Travaux dirigés de Traitement du Signal

Alain Rakotomamonjy, Komi Gasso et Clément Chatelain

17 septembre 2007

Table des matières

1 Introduction aux signaux temporels

1.1 Représentations de signaux

1. Représenter les signaux suivants en fonction du temps t
   (a) $\Pi_T(t-1)$
   (b) $t\Gamma(t)$
   (c) $(t-2)\Gamma(t-3)$
   (d) $(-t+3)\Gamma(t-2)\Gamma(-t+3)$
   (e) $e^{-at}\Gamma(t-1)$

1.2 Energie et Puissance

1. Montrer que pour un signal périodique, la puissance moyenne est égale à la puissance du signal sur une période.

   Rappel : puissance moyenne :

$$P = \lim_{T_0 \to \infty} \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} |x(t)|^2 dt$$

   puissance du signal sur une période :

$$\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt$$

2. Calculer l'energie et la puissance des signaux suivants :
   (a) $x(t) = \Gamma(t)e^{-at} \qquad a > 0$
   (b) $x(t) = A\cos(2\pi f_o t) \qquad a > 0, f_o > o$
   (c) $x(t) = t\Gamma(t)$
   (d) $x(t) = \Pi_T(t)$
3. Soit un signal périodique de période $2T$ contaminé par un bruit additif de type sinusoïdal $b(t) = A\cos(2\pi f_o t)$ avec A quelconque et $f_o = 50$ Hz. Donner le rapport signal sur bruit de l'ensemble si :

$$s(t) = \Delta_T(t) \qquad -T \leq t \leq T$$

   avec

$$\Delta_T(t) = \begin{cases} O & |t| > T \\ t+T & -T \leq t \leq O \\ -t+T & 0 \leq t \leq T \end{cases}$$

1.3 Corrélation et Intercorrélation

1. Montrer que si $x(t)$ est périodique de période T alors la fonction d'autocorrélation C_{xx} est également périodique de période T.
2. Démontrer que pour les signaux réels à énergie finie, la relation suivante est vérifiée :

$$|C_{xy}(t)|^2 \leq C_{xx}(0)C_{yy}(0)$$

   Indication : utiliser les propriétés du polynome en λ

$$I(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x(t) + \lambda y(t-\tau))^2 dt$$

3. Le principe d'un radar consiste à émettre un signal de courte durée $u(t)$ qui, réfléchi par la cible , revient à l'émetteur après une durée t_1 proportionnelle à la distance de l'émetteur à la cible . Le signal reçu par le radar $x(t)$, étant affaibli et bruité, on utilise le maximum de la fonction de corrélation pour estimer la valeur de t_1. soit $x(t) = A.u(t - t_1)$, montrer que $C_{xu}(\tau)$ est maximum en t_1
4. Calculer les fonctions d'autocorrélation des fonctions suivantes :
   (a) $x(t) = \Gamma(t)e^{-at}$
   (b) $y(t) = cos(\pi \frac{t}{2})\Pi_2(t)$

1.4 Distributions

Exercices

1. Montrer que la dérivée d'un échelon est une impulsion de Dirac.
2. Soit la fonction $f_a(t)$ telle que :

$$f_a(t) = \begin{cases} 0 & |t| > \frac{a}{2} \\ \frac{1}{a} & -\frac{a}{2} \leq t \leq \frac{a}{2} \end{cases}$$

   on associe à $f_a(t)$ la distribution $\langle f_a(t), \phi \rangle$ dont l'expression est :

$$\langle f_a(t), \phi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f_a(t)\phi(t)dt$$

   Montrer que :

$$\langle f_a(t), \phi \rangle \longrightarrow \langle \delta, \phi \rangle$$

   quand a tend vers 0.

2 Transformée de Fourier

2.1 Représentation fréquentielle des signaux

(a) Donner l'allure du spectre fréquentiel des signaux suivants :
- a) $x(t) = 2sin(2\pi f_0 t)$
- b) $x(t) = sin(4\pi f_0 t + \pi/3)$
- c) $x(t) = 2cos(2\pi f_0 t) + sin(6\pi f_0 t)$
- d) $x(t) = 1$
- e) $x(t) = sin(2\pi f_0 t) + b(t)$, $b(t)$ étant un bruit blanc.

2.2 Décomposition en Série de Fourier

(a) Démontrer les liens entre les coefficient a_n et b_n de la décomposition en série de Fourier à partir de des coefficients c_n.

(b) Décomposer $f(t)$ en série de Fourier (T étant la période du signal)

$$f(t) = \begin{cases} A & |t| < \frac{T}{4} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

(c) T étant la période des différents signaux considérés,

i. calculer la décomposition en Série de Fourier de $x(t)$

$$x(t) = \begin{cases} A & 0 \leq t < \frac{T}{2} \\ -A & \frac{T}{2} \leq t < T \end{cases}$$

ii. en déduire la décomposition en Série de Fourier de $y(t)$

$$y(t) = \begin{cases} At & 0 \leq t < \frac{T}{2} \\ -At + AT & \frac{T}{2} \leq t < T \end{cases}$$

2.3 Transformée de Fourier

(a) Calculer les transformées de Fourier des signaux suivants

i. $x_1(t) = e^{-at}\Gamma(t) \qquad a > 0$

ii. $x_2((t) = e^{-a|t|} \qquad a > 0$

iii. $x_3(t) = \frac{1}{1+t^2}$

iv. $x_4(t) = \frac{1}{2-2t+t^2}$

(b) Le moment d'ordre n d'une fonction $g(t)$ est définie par l'equation suivante :

$$M_n = \int_{-\infty}^{+\infty} t^n g(t) dt$$

Montrer que, si chaque membre de l'égalité existe, alors on a :

$$M_n = \frac{1}{(i2\pi)^n} G^{(n)}(-f)\Big|_{f=0}$$

où $G^{(n)}$ est la dérivée n-ième de la Transformée de Fourier de $g(t)$

(c) Montrer que si $x(t)$ est réel alors $|X(f)|$ est pair et $argX(f)$ est impaire.

2.4 Transformée de Fourier, Distributions et autres propriétés

(a) La modulation en amplitude d'un signal est basé sur la relation suivante, qui est à demontrer :

$$x(t)\cos 2\pi f_0 t \longrightarrow \frac{1}{2}X(f - f_0) + \frac{1}{2}X(f + f_0)$$

(b) Calculer la transformée de Fourier au sens des distributions de la fonction généralisée

$$x(t) = t^n$$

et en déduire que la transformée de Fourier de 1 est une impulsion de Dirac.

(c) Calculer l'énergie des signaux suivants :

i. $x_1(t) = \frac{1}{1+t^2}$

ii. $x_2(t) = F_0 \mathrm{sinc}(\pi F_0 t) \cos(2\pi f_0 t)$

(d) Calculer la fonction d'autocorrélation du signal suivant :

$$x(t) = \frac{1}{1+t^2}$$

et en déduire son énergie.

(e) Montrer que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^3(t)}{t^3} dt = \frac{3\pi}{4}$$

et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^4(t)}{t^4} dt = \frac{2\pi}{3}$$

3 Systèmes Linéaires

3.1 Propriétés

(a) La relation d'entrée-sortie d'un système est $y(t) = x^2(t)$. Montrer que ce système n'est pas linéaire.

(b) Soit le système décrit par la relation d'entrée-sortie $y(t) = x(t)\cos(\omega t)$. Déterminer si ce système est stable, causal, linéaire et invariant.

(c) On considère un système S, linéaire, causal et invariant, d'entrée $x(t)$ et de sortie $y(t)$. La figure (1) montre $x_1(t)$ et la sortie $y_1(t)$ correspondante. Déterminer la réponse impulsionnelle du système et tracer la sortie $y_2(t)$ associée à $x_2(t)$.

$$INSERERFIGURE$$

3.2 Convolution

(a) Evaluez graphiquement le produit de convolution entre deux signaux rectangulaires d'amplitude 1 et de largeur T.

(b) Soit $y(t) = x(t) * h(t)$. Montrer que $x(t - t_1) * h(t - t_2) = y(t - t_1 - t_2)$.

(c) Soit $x(t)$ et $y(t)$ deux signaux causaux (nul pour $t < 0$). Montrer que les bornes de l'intégrale $x(t) * y(t)$ se simplifient.

(d) Soit un système linéaire invariant ayant pour entrée $x(t)$ et pour réponse impulsionnelle $h(t)$. Calculer la sortie $y(t)$ pour les cas suivants :

  i. $x(t) = \Gamma(t)$ et $h(t) = e^{-\alpha t}\Gamma(t)$ avec $\alpha > 0$.

  ii. $x(t) = e^{-\alpha t}\Gamma(t)$ et $h(t) = e^{\alpha t}\Gamma(-t)$ avec $\alpha > 0$.

(e) Soit $h(t)$ un signal triangulaire $\Delta_2(t)$ et $x(t)$ un peigne de Dirac de période T, calculer et représenter $y(t) = x(t) * h(t)$ si $T = 3$, $T = 2$ et $T = 1,5$.

(f) Soit un système linéaire et invariant défini par :

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-(t-\tau)} x(\tau) d\tau$$

Donner la réponse impulsionnelle du système et montrer que les fonctions exponentielles complexes e^{st} où $s \in \mathbb{C}$ sont les fonctions propres du système.

(g) On définit la fonction rectangle $R(t)$ par l'équation suivante :

$$R(t) = \begin{cases} 1 & -\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Tracer la fonction $h(t) = \frac{1}{T}R(\frac{t}{T})$, et calculer le produit de convolution de $h(t)$ avec un signal quelconque $x(t)$.

3.3 Système et Fourier

(a) Soit la fonction porte $\Pi_T(t)$, montrer que la fonction $\Delta_T(t)$ s'écrit :

$$\Delta_T(t) = \Pi_T(t) * \Pi_T(t)$$

en déduire l'expression de la Transformée de Fourier de $\Delta_T(t)$

FIG. 1 – Réprésentation des différentes relations entrées-sorties d'un système.

3.4 Système et Laplace

(a) Calculer les transformées de Laplace des fonctions suivantes :

i. $x(t) = e^{2t}\Gamma(t)$

ii. $x(t) = -e^{2t}\Gamma(-t)$

(b) Soit un système d'entrée $x(t)$ et de sortie $y(t)$, on sait que

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{1}{T}[y(t) - x(t)$$

calculer $y(t)$ pour $x(t) = \delta(t)$, $\Gamma(t)$ et $t\Gamma(t)$ en sachant que $y(0) = 0$.

– $x(t) = \delta(t)$

– $x(t) = t\Gamma(t)$

(c) Soit un système décrit par l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} + 2y(t) = 2x(t)$$

Déterminer les autres modèles mathématiques de ce sytème :

i. sa transmittance (avec ses pôles et ses zéros).

ii. sa réponse impulsionnelle.

(d) Discuter suivant les valeurs de α et de a l'allure des réponses d'un système de transmittance $\frac{1}{p+a}$ (système du premier ordre) au signal $e^{\alpha t}\Gamma(t)$.

(e) Calculer les réponses indicielles ($x(t) = \Gamma(t)$)et les réponses impulsionnelles $x(t) = \delta(t)$ des système du second ordre suivant :

i. $S(p) = \frac{1}{(1+pT)^2}$

ii. $S(p) = \frac{1}{(1+pT_1)(1+pT_2)}$

iii. $S(p) = \frac{\omega_n^2}{p^2+2\xi\omega_n p+\omega_n^2}$ $\qquad \xi \in]0, 1[$

4 Filtrage Analogique

(a) On utilise un filtre passe-bas idéal pour filtrer le signal $x(t)$ suivant :

$$x(t) = \frac{\sin(\pi a t)}{\pi t}$$

Déterminer la réponse du filtre $y(t)$ en fonction de a et en déduire dans quelle condition ce filtre ne modifie pas le signal d'entrée.

(b) Lors de l'enregistrement d'un signal sonore $s(t)$ en studio, un écho s'ajoute généralement à celui-ci et le signal réellement enregistré est en fait :

$$x(t) = s(t) + \alpha s(t-\tau) \qquad \alpha \in [0,1] \qquad \tau > 0$$

On cherche alors à construire un filtre analogique prenant en entrée $x(t)$ et traitant l'écho de manière à ce que la sortie du filtre soit exactement $s(t)$. Déterminer la transmittance et l'équation de ce filtre et vérifier que le résultat est correct.

(c) Considérons un filtre passe-bas idéal de fréquence de coupure $f_c = 2$. L'entrée de ce filtre est un signal carré périodique d'amplitude 10 et de période 2. Calculer la sortie du filtre.
Sur l'intervalle $[0,2]$, $x(t)$ s'écrit :

$$x_T(t) = \begin{cases} 10 & 0 < t \leq 1 \\ 0 & 1 < t \leq 2 \end{cases}$$

(d) Soit un filtre passe-bas idéal et un signal d'entrée $x(t) = e^{-2t}\Gamma(t)$. Déterminer la fréquence de coupure pour que le filtre passe exactement la moitié de l'énergie de ce signal.

(e) Soit le filtre RC classique avec en entrée $x(t)$ et en sortie $y(t)$:

i. donner sa réponse fréquentielle

ii. déterminer sa bande passante à -3 dB

iii. déterminer sa bande passante équivalente définie par :

$$W_{eq} = \frac{1}{|H(f)_{max}|^2} \int_0^{+\infty} |H(f)|^2 df$$

(f) Soit un filtre $H(f)$ passe-bas idéal de fréquence de coupure $f_c = \frac{1}{T}$ Soit le signal porte défini par :

$$\Pi_T(t) = \begin{cases} 1 & -\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Tracez $H(f)$, $X(f)$ (la TF de $\Pi_T(t)$) et $Y(f)$ (TF de la sortie du filtre). A l'aide de la transformée inverse, calculer puis tracer $y(t)$.
Mêmes questions avec un filtre de fréquence de coupure $f_c = \frac{2}{T}$. Conclusion ?

(g) Déterminer l'ordre minimale et la fréquence de coupure d'un filtre ayant une réponse plate dans la bande passante ayant une fréquence de coupure de $-1dB$ à 1 kHz et une atténuation minimale de $40dB$ à 5 kHz.

(h) Déterminer l'ordre du filtre de Tchebychev de type I ayant les même caractéristiques.

5 Echantillonnage

(a) Donner la fréquence d'échantillonnage minimale satisfaisant la condition de Shannon pour le signal :

$$x(t) = \frac{\sin t}{t}$$

(b) En montrant que $\Delta_T(t) = \Pi_T(t) * \Pi_T(t)$, déduire la fréquence minimale d'échantillonage permettant de respecter le théorème de Shannon du signal :

$$x(t) = \frac{\sin^2(\pi F_o t)}{\pi^2 t^2}$$

(c) Soit un signal réel $x(t)$ à support spectral borné dont la fréquence maximale est de Fmax. Quelle est la fréquence maximale des signaux suivants :

i. $\frac{dx(t)}{dt}$

ii. $x(t)\cos(2\pi f_0 t)$

iii. $x(2t)$

iv. $x^2(t)$

(d) Soit un signal $x(t)$ composé d'une combinaison linéaire de signal cosinusoidal de fréquence 300 Hz, 400 Hz, 1.3 kHz, 3.6 KHz. Ce signal est echantillonné à une fréquence F_e puis, passé à travers un filtre passe-bas idéal de fréquence de coupure F_c générant ainsi un signal $y(t)$. Quelle sont les composantes présentes dans $y(t)$ si :

i. $F_e = 2kHz$ et $F_c = 900Hz$

ii. $F_e = 2kHz$ et $F_c = 1500Hz$

iii. $F_e = 4kHz$ et $F_c = 500Hz$

(e) Soit le signal $x(t)$ définie comme :

$$x(t) = \cos(2\pi f_0 t) + \Pi_{T_1}(t) + \Delta_{T_2}(t)$$

Donner l'expression mathématique de la condition que doit respecter la fréquence d'échantillonnage pour satisfaire le théorème de Shannon. (on considérera que les spectres à support non borné seront négligeable à partir de 1% de leur valeur maximale.)

(f) Soit le signal $x(t)$ de transformée de Fourier $X(f)$. On considère le signal $y(t)$ dont la transformée de Fourier est :

$$Y(f) = \frac{1}{T} X(f) * \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \delta(f - \frac{k}{T})$$

i. en déduire la formule sommatoire de Poisson :

$$\frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(f - \frac{k}{T}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT) e^{-j2\pi k f T}$$

ii. Supposons que l'on ait :

$$z(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) h(t - nT)$$

donner l'expression de $Z(f)$ en fonction de $X(f)$ et $H(f)$.

iii. Montrer que si $X(f)$ est à support borné sur $[-B, B]$ et si $\frac{1}{T} > 2B$, alors $x(t)$ peut être reconstruit exactement à partir des échantillons $\{x(nT)\}_{n\in\mathbb{Z}}$.

iv. Montrer alors que :

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)h(t - nT) \qquad \text{avec } h(t) = \text{sinc}(2Bt)$$

(g) Soit $x(t)$ un signal connu sur une durée T de support fréquentiel borné sur $[-B, B]$

i. On échantillonne $x(t)$ à la fréquence F_e. Sachant qu'il y a N échantillons sur la durée T de mesure, quelle relation doit on avoir entre N, T et B pour ne pas perdre d'information sur le signal ?

ii. Le fait de ne conserver que N échantillons équivaut à tronquer le signal échantillonné par une fenêtre rectangulaire $h(t)$ telle que :

$$h(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t \leq< NT_e \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Donner l'expression du signal échantillonné tronqué $x_{et}(t)$ et de son spectre $X_{ef}(f)$ ($Te = \frac{1}{F_e}$). On montrera également que :

$$X_{et}(f) = \frac{1}{T_e} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_h\left(f - \frac{n}{T_e}\right) \qquad \text{avec } X_h(f) = X(f) * H(f)$$

iii. Dans le cas pratique, on ne peut pas évaluer analytique $X_{et}(f)$ en tout point f. On échantillonne $X_{et}(f)$ à la fréquence f_0, et on obtient un ensemble de points d'évaluation de $\{X_{et}(nf_0)\}_{n\in\mathbb{Z}}$. Quelle relation doit on avoir entre f_0 et T pour ne pas perdre d'information sur le spectre de $X_{et}(f)$?

(h) Soit un signal $x(t)$ échantillonné à une fréquence Fe donnée. Le signal échantillonnée passe ensuite à travers un filtre de réponse impulsionnelle $h(t)$. On appelle $y(t)$ la sortie du filtre. Donner une expression analytique de $y(t)$ dans les cas suivants :

i. $x(t) = \text{sinc}\left(\frac{t}{\pi}\right) \qquad F_e = \frac{1}{\pi} \qquad H(f) = \Pi_F(f)$

ii. $x(t) = \text{sinc}\left(\frac{t}{\pi}\right) \qquad F_e = \frac{1}{\pi} \qquad H(f) = \Pi_{2F}(f)$

6 Transformée de Fourier Discrète

(a) Démontrer que si $y[n] = nx[n]$ alors la Transformée de Fourier à Temps Discrets de $y[n]$ s'écrit

$$Y(f) = \frac{i}{2\pi} \frac{dX(f)}{df}$$

(b) Calculer la transformée de Fourier à temps discret de

i. $\delta[n] + 6\delta[n-1] + 3\delta[n-2]$

ii. $a^n \Gamma[n]$ avec $|a| < 1$

iii. $-a^n \Gamma[-n-1]$ avec $|a| > 1$

iv. $(n+1)a^n \Gamma[n]$

Pour calculer ces TF à temps discrets, on peut utiliser la transformée en z et poser ensuite $z = e^{i2\pi f}$ si le cercle unité appartient à la région de convergence.

(c) On cherche à tirer profit des propriétés de la Transformée de Fourier pour le calcul

i. Calculer la Transformée de Fourier à temps discrets de $\Pi_N[n]$ avec N pair.

ii. En déduire le signal $x[n]$ dont la TFtd $X(f)$ sécrit :

$$X(f) = \begin{cases} 1 & \frac{1}{8} \leq |f| \leq \frac{3}{8} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

(d) Trouver le signal x[n] dont la transformée est $\cos^2(2\pi f)$

(e) Calculer la transformée de Fourier Discrète de ces signaux :

i. a^n avec $0 \leq n < N$

ii. $\Gamma[n] - \Gamma[n - n_0]$ avec $0 < n_0 < N$

(f) Calculer la TFD du signal

$$x[n] = \cos(2\pi f_0 n) \qquad \text{avec } 0 \leq n < N$$

Comparer le resultat si $f_0 = \frac{k_0}{N}$ et si $f_0 \neq \frac{k_0}{N}$ avec $k_0 \in \mathbb{N}$ et $k_0 < N$. Expliquer la différence.

(g) On veut numériser un signal temporel $x(t)$ dont la bande spectrale est [20 10000] Hz .

i. à quelle fréquence faut il l'échantillonner pour ne pas perdre d'information ?

ii. Si on l'échantillonne à la fréquence minimale pendant 0.1 secondes, de combien d'échantillons est constitué le signal discret ?

iii. On effectue la TFD de ce signal et on obtient un signal discret $\{X[k]\}_{k=0\ldots N-1}$. A quelle fréquence correspond l'indice $k = 150$. Et $k = 800$?

iv. Quelle est la résolution entre deux échantillons spectrales ?

(h) A l'entrée d'un système discret de réponse impulsionelle discret $h[n] = \{1, 2, 3, 4\}$, on applique le signal $x[n] = \{1, 0, 1, -1, -1, 1, 2, 1\}$

i. Déterminer la sortie du système au moyen d'une convolution linéaire

ii. Déterminer la sortie du système au moyen d'une convolution circulaire

iii. Comparer et conclure

(i) On considère un signal $m(t)$, à temps continu, de spectre $M(f)$. On note

$$x(t) = (1 + k \cdot m(t)) \cdot \cos(2\pi f_0 t))$$

le signal modulé en amplitude par $m(t)$ avec porteuse et $X(f)$ sa transformée de Fourier.

i. Donner l'expression de $X(f)$ en fonction de k, f_0 et $M(f)$

ii. On suppose que $f_0 = 50kHz$ et que le signal $m(t)$ est de la forme :

$$m(t) = \cos(2\pi f_1 t) + 1.8\cos(2\pi f_2 t) + 0.9\cos(2\pi f_3 t)$$

avec $f_1 = 2310Hz$, $f_2 = 3750Hz$ et $f_3 = 4960Hz$. Déterminer $X(f)$

iii. En déduire la durée minimale d'observation du signal qui permet de distinguer, par analyse de Fourier les fréquences présentes dans le spectre de $x(t)$.

iv. Quelle est la longueur de transformée de Fourier rapide faut -il prendre afin de lire le spectre avec une précision de $100Hz$

v. Ecrire un programme qui trace le spectre du signal modulé.

(j) Montrer que le calcul d'une transformée de Fourier discrète d'ordre $L = 2^M$ peut être réduit au calcul de 2 TFD d'ordre $\frac{N}{2}$. Tracer le diagramme correspondant aux termes de la transformée de Fourier rapide sur $L = 8$ points fréquentiels.

7 Système numériques et Transformée en z

7.1 Transformée en z

(a) Donner la transformée en z et la région de convergence des signaux suivants :

i. $x_1[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n \Gamma[n] + \left(\frac{1}{3}\right)^n \Gamma[n]$

ii. $x_2[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n \Gamma[n] + \left(\frac{1}{2}\right)^n \Gamma[-n-1]$

iii. $x_3[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n \Gamma[n] + \left(\frac{1}{3}\right)^n \Gamma[-n-1]$

(b) Soit

$$x[n] = a^{|n|} \qquad a \in \mathbb{C}$$

calculer $X(z)$ et donner sa région de convergence.

(c) Calculer la TZ des signaux suivants :

i. $x_1[n] = \delta[n] + 2\delta[n-1]$

ii. $x_2 = \begin{cases} 1 & n \in [-N, N] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

iii. $x_3 = \Gamma[n] - n\Gamma[n] + \left(\frac{1}{3}\right)^n \Gamma[n-2]$

iv. $x_4 = (0.5)^n n\Gamma[n]$

(d) Soit $X(z)$ la transformée en z du signal discret $x[n]$. Exprimer la transformée en z du signal discret $y[n] = n^2 x[n] en fonction de X(z)$.

7.2 Transformée en z inverse

(a) Trouver la TZ inverse de :

$$X(z) = z^2(1 - 0.5z^{-1})(1 - z^{-1})(1 + 2z^{-1})$$

(b) En utilisant la méthode de décomposition en élements simples, calculer la TZ inverse de :

i. $X_1(z) = \frac{z}{2z^2-3z+1} \qquad |z| < 0.5$

ii. $X_2(z) = \frac{z}{2z^2-3z+1} \qquad |z| > 1$

iii. $X_3(z) = \frac{z}{(z-1)(z-2)^2} \qquad |z| > 2$

iv. $X_4(z) = \frac{2z^3-5z^2+z+3}{(z-1)(z-2)} \qquad |z| < 1$

v. $X_5(z) = \frac{3}{z-2} \qquad |z| > 2$

7.3 Systèmes Numériques

(a) Un système discret est décrit par l'équation :

$$y[n] - 0.75y[n-1] + \frac{1}{8}y[n-2] = x[n]$$

i. Déterminer la réponse en fréquence du système

ii. Calculer la réponse impulsionelle $h[n]$ du système

(b) Soit le système discret :

$$y[n] = x[n] + x[n-1]$$

i. Déterminer la réponse en fréquence du système

ii. Calculer la réponse impulsionelle $h[n]$ du système

iii. Tracer le diagramme de Bode de $h[n]$

iv. Donner la bande passante à -3 dB du système

(c) Si un système linéaire a pour signal d'entrée :

$$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n \Gamma[n] + 2^n \Gamma[-n-1]$$

et pour signal de sortie :

$$y[n] = 6\left(\frac{1}{2}\right)^n \Gamma[n] - 6\left(\frac{3}{4}\right)^n \Gamma[n]$$

calculer la fonction de transfert $H(z)$ du système et déterminer si le système est stable et causal.

(d) Considérons le système linéaire et invariant défini par :

$$H(z) = \frac{z^{-1} - a^*}{1 - az^{-1}} \qquad |a| < 1$$

i. Proposer l'équation au différence définissant ce système

ii. Montrer que ce filtre est un filtre passe-tout (i.e son spectre fréquentiel est constante et vaut 1)

iii. On met un filtre de fonction de transfert $G(z)$ en cascade avec $H(z)$ de telle sorte que la fonction de transfert de l'ensemble est égale à 1. Si $G(z)$ est stable, calculer sa réponse impulsionelle.

(e) Soit un système de fonction de transfert :

$$H(z) = \frac{(1-2z^{-2})(1+0.4z^{-1})}{1-0.85z^{-1}}$$

Montrer que $H(z)$ peut s'écrire comme le produit de deux systèmes l'un étant à phase minimale, l'autre passe-tout.

(f) Soit un système de fonction de transfert :

$$H(z) = \frac{(3+z^{-1})(2-3z^{-1})}{1-0.5z^{-1}}$$

Montrer que $H(z)$ peut s'écrire comme le produit de deux systèmes l'un étant à phase minimale, l'autre à phase linéaire.

(g) Suite au suréchantillonnage d'un signal discret $x[k]$ réalisé en intercalant un zéro entre chacun de ses échantillons, on obtient le signal discret $y[n]$:

$$y[n] = \begin{cases} x[n/2] & \text{si } n = 2k \quad (n \text{ pair}) \\ 0 & \text{si } n = 2k+1 \quad (n \text{ impair}) \end{cases}$$

En remplaçant les échantillons nuls du signal discret par une valeur obtenue par interpolation linéaire, on obtient le signal discret $z[n]$:

$$z[n] = \begin{cases} y[n] & (\text{si } n \text{ pair}) \\ \frac{y[n-1]+y[n+1]}{2} & (\text{si } n \text{ impair}) \end{cases}$$

i. Montrer que l'interpolation linéaire n'est rien d'autre qu'un filtrage du signal $y[n]$. En déduire la réponse impulsionelle $h[n]$ du filtre correspondant et déterminer sa réponse fréquentielle $H(e^{j\omega})$ puis tracer son spectre en amplitude.

ii. Exprimer $y[n]$ en fonction de $x[\frac{n}{2}]$ et en déduire l'expression de la transformée de Fourier $Y(f)$ de $y[n]$ en fonction de $X(f)$.

iii. si $x[k]$ est un signal discret tel que $X(f) = \text{rect}(2f)$, tracer $|Z(f)|$ et en déduire le rôle du filtre interpolateur.

(h) On considère un système discret régit par l'équation aux différences suivante :

$$y[n] = \frac{1}{3}(x[n+m] + x[n+m-1] + x[n+m-2]) \qquad m \in \mathbb{Z}$$

i. Montrer qu'il s'agit d'un système linéaire invariant et discret

ii. Etudier les propriétés de causalité et de stabililité du système selon le paramètre m

iii. Calculer la réponse fréquentielle du système pour $m = 0$ et $m = 1$

iv. Tracer le spectre d'amplitude pour $m = 1$. Quelle est la fonction de ce système ?

(i) Soit un système discret défini par l'équation aux différences suivante :

$$y[n] - y[n-1] = \frac{1}{2}(x[n] + x[n-1] - x[n-2]) - x[n-3])$$

i. Calculer les premiers élements de la réponse impulsionelle causale du système (jusqu'à $n = 8$ et en déduire son expression en fonction de l'impulsion de Dirac $\delta[n]$

ii. Calculer la réponse fréquentielle du système et tracer son spectre en amplitude. Quel est le rôle de ce système ?

iii. Montrer que l'on peut réécrire l'équation aux différences sous une forme qui permet d'identifier le système à un filtre à réponse impulsionelle finie.

(j) Soit un circuit RLC série (AN : R= 100 Ω, L=1H, C=1 μF). Supposons que l'on applique une tension d'entrée $x(t)$ au borne de ce système et que l'on recueille la sortie $y(t)$ aux bornes de la capacité C.

i. Ecrire l'équation différentielle associée à ce système.

ii. Si l'on considère la période d'échantillonnage $T_e = 10^{-4}$, établir par la méthode d'équivalence de la dérivation l'équation aux différences du système discret équivalent.

iii. Donner l'expression de la réponse impulsionelle obtenue comme solution causale de l'équation aux différences

iv. Discuter de la stabilité du système en utilisant la transformée en z.

(k) Soit un système discret défini par l'équation aux différences suivante :

$$y[n] = x[n] + ay[n-1] \qquad a > 0$$

i. Calculer la réponse impulsionelle causale du système

ii. Quelle est la condition de stabilité du système ?

iii. Calculer la réponse du système au signal $x[n] = \Gamma[n]e^{j\omega_0 n}$ sachant que la condition initiale est $y[n] = 0$ pour $n < 0$.

iv. Montrer que $y[n]$ peut se décomposer en 2 termes dont l'un caractérise la réponse en régime transitoire et l'autre caractérise la réponse en régime permanent.

(l) On appelle filtre en Peigne, le système linéaire invariant discret défini par l'équation aux différences suivante :

$$y[n] = x[n] - x[n-N] \qquad N > 1, N \in \mathbb{N}$$

i. Donner l'expression de la réponse impulsionelle du système. En déduire si le système est un filtre à réponse impulsionelle finie ou à réponse impulsionelle infinie.

ii. Calculer la réponse fréquentielle du système en fonction du paramètre N.

iii. Tracer le spectre en amplitude du système pour $N = 4$.

iv. Pourquoi appelle-t-on ce système filtre en peigne ? Quelle est l'influence de N

8 Filtres Numériques

(a) Soit un filtre dont la réponse relation entrée sortie est $y[n] - ay[n-1] = x[n]$

   i. Donner une expression de la réponse fréquentielle de ce filtre.

   ii. Calculer sa réponse impulsionnelle et en déduire si c'est un filtre RIF ou RII .Tracer le module de H(f) pour $a = 0.9$ et $a = 0.5$

(b) Soit un filtre passe-bas discret dont la réponse impulsionnelle est $h[n]$. Montrer que le filtre dont la réponse impulsionnelle est donnée par :

$$g[n] = (-1)^n h[n]$$

est un filtre passe haut.

(c) Un système a pour réponse en z :

$$H(z) = \frac{b + z^{-1}}{1 - az^{-1}}$$

où a est un réel de strictement inférieur à 1. Trouver b pour que le système définisse un filtre passe-tout.

(d) Un système numérique est décrit par sa réponse impulsionnelle :

$$h[n] = \{2, 2, -2, -2\}$$

la première valeur étant $h[0]$. Calculer la réponse fréquentielle de ce filtre et tracer son module et sa phase. En déduire son type.

(e) Considérons le système continu défini par $H(p) = p$. Donner la réponse impulsionnelle et fréquentielle du filtre numérique obtenu par transformation bilinéaire et tracer son module.

(f) Montrer que la transformation bilinéaire d'un système continu défini par une fonction rationnelle $H(p)$ permet de conserver la stabilité.

(g) La réponse impulsionelle d'un filtre est :

$$h[0] = a \qquad h[1] = b \qquad h(2) = b \qquad h(3) = a \qquad \text{et } h[n] = 0 \forall n \notin \{0, 1, 2, 3\}$$

   i. Montrer que la phase de ce filtre est linéaire en fonction de la fréquence.

   ii. Pour quelle valeur de a et b, ce filtre est il un filtre passe-haut ?

(h) On cherche à réaliser un filtre numérique équivalent au filtre analogique de transmittance :

$$H_A(p) = \frac{1}{1 + 0.2p}$$

   i. Représenter le module de ce filtre en fonction de la fréquence.

   ii. Calculer la réponse en z de ce filtre obtenue par transformation bilinéaire pour une fréquence d'échantillonnage $T_e = 0.2$. quelle est sa fréquence de coupure ?

iii. Calculer la réponse en z d'un filtre similaire de même fréquence de coupure que le filtre analogique.

On rappelle que la correspondance entre fréquence analogique et fréquence numérique est :

$$2\pi f_A = \frac{2}{T_e} \tan\left(\frac{2\pi f_N T_e}{2}\right)$$

(i) Utiliser la méthode des fenêtres pour calculer la réponse impulsionnelle d'un filtre réel FIR causal d'ordre 24 approchant le filtre idéal suivant :

$$|H(f)| = \begin{cases} 1 & |f| \leq \frac{1}{10} \\ 0 & \frac{1}{10} < f < \frac{1}{2} \end{cases}$$

(j) A partir des spécifications suivantes, donner la réponse impulsionnelle d'un filtre satisfaisant au cahier des charges.

$$\begin{cases} 0.98 \leq |H(f)| \leq 1.02 & |f| \leq 0.15 \\ |H(f)| \leq 0.01 & 0.175 \leq |f| \leq 0.5 \end{cases}$$

(k) En utilisant la méthode de l'invariance impulsionelle, donner la fonction de transfert $H(z)$ du filtre obtenu en échantillonnant la réponse impulsionnelle du filtre analogique suivant :

$$H(p) = \frac{p+a}{(p+a)^2 + b^2}$$

(l) Utiliser la transformation bilinéaire pour obtenir un filtre numérique satisfaisant aux conditions suivantes

$$\begin{cases} 0.90 \leq |H(f)| \leq 1.00 & |f| \leq 0.10 \\ |H(f)| \leq 0.2 & 0.15 \leq |f| \leq 0.5 \end{cases}$$

Indice : Trouver d'abord un filtre analogique satisfaisant les spécifications, puis transformer ce filtre en numérique.

(m) Utiliser la transformée bilinéaire pour obtenir un filtre passe-bas du premier ordre ayant une fréquence de coupure à 0.1 Hz si Te=1.

(n) On veut synthétiser à l'aide de la méthode de la fênetre un filtre demi-bande idéal. Déterminer l'expression de la réponse impulsionelle $h[n]$ de longueur finie impaire $N = 15$ (ou paire $N = 6$). Afin d'atténuer les oscillations prévoir une fênetre de podération de Hamming.

(o) On veut synthétiser de manière récursive un filtre passe-bande idéal ayant une réponse impulsionelle $h[n]$ de longueur finie paire $N = 16$. Est ce qu'une réalisation récursive est plus avantageuse par rapport à une réalisation non récursive ? Discuter.

(p) On veut synthétiser en utilisant l'équivalence de la dérivation un filtre numérique à réponse impulsionelle infinie. On s'appuie sur un filtre analogique ayant une fonction de transfert :

$$H_a(p) = \frac{1}{1+p}$$

(q) On veut synthétiser en utilisant l'équivalence de l'intégration un filtre numérique à réponse impulsionelle infinie. On s'appuie sur un filtre analogique de Tchebycheff ayant une fonction de transfert :

$$H_a(p) = \frac{\alpha_0}{\sum_{k=0}^{K} \alpha_k p^k}$$