarrow z(t) = 0$$

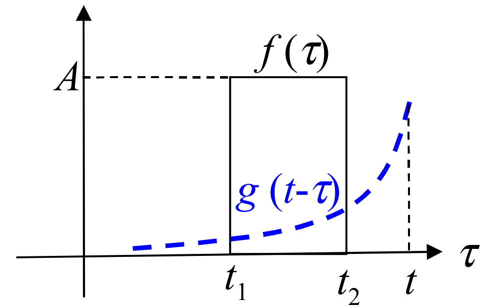
- $t_1 < t < t_2$



$$z(t) = \int_{t_1}^{t} Ae^{-a(t-\tau)}d\tau$$

On trouve $z(t) = \dfrac{A}{a}\left(1 - e^{-a(t-t_1)}\right)$

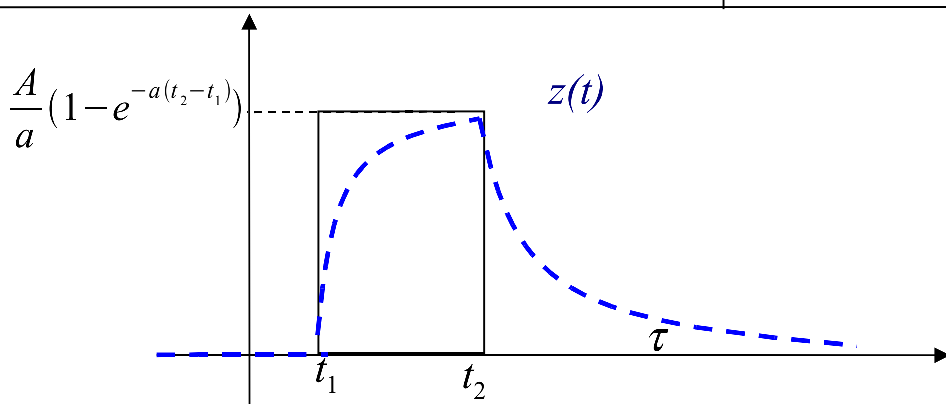
- $t > t_2$



$$z(t) = \int_{t_1}^{t_2} Ae^{-a(t-\tau)}d\tau$$

$$z(t) = \frac{Ae^{-at}}{a}\left(e^{at_2} - e^{at_1}\right)$$

Finalement, on a :



Convolution

Propriétés

- Commutativité : $f(t) * g(t) = g(t) * f(t)$
- Associativité : $e(t) * f(t) * g(t) = e(t) * \left(g(t) * f(t)\right) = \left(e(t) * f(t)\right) * g(t)$
- Distributivité par rapport à l'addition : $e(t) * \left(f(t) + g(t)\right) = e(t) * f(t) + e(t) * g(t)$
- Elément neutre du produit de convolution : impulsion de Dirac $f(t) * \delta(t) = f(t)$
- Translation temporelle (conv. avec un Dirac retardé) : $f(t) * \delta(t - t_0) = f(t - t_0)$

Convolution

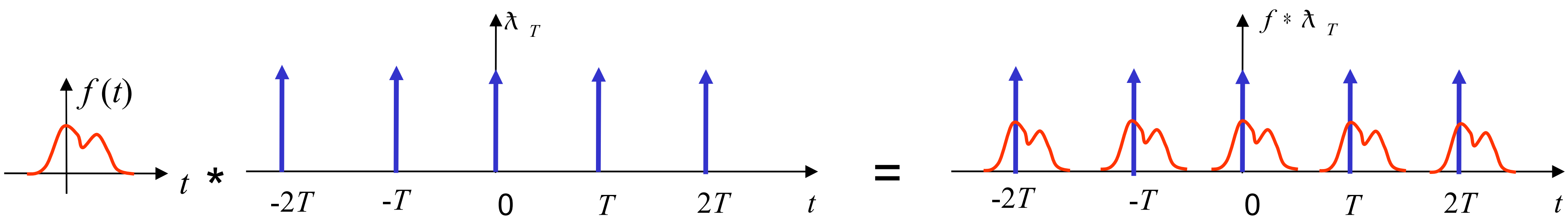
❑ Propriétés (suite et fin)

- Convolution avec un peigne de Dirac

Peigne de Dirac $\text{Ш}_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT)$

$$f(t) * \text{Ш}_T(t) = \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(t) * \delta(t - kT)}_{\text{Convolution avec un Dirac retardé}}$$ Linéarité de la convolution : on sort la somme

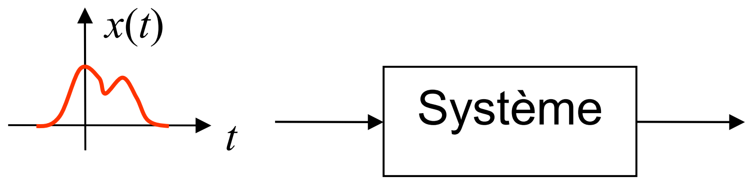
$$\Rightarrow \quad f(t) * \text{Ш}_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(t - kT)$$



On obtient une fonction périodique formée par la recopie de f autour de chaque dent

Réponse d'un système LTI à une entrée quelconque

- Application de la notion de convolution



$y(t) = \ ?$

Réponse du système
on cherche $y(t) = S[x(t)]$

Élément neutre
de la convolution

$$x(t) = x(t) * \delta(t) \Rightarrow x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$$

$$\Rightarrow y(t) = S\left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau\right]$$

Propriété de linéarité du système : $y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, S[\delta(t-\tau)]\, d\tau$ (Voir diapo 5)

Propriété d'invariance temporelle du système : $S[\delta(t-\tau)] = h(t-\tau)$

(réponse impulsionnelle décalée,
voir diapos 5 et 8)

On en déduit $y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)d\tau \Rightarrow$ $y(t) = x(t) * h(t)$

La réponse du système à une entrée quelconque x est la convolution de x avec la réponse impulsionnelle h du système. h caractérise entièrement le système.

Stabilité et réponse impulsionnelle

On dit qu'un système est stable si sa sortie est bornée lorsque son entrée est bornée

- L'entrée x est bornée i.e. $\exists\ M_x \,/\, |x(t)| < M_x \quad \forall\ t$
- Réponse du système : $y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$

Quelle est la condition sur $h(t)$ pour que $y(t)$ soit bornée ?

On montre que la sortie est bornée ssi $\int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)|\, d\tau < \infty$

Un système est stable ssi sa réponse impulsionnelle est absolument intégrable

Nous venons de présenter les aspects temporels des systèmes continus LTI

Maintenant nous allons nous intéresser aux aspects fréquentiels

Systèmes et transformée de Fourier

$$x(t) \longrightarrow \boxed{\text{Système}} \longrightarrow y(t)$$

Soit le système de réponse impulsionnelle h

Soit le signal d'entrée $x(t) = Ae^{j2\pi ft}$

Que vaut la sortie y(t) ?

Réponse fréquentielle des systèmes LTI

$$y(t) = h(t) * x(t) \quad \Rightarrow \quad h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\, x(t-\tau)\, d\tau$$

$$h(t) * Ae^{j2\pi ft} = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\, Ae^{j2\pi f(t-\tau)}\, d\tau$$

Sortons ce qui ne dépend pas de τ : $h(t) * Ae^{j2\pi f_0 t} = Ae^{j2\pi ft} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\, e^{-j2\pi f\tau}\, d\tau}_{H(f)}$

$H(f)$ TF de la réponse impulsionnelle

$$\boxed{S(Ae^{j2\pi ft}) = h(t) * Ae^{j\pi ft} = H(f).\, Ae^{j2\pi ft}}$$

La réponse d'un système LTI à une exponentielle complexe (resp. signal sinusoïdal) est une exponentielle complexe (resp. signal sinusoïdal) multipliée par le gain complexe $H(f)$

Systèmes et transformée de Fourier

Réponse fréquentielle des systèmes LTI

$$x(t) \longrightarrow \boxed{\text{Système}} \longrightarrow y(t)$$

Si le signal d'entrée est quelconque, on peut l'exprimer sous la forme d'une somme infinie d'exponentielles complexes : c'est la TF inverse $x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df$

$$y(t) = S[x(t)] \quad \Rightarrow \quad y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} S\left[X(f) e^{j2\pi ft}\right] df$$ (linéarité du système)

En vertu du résultat précédent $S\left[X(f) e^{j2\pi ft}\right] = H(f).X(f).e^{j2\pi ft}$

$$\Rightarrow \quad y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{H(f).X(f)}_{Y(f)}.e^{j2\pi ft} df$$ (définition de la TF inverse de Y)

(TF de la sortie y)

Donc si $y(t) = h(t) * x(t)$ alors $Y(f) = X(f).H(f)$

$H(f)$: fonction de transfert

convolution en temporel $\Leftrightarrow$ *multiplication en fréquentiel*

Systèmes et transformée de Fourier

Représentation fréquentielle des systèmes LTI

$$x(t) \longrightarrow \boxed{\text{Système}} \longrightarrow y(t)$$

$$Y(f) = X(f).H(f)$$

$H(f)$

Module $|H(f)|$

Argument $\phi(f) = \arg(H(f))$

- $H(f)$: représentation fréquentielle du système
- Simplicité de la relation entrée/sortie en fréquentiel
- La représentation fréquentielle illustre l'aptitude du système à faire passer une composante fréquentielle présente dans le signal d'entrée

Relations entrée-sortie en fréquentiel

$$Y(f) = X(f).H(f) \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Module } |Y(f)| = |X(f)|.|H(f)| \\ \text{Argument } \arg(Y(f)) = \phi(f) + \arg(X(f)) \\ \text{Densité spectrale d'énergie } S_{yy}(f) = S_{xx}(f).S_{hh}(f) \end{array} \right.$$

Systèmes et transformée de Fourier

- Théorème de Plancherel

La transformée de Fourier d'un produit de convolution est un produit simple et réciproquement

$$x(t) * y(t) \leftrightarrow X(f).Y(f)$$

$$x(t).y(t) \leftrightarrow X(f) * Y(f)$$

Attention : la TF d'un signal n'est pas toujours définie !
Comment faire lorsque x(t) n'a pas de TF ?

=> Introduction de la transformée de Laplace

Transformée de Laplace (TL)

De la TF à la TL

Soit la TF d'un signal $x(t)$: $X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}dt$. Cette TF existe si l'intégrale converge

Dans le cas contraire, multiplions $x(t)$ par une exponentielle décroissante telle que

$\int_{-\infty}^{+\infty} \left|x(t)e^{-\sigma t}\right|dt < \infty$ avec $\sigma > 0$. Calculons la TF de ce nouveau signal

$$X(f,\sigma) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-\sigma t}e^{-j2\pi ft}dt \Rightarrow X(f,\sigma) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-(\sigma+2\pi f)t}dt$$

Posons $s = \sigma + j2\pi f$ On obtient :

$$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-st}dt$$

Définition de la transformée de Laplace du signal x

Transformée de Laplace = généralisation de la TF : décomposition de $x(t)$ sur une base de fonctions exponentielles e^{st} (avec s complexe)

Ne pas poser que $X(f) = X(s)$ pour $s=j2\pi f$
(car $X(s)$ existe toujours mais pas $X(f)$!)

Transformée de Laplace

Convergence de la TL

$$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-st}dt$$

$X(s)$ n'est défini que si l'intégrale converge

$$s = \sigma + j2\pi f$$

Définition : on appelle Région de Convergence (RC) de la TL, l'ensemble des complexes s tels que l'intégrale converge.

Exemple

Calculer la TL du signal $x(t) = e^{at}\Gamma(t)$

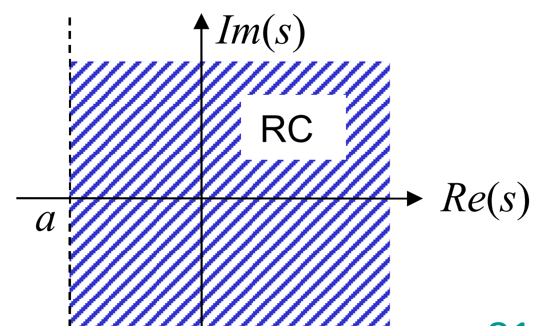
$$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{at}\Gamma(t)e^{-st}dt \quad \Rightarrow \quad X(s) = \int_{0}^{+\infty} e^{(a-s)t}dt$$

$$\Rightarrow \quad X(s) = \frac{1}{a-s}\left[e^{(a-s)t}\right]_0^{+\infty} \quad \Rightarrow \quad X(s) = \frac{1}{a-s}\left[\lim_{t\to+\infty} e^{(a-s)t} - 1\right]$$

Or $a - s = a - \sigma - j2\pi f$ D'où $\lim_{t\to+\infty} e^{(a-s)t} = \lim_{t\to+\infty} e^{(a-\sigma-j2\pi f)t}$

Cette limite est nulle si $a - \sigma < 0$ i.e. $\mathrm{Re}(s) > a$

$$X(s) = \frac{1}{s-a} \quad \text{avec} \quad \mathrm{Re}(s) > a$$



Transformée de Laplace : propriétés

$$\left.\begin{array}{ll}
\text{Linéarité} & a_1x_1(t)+a_2x_2(t) \leftrightarrow a_1X_1(s)+a_2X_2(s) \\[2ex]
\text{Convolution} & x(t)*y(t) \leftrightarrow X(s).Y(s) \\[2ex]
\text{Translation temporelle} & x(t-t_0) \leftrightarrow e^{-st_0}X(s) \\[2ex]
\text{Translation fréquentielle} & e^{at}x(t) \leftrightarrow X(s-a)
\end{array}\right\}\ \text{Idem TF}$$

- Dérivation
  - $\frac{dx(t)}{dt} \leftrightarrow sX(s)-x(0^+)$ $x\left(0^+\right)$: condition initiale
  - $x^{(k)}(t) \leftrightarrow s^kX(s)-s^{k-1}x(0^+)-s^{k-2}x^{(1)}(0^+)-\cdots-x^{(k-1)}(0^+)$

Avec : $x\left(0^+\right), x^{(1)}\left(0^+\right),\cdots,x^{(k-1)}\left(0^+\right)$: conditions initiales (souvent nulles => simplification)

- Intégration $\int_0^t x(\tau)d\tau \leftrightarrow \frac{X(s)}{s}$

Transformée de Laplace : propriétés

- Théorème de la valeur initiale $x\left(0^{+}\right)=\lim_{t\to 0^{+}} x(t)=\lim_{s\to +\infty} sX(s)$

- Théorème de la valeur finale $x_{\infty}=\lim_{t\to +\infty} x(t)=\lim_{s\to 0} sX(s)$

- Transformée de Laplace et systèmes LTI
  - Réponse du système à une entrée $x(t)$ <u>quelconque</u>

$$y(t)=x(t)*h(t)$$

  - TL de la réponse

$$Y(s)=X(s).H(s) \qquad H(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}$$

Fonction de transfert ou transmittance complexe du système

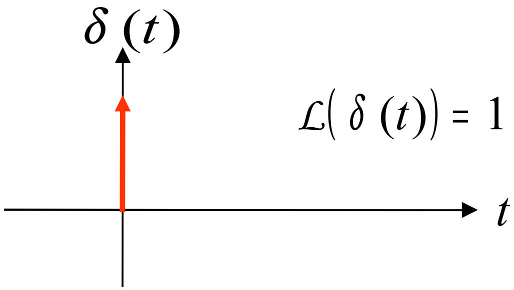
  - Lien entre la transmittance et la représentation spectrale $H(s) \rightarrow H(f)$

Si $s=j2\pi f$ appartient à la région de convergence de la représentation de Laplace, alors on peut poser $s=j2\pi f$, et on obtient la relation suivante :

$$H(f)=H(s)\big|_{s=j2\pi f}$$

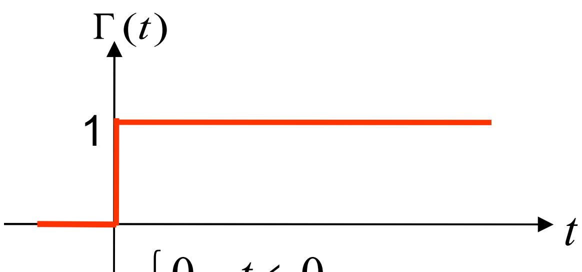
TL de quelques signaux usuels (Cf. table)

- Impulsion de Dirac $\delta(t)$



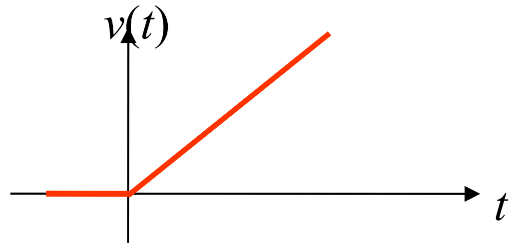
$$\mathcal{L}\left(\delta(t)\right) = 1$$

- Echelon unité $\Gamma(t)$



$$\Gamma(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases} \qquad \mathcal{L}\left(\Gamma(t)\right) = \frac{1}{s}$$

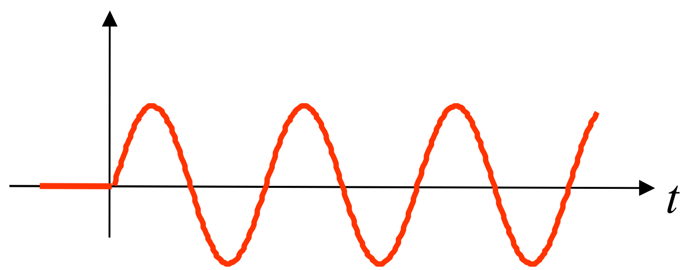
- Rampe ou échelon de vitesse



$$v(t) = t\Gamma(t)$$

$$\mathcal{L}\left(v(t)\right) = \frac{1}{s^2}$$

- Signal sinusoïdal



$$x(t) = \sin\left(\omega t + \varphi\right) \quad t \geq 0$$

$$\mathcal{L}\left(x(t)\right) = \frac{s\sin\varphi + \omega\cos\varphi}{s^2 + \omega^2}$$

Le plus utilisé : $x(t) = A\,\Gamma(t)\,e^{s_1 t} \rightarrow Laplacien = \dfrac{A}{s - s_1}$

Transformée de Laplace et systèmes LTI

Systèmes LTI

- Systèmes régis par une équation différentielle linéaire à coefficients constants

$$a_n y^{(n)}(t) + \cdots + a_1 y^{(1)}(t) + a_0 y(t) = b_m x^{(m)}(t) + \cdots + b_1 x^{(1)}(t) + b_0 x(t) \qquad \text{avec } m \le n$$

On suppose les conditions initiales nulles i.e.

$$y^{(n-1)}(0) = \cdots = y^{(1)}(0) = y(0) = 0$$

$$x^{(m-1)}(0) = \cdots = x^{(1)}(0) = x(0) = 0$$

En utilisant la TL, on a :

$$a_n s^n Y(s) + \cdots + a_1 s Y(s) + a_0 Y(s) = b_m s^m X(s) + \cdots + b_1 s X(s) + b_0 X(s)$$

$$\left(a_n s^n + \cdots + a_1 s + a_0\right) Y(s) = \left(b_m s^m + \cdots + b_1 s + b_0\right) X(s)$$

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_m s^m + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \cdots + a_1 s + a_0}$$

La fonction de transfert a la forme d'une fraction rationnelle : $H(s) = \dfrac{N(s)}{D(s)}$

$N(s)$ et $D(s)$: polynômes en s de degrés respectifs m et n

Notion de pôles et zéros - critère de stabilité

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_m s^m + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \cdots + a_1 s + a_0}$$

Notion de pôles (modes) et zéros du système

- Les pôles sont les racines $\lambda_i \in \mathbb{C}$ du polynôme $D(s)$. Les pôles sont soit réels, soit des paires de pôles complexes conjugués

- Les zéros sont les racines $z_i \in \mathbb{C}$ du polynôme $N(s)$

Fonction de transfert et stabilité

Le système est stable ssi tous les pôles de $H(s)$ sont à partie réelle strictement négative

- Exemples

$$H(s) = \frac{s-1}{s+1}$$

$\lambda =$

Concl :

$$H(s) = \frac{s+2}{(s+1)(s-3)}$$

$\lambda_1 =$ $\lambda_2 =$

Concl :

$$H(s) = \frac{3}{s^2 + 5s + 6}$$

$\lambda_1 =$ $\lambda_2 =$

Concl :

Réponse d'un système LTI par la TL

Exemple

Soit le système caractérisé par : $\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \frac{dy(t)}{dt} + 6y(t) = x(t)$

- Le système est ils stable ? Calculer la réponse impulsionnelle du système $h(t)$
- la réponse indicielle (réponse à l'échelon). Dans ce cas, préciser la valeur de la sortie y_∞

Solution :

On passe tout en laplace : $s^2 Y(s) + sY(s) + 6Y(s) = X(s)$ donc $H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{s^2+s+6}$

Calcul des pôles du système : $\Delta = b^2 - 4ac = -23 < 0$ $\quad s_{1,}s_2 = \frac{-1 \pm i\sqrt{23}}{2}$

Les deux pôles sont à partie réelle négative; le système est donc stable.

La réponse indicielle h(t) s'obtient à partir de H(s) grâce à la décomposition en éléments simples :

$H(s) = \frac{1}{s^2+s+6} = \frac{A}{s-s_1} + \frac{B}{s-s_2}$ $\quad$ Après calcul, on trouve : $A = \frac{1}{s_1 - s_2}$; $B = \frac{1}{s_2 - s_1}$

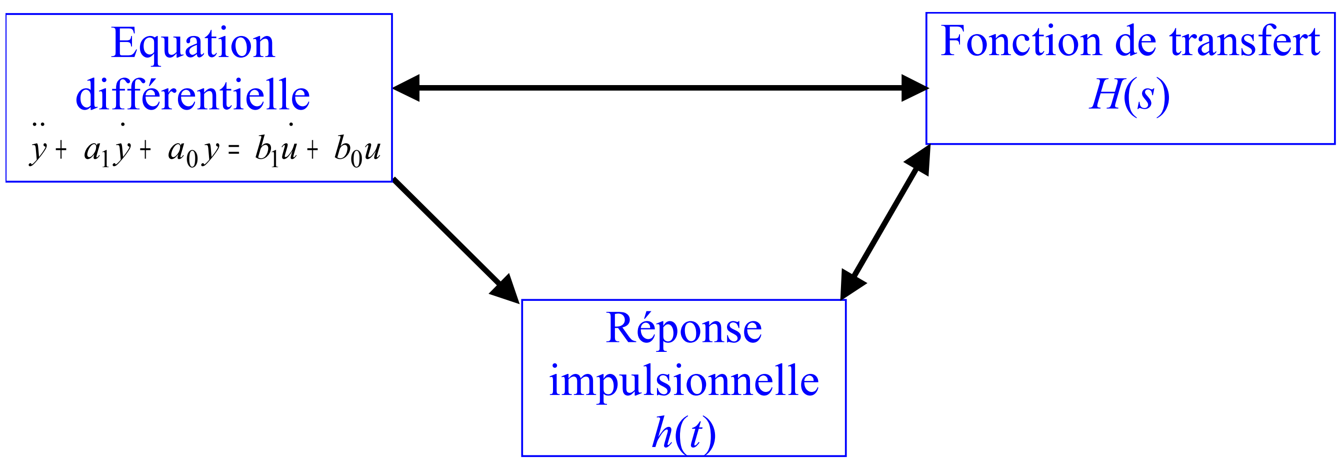
Finalement : $h(t) = A e^{s_1 t} \Gamma(t) + B e^{s_2 t} \Gamma(t)$

Réponse indicielle : $x(t) = \Gamma(t)\, donc\, X(s) = 1/s \quad \Rightarrow \quad Y(s)(s^2+s+6) = 1/s$ $\quad$ Puis Laplace inverse ...

y_∞ : Il faut utiliser le théorème de la valeur finale : $y_\infty = \lim_{s \to 0} s \frac{1}{s} \frac{1}{s^2+s+6} = \frac{1}{6}$

Conclusion

- Caractérisation d'un système linéaire continu par :
  - relation entre $x(t)$ et $y(t)$ [équation différentielle]
  - réponse impulsionnelle $h(t)$
  - réponse fréquentielle $H(f)$
  - transmittance complexe $H(s)$



Rappels sur la décomposition en éléments simples

- La marche à suivre :

Soit la fraction S(p) suivante à décomposer : $S(p)=\frac{p^m+a_{m-1}p^{m-1}+\ldots+a_2p^2+a_1p+a_0}{p^n+b_{n-1}p^{n-1}+\ldots+b_2p^2+b_1p+b_0}=\frac{N(p)}{D(p)}$

<u>1ère étape</u> : Si $m>n$, il faut extraire la valeur entière : quotient des polynômes

On obtient alors $S(p)=C_0+\frac{N_1(p)}{D_1(p)}$, et la valeur entière donne une impulsion de Dirac.

<u>2ème étape</u> : Calculer les pôles du système, cad les zéros du dénominateur.

- Si n<3 : facile
- Sinon, essayer des valeurs simples -1, 0, 1, 2, etc. et espérer ...

<u>Rmq</u>. : nous ne traiterons que le pôles simples de type *(p – p1)*

<u>3ème étape</u> : Mettre sous la forme $S(p)=C_0+\frac{A_1}{p-p_1}+\frac{A_2}{p-p_2}+\ldots+\frac{A_n}{p-p_n}$

On trouve les A_n en multipliant par $(p - p_n)$ et en prenant $p = p_n$: $A_n=\lim_{p\to p_n}\frac{N_1(p)}{D_1(p)}$

Une fois les A_n trouvés, le laplacien inverse devient très facile !

Exemple

Exemple

Soit le système caractérisé par : $\ddot{y}(t)+3\,\dot{y}(t)+2\,y(t)=\ddot{x}(t)+2\,\dot{x}(t)-x(t)$
Donner la réponse impulsionnelle h(t) du système.

Solution

On passe en Laplace : $s^2 Y(s)+3\,s\,Y(s)+2\,Y(s)=s^2 X(s)+2\,s\,X(s)-X(s)$

D'où : $H(s)=\dfrac{Y(s)}{X(s)}=\dfrac{s^2+2s-1}{s^2+3\,s+2}$

Degré num = degré den donc Valeur entière : $H(s)=\dfrac{(s^2+3\,s)+2-s-3}{s^2+3\,s+2}=1+\dfrac{-s-3}{s^2+3\,s+2}$

Calcul des pôles : $\Delta=b^2-4\text{ac}=9-4*2=1>0$ donc $s_1,s_2=\dfrac{-3\pm\sqrt{1}}{2}=-1,-2$

Partie réelle < 0, Donc le système est stable. H(s) peut s'écrire : $H(s)=1+\dfrac{A}{s+1}+\dfrac{B}{s+2}$

Par identification et en multipliant par *(s+ 1)* pris en *s=s1*, on trouve *A* = *-2*, puis *B* = *1*

Finalement $H(s)=1+\dfrac{-2}{s+1}+\dfrac{1}{s+2}$ et grâce aux tables, on repasse en temporel :

$$\boxed{h(t)=\delta(t)-2\,u(t)\,e^{-t}+u(t)\,e^{-2t}}$$