UV Traitement du signal

Cours 1

Introduction au Traitement du Signal

Représentation temporelle des signaux

ASI 3

Traitement du Signal

- Introduction au TS
- Transformation de Fourier
- Systèmes linéaires continus
- Filtrage analogique

- Continu → Discret
- TF en Discret
- Systèmes linéaires Discrets
- Filtrage Numérique
- DSP ?

Contenu du cours

- Introduction
  - Définition d'un signal
  - Qu'est-ce que le traitement du signal?
  - Chaîne de traitement de l'information
- Classification des signaux
- Signaux élémentaires
- Notions de corrélation
- Notions de distributions
  - Définition d'une distribution
  - Impulsion de Dirac

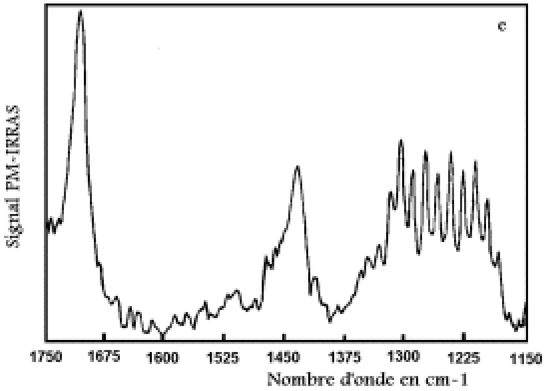
Introduction

❑ Signal

- ❖ Représentation physique d'une information à transmettre
- ❖ Entité qui sert à véhiculer une information

Exemples

- Onde acoustique : courant délivré par un microphone (parole, musique, …)
- Signaux biologiques : EEG, ECG
- Tension aux bornes d'un condensateur en charge
- Signaux géophysiques : vibrations sismiques
- Finances : cours de la bourse
- Débit de la Seine
- Images
- Vidéos
- etc.



❑ Bruit : Tout phénomène perturbateur pouvant géner la perception ou l'interprétation d'un signal

Introduction

❑ Définitions :

◆ Traitement du signal

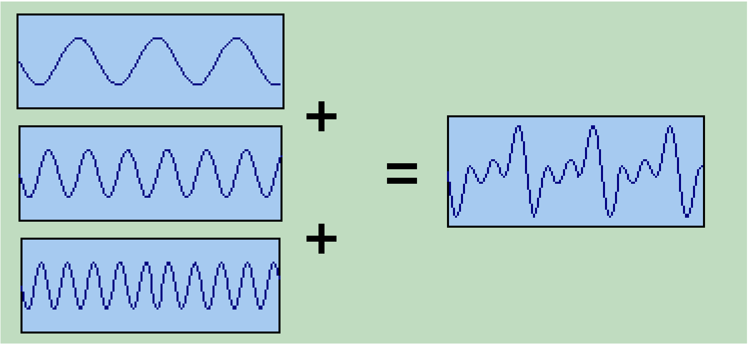
- Ensemble de techniques permettant de <u>créer</u>, <u>d'analyser</u>, de <u>transformer</u> les signaux en vue de leur exploitation

- Extraction du maximum d'information utile d'un signal perturbé par le bruit

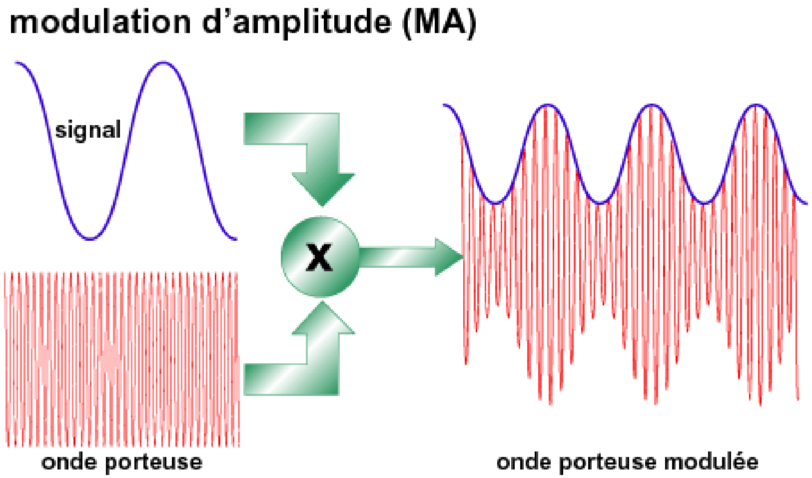
Notion très importante : <u>le bruit</u>

Introduction

- Fonctions du traitement du signal
  - <u>Créer</u> : Élaboration de signaux
    - Synthèse : création de signaux par combinaison de signaux élémentaires



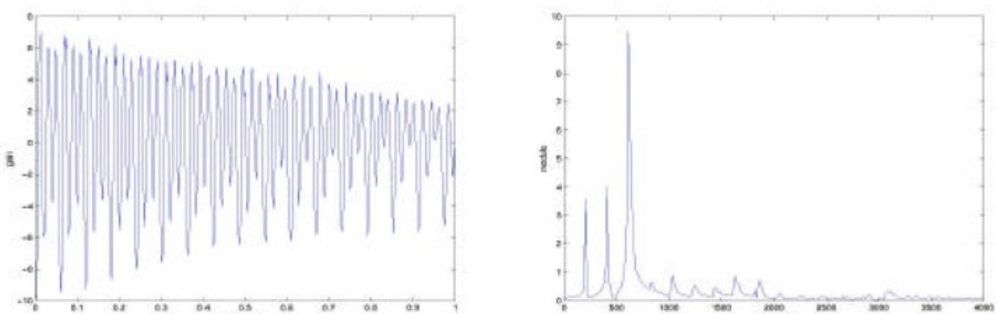
    - Modulation : adaptation du signal au canal de transmission



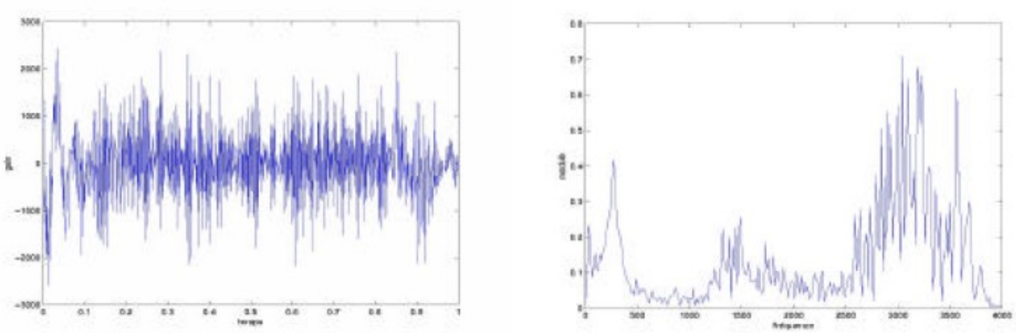
Introduction

Fonctions du traitement du signal

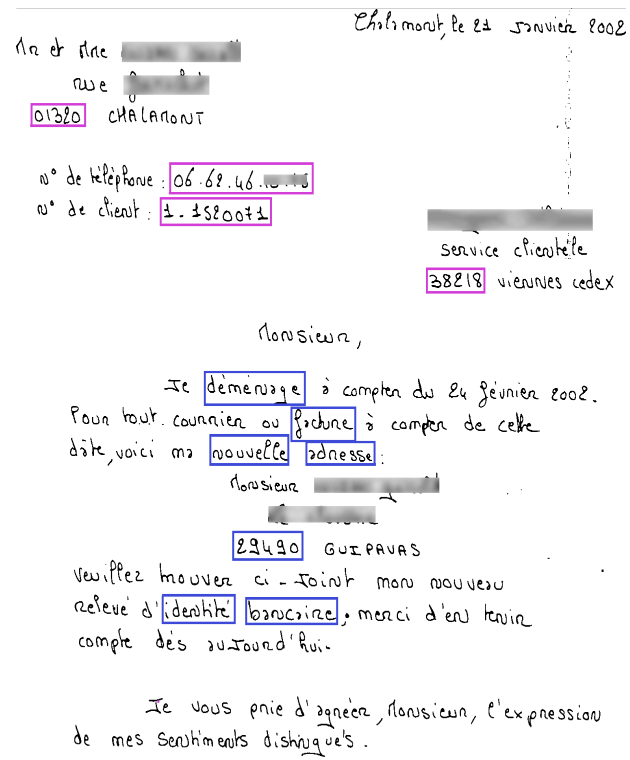
- <u>Analyser</u> : Interprétation des signaux
  - Détection : isoler les composantes utiles d'un signal complexe , extraction du signal d'un bruit de fond
  - Identification : classement du signal (identification d'une pathologie sur un signal ECG, reconnaissance de la parole, etc.)



un son voisé et son spectre (son “ eu ”)



un son non voisé et son spectre (son “ ch ”)



Chalamont, le 21 Janvier 2002

Mr et Mme [redacted]
rue [redacted]
01320 CHALAMONT

n° de téléphone : 06.62.46.[redacted]
n° de client : 1.1520071

[redacted]
service clientèle
38218 vienne cedex

Monsieur,

Je déménage à compter du 24 février 2002. Pour tout courrier ou facture à compter de cette date, voici ma nouvelle adresse :

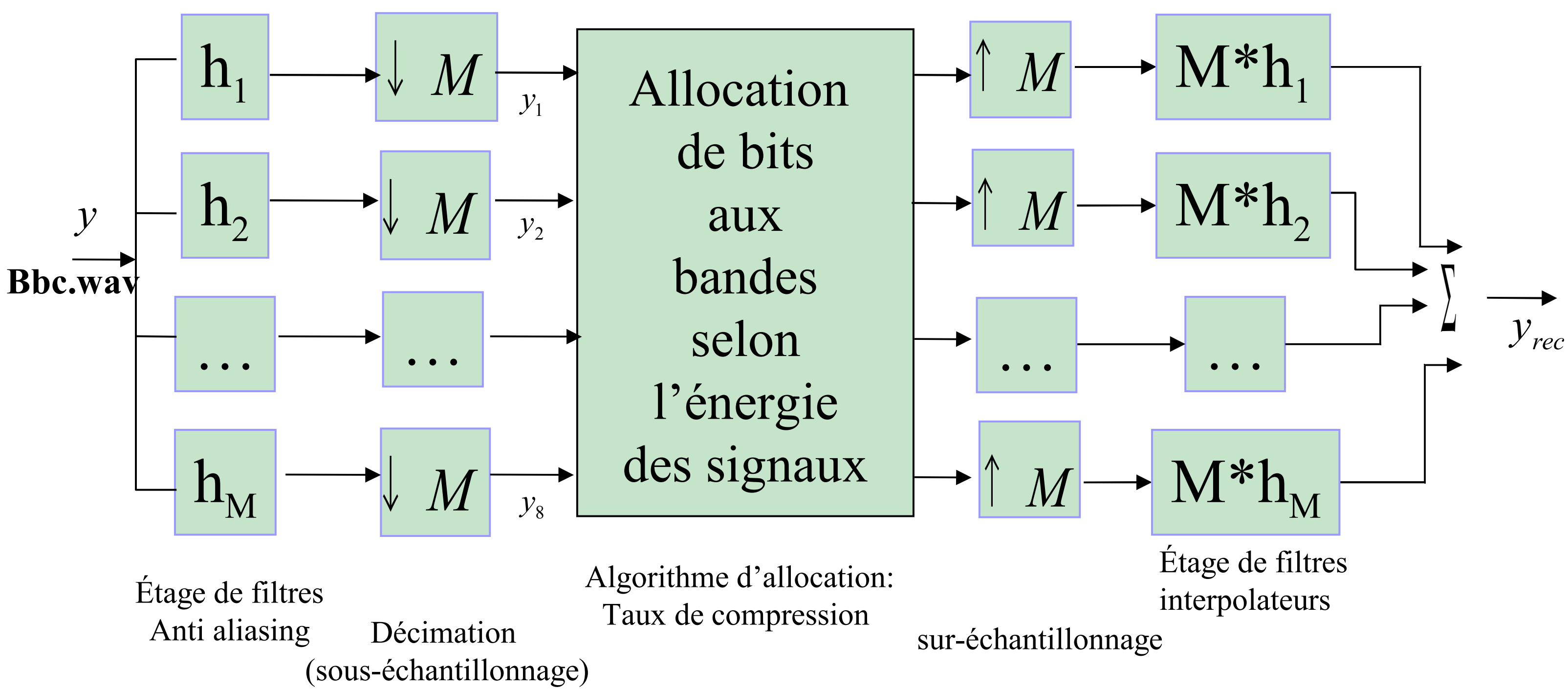
Monsieur [redacted]
[redacted]
29490 GUIPAVAS

Veuillez trouver ci-joint mon nouveau relevé d'identité bancaire, merci d'en tenir compte dès aujourd'hui.

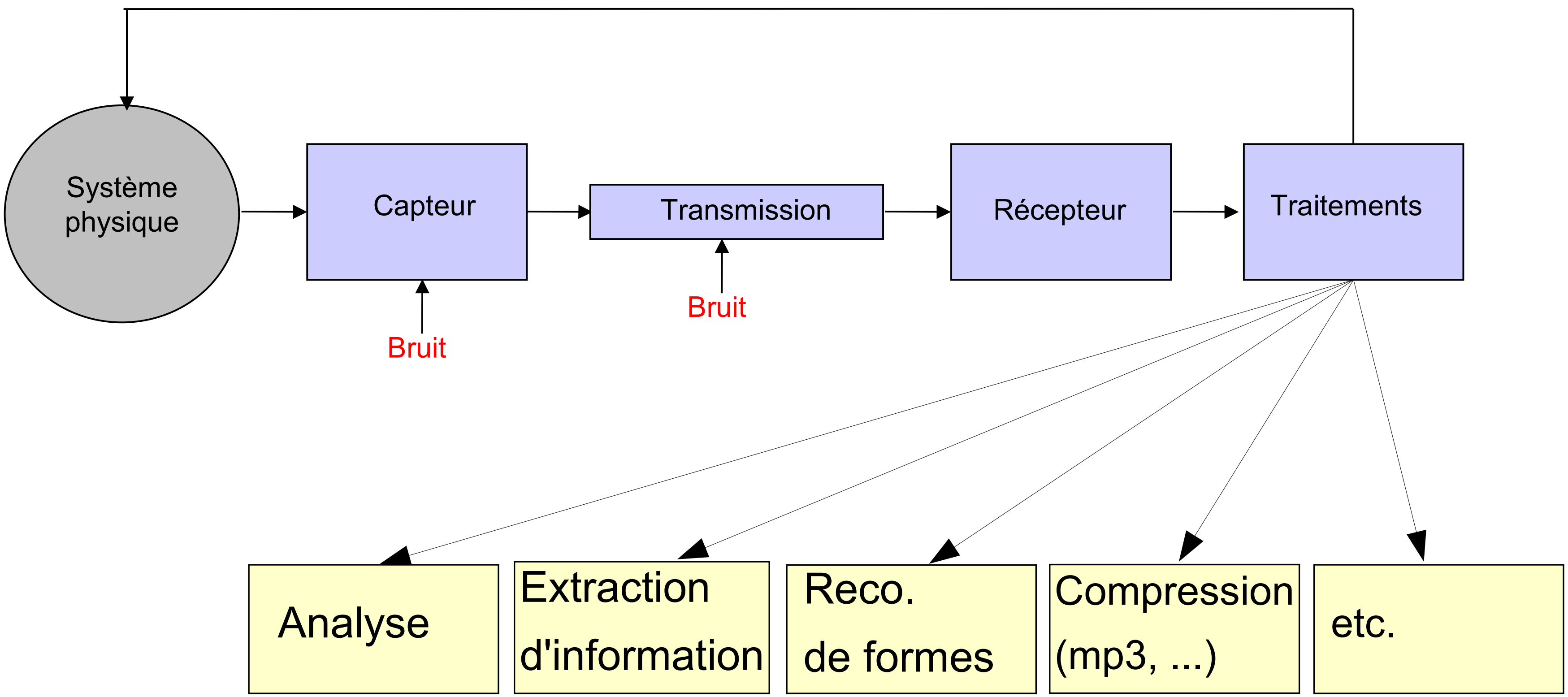
Je vous prie d'agréer, Monsieur, l'expression de mes sentiments distingués.

Introduction

- Fonctions du traitement du signal
  - <u>Transformer</u> : adapter un signal aux besoins
    - Filtrage : élimination de certaines composantes
      - Détection de craquements sur un enregistrement,
      - Détection de bruit sur une image,
      - Annulation d'écho, etc.
    - Codage/compression (Jpeg, mp3, mpeg4, etc.)



La chaîne de traitement de l'information et le TS



Objectifs

Connaissances théoriques élémentaires pour

- Décrire et représenter les signaux
- Comprendre le principe et les limites des méthodes de traitement
- mettre en œuvre des méthodes de traitement simples

Objectifs de ce premier cours :

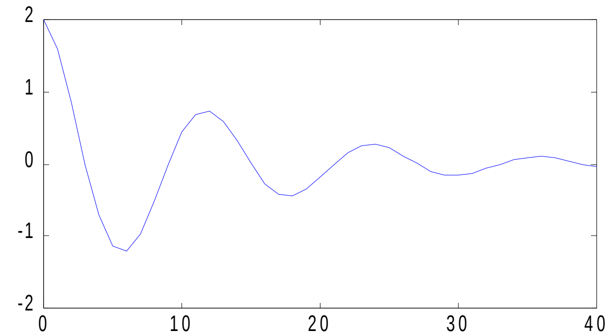
- Classification des signaux selon différentes catégories
  (leur dimension, leur évolution, leur énergie, leur morphologie)
- Énergie et puissance
- Notion de corrélation

Classification des signaux

Classification dimensionnelle

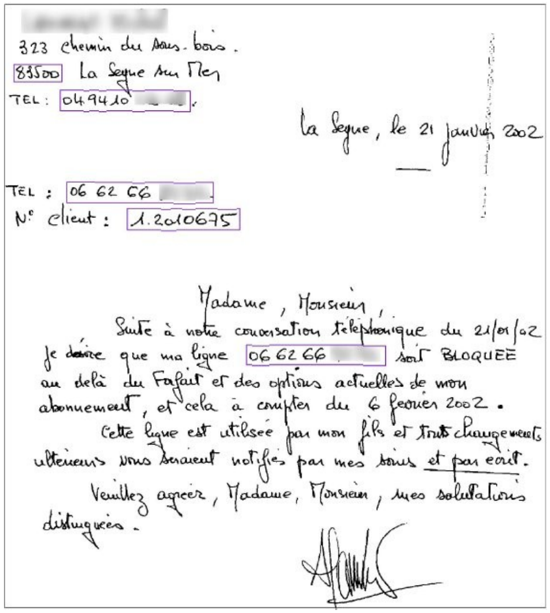
- **Signal monodimensionnel 1D**

  Fonction d'un seul paramètre, pas forcément le temps : une concentration, une abscisse, etc.



- **Signal bidimensionnel 2D**

  Exemple : image NG → $f(x, y)$



323 chemin des Bous. bois.
83500 La Seyne sur Mer
TEL : 04 94 10

La Seyne, le 21 janvier 2002

TEL : 06 62 66
N° client : 1.2010675

Madame, Monsieur,
Suite à notre conversation téléphonique du 21/01/02 je désire que ma ligne 06 62 66 soit BLOQUEE au delà du Forfait et des options actuelles de mon abonnement, et cela à compter du 6 février 2002.
Cette ligne est utilisée par mon fils et tout changements ultérieurs vous seraient notifiés par mes soins et par écrit.
Veuillez agréer, Madame, Monsieur, mes salutations distinguées.

- **Signal tridimensionnel 3D**

  Exemple : film NB → $f(x, y, t)$

Classification phénoménologique

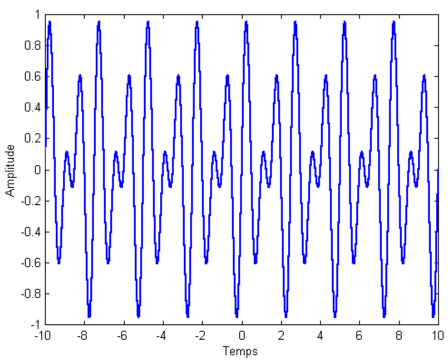
❑ Evolution déterministe ou aléatoire des signaux

◆ Signaux déterministes

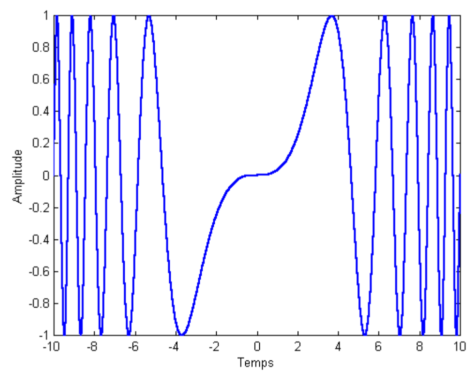
Signaux dont l'évolution en fonction du temps t peut être parfaitement décrite grâce à une description mathématique ou graphique.

➤ Sous catégories :

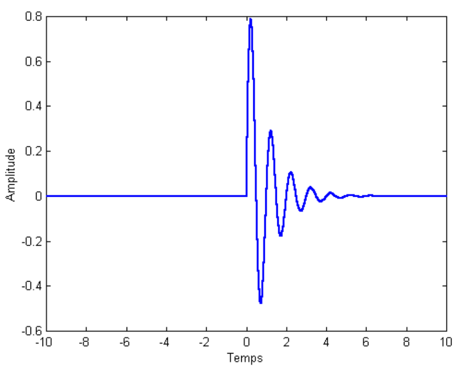
- périodiques
- apériodiques
- transitoire



$$\exists\, T \,/\, x(t) = x(t + kT)$$



support non borné



support borné

Signal réel

C'est un signal représentant une grandeur physique. Son modèle mathématique est une fonction réelle. Ex. : tension aux bornes d'un C

Classification phénoménologique

◆ Signaux aléatoires (stochastiques)

Signaux dont l'évolution temporelle est imprévisible et dont on ne peut pas prédire la valeur à un temps t.

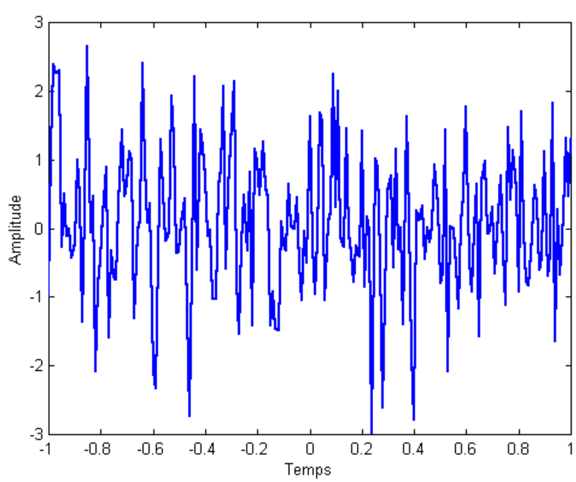
La description est basée sur les propriétés statistiques des signaux (moyenne, variance, loi de probabilité, …)

Exemple résultat d'un jet de dé lancé toutes les secondes (moyenne=3.5, écart type :1.87)

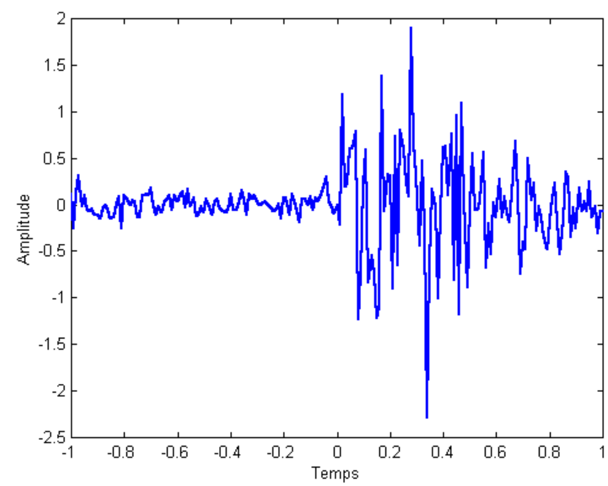
Signaux aléatoires stationnaires

Stationnaire si les caractéristiques statistiques ne varient pas au cours du temps.

- stationnaires



- Non-stationnaires



Classification énergétique

Energie et Puissance des signaux

Soit un signal $x(t)$ défini sur $]-\infty, +\infty[$, et T_0 un intervalle de temps

- Energie de $x(t)$

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt \qquad \text{ou} \qquad E = \lim_{T_0 \to \infty} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} |x(t)|^2 dt$$

- Puissance moyenne de $x(t)$

$$P = \lim_{To \to \infty} \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} |x(t)|^2 dt$$

  - Homogène à E/t

Cas des signaux périodiques de période T $\quad P = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt$

Classification énergétique

❑ Remarques :

- Signaux à énergie finie ⇨ puissance moyenne nulle

  Généralement, cas des signaux représentant une grandeur physique.
  Signaux transitoires à support borné

- Signaux à énergie infinie ⇨ puissance moyenne non nulle

  Cas des signaux périodiques

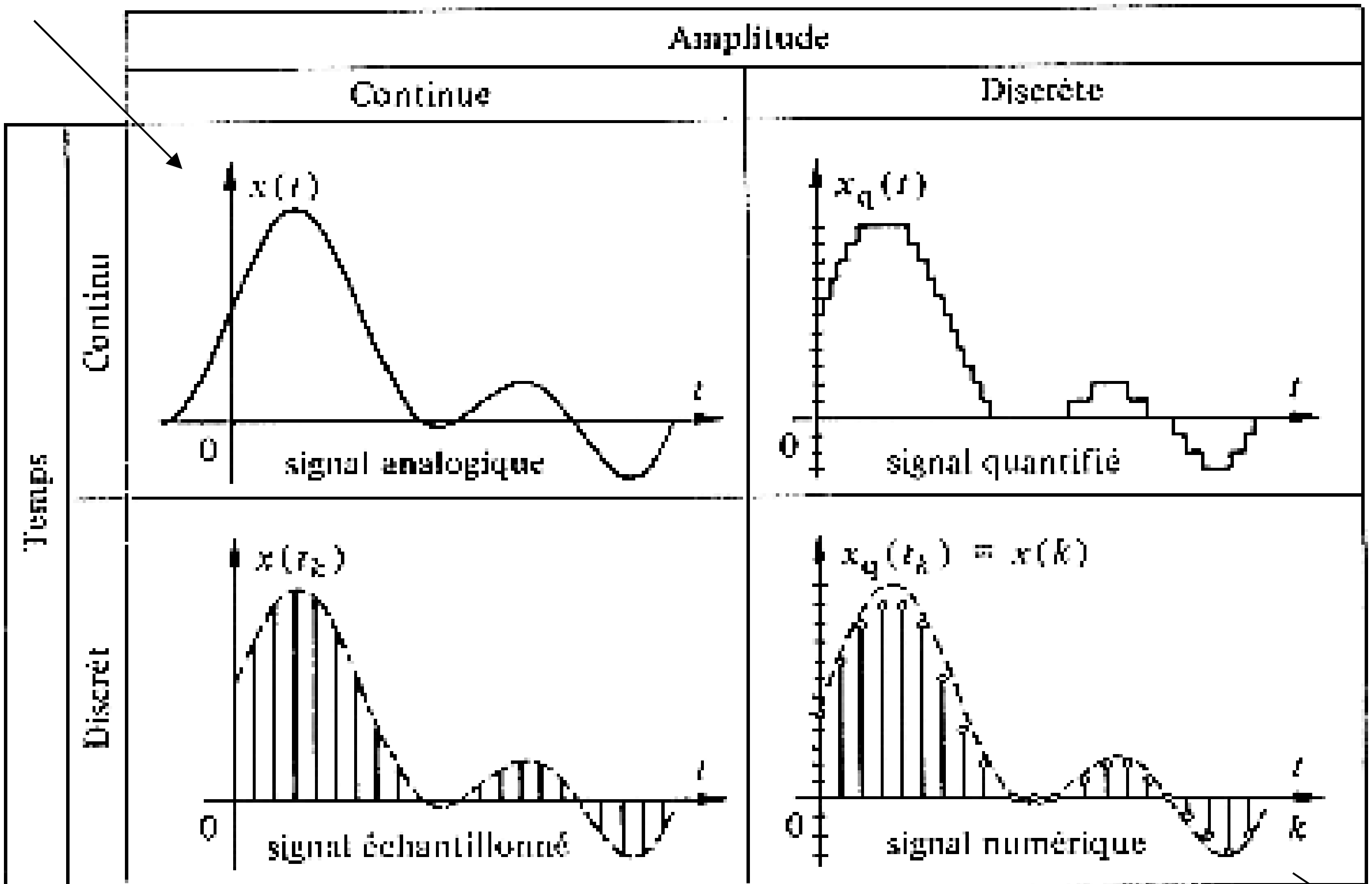
Notion valable pour les signaux aléatoires <u>et</u> déterministes

Classification morphologique

1ère partie du cours

quantification

échantillonnage



2ème partie du cours

Retour sur la notion de bruit

Bruit

- Def. : Tout phénomène perturbateur pouvant géner la perception ou l'interprétation d'un signal

- La notion de bruit est relative, elle dépend du contexte

- Exemple classique du technicien en télécom et de l'astronome :

  - Pour le technicien en télécom :
    - Ondes d'un satellite = signal
    - Signaux provenant d'une source astrophysique = bruit
  - Pour l'astronome :
    - Ondes d'un satellite = bruit
    - Signaux provenant d'une source astrophysique = signal

- Tout signal physique comporte du bruit = une composante aléatoire

- Introduction de la notion du rapport signal/bruit

Notion de rapport signal sur bruit

❑ Objectif

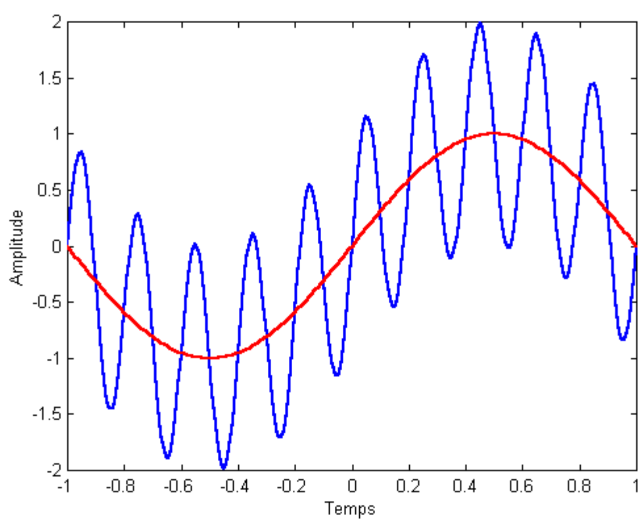
Signal = composante déterministe + composante aléatoire.

Déterminer la qualité d'un signal aléatoire ou déterministe ⇨ introduction d'un rapport $R_{S/B}$ quantifiant l'effet du bruit.

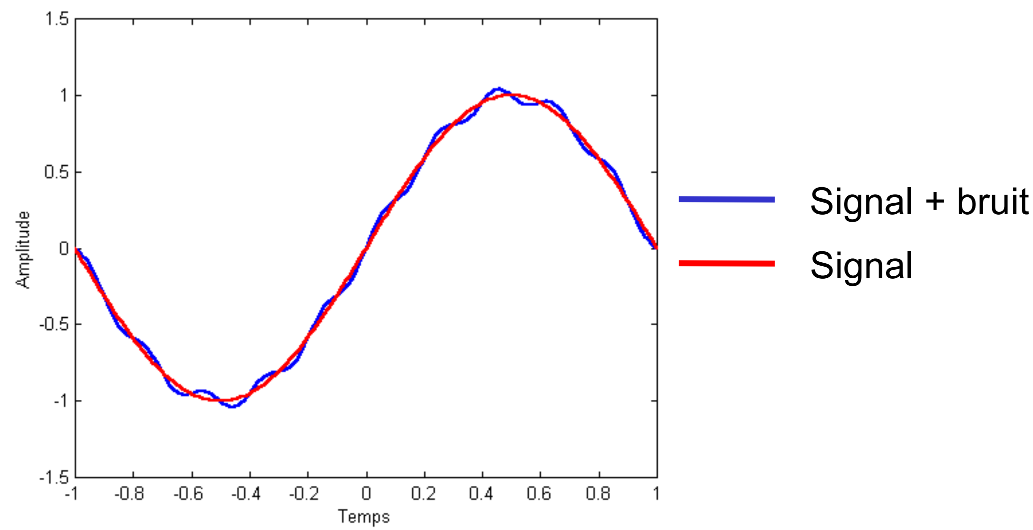
$$R_{S/B} = \frac{P_s}{P_b} \quad \text{ou} \quad R_{S/B}(dB) = 10\log_{10}(R_{S/B})$$

P_s est la puissance du signal et P_b celle du bruit.

$R_{S/B}$=0 dB



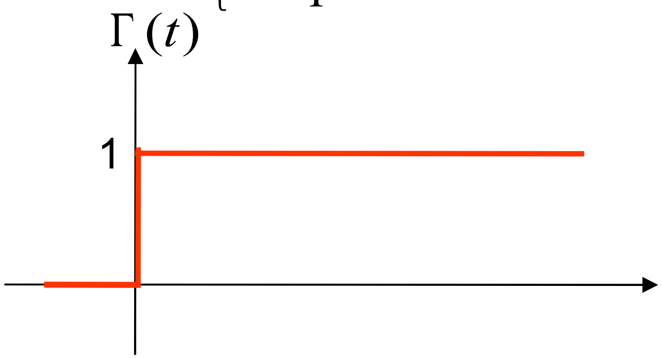
$R_{S/B}$=26 dB



Signaux élémentaires continus

- Échelon

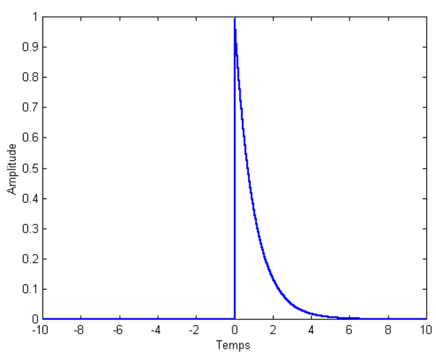
$$\Gamma(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t < 0 \\ 1 & \text{pour } t > 0 \end{cases}$$



permet d'exprimer l'établissement instantané d'un régime continu

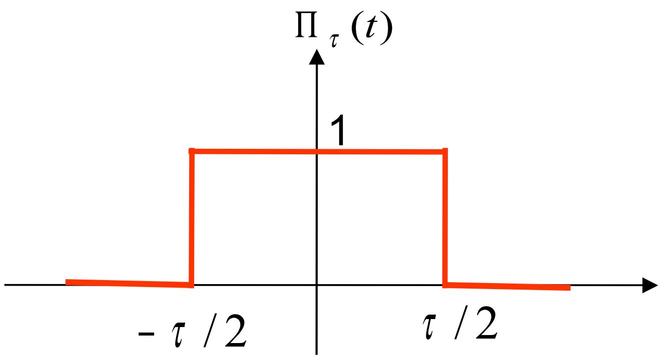
- Exponentielle décroissante

$$y(t) = \Gamma(t) \cdot e^{-at} \qquad a > 0$$



- Signal porte ou rectangle

$$\Pi_\tau(t) = \begin{cases} 1 & pour\ |t| \le \dfrac{\tau}{2} \\ 0 & ailleurs \end{cases}$$



τ : largeur de la porte

Peut aussi être défini comme une différence de deux échelons.

- Signaux périodiques : sin / cos

Notion d'autocorrélation

Définition

L'autocorrélation réalise une comparaison entre un signal $x(t)$ et ses copies retardées (étude de ressemblance d'un signal avec lui-même au cours du temps)

- Pour les signaux à énergie finie

$$C_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot x^*(t-\tau)\,dt$$

Homogène à une énergie, $C_{xx}(0)$ est l'énergie du signal

- Pour les signaux à énergie infinie

$$C_{xx}(\tau) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) x^*(t-\tau)\,dt$$

Homogène à une puissance, $C_{xx}(0)$ est la puissance moyenne du signal

- Propriétés
  - $\left|C_{xx}(\tau)\right| \leq C_{xx}(0)$: Maximum en 0
  - Si $x(t)$ est périodique alors $C_{xx}(t)$ est périodique de même période
  - $C_{xx}(t)$ est paire pour des signaux réels

Notion d'intercorrélation

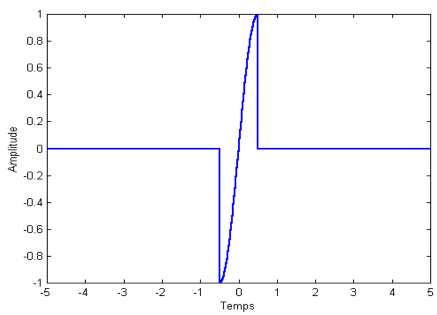
Définition

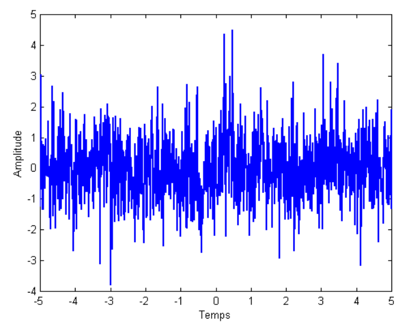
L'intercorrélation compare un signal $x(t)$ et un signal $y(t)$ retardée.
Elle mesure la similitude entre ces deux signaux

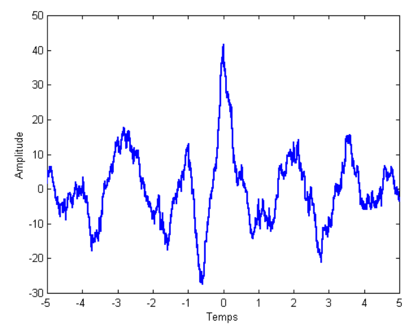
- Pour les signaux à énergie finie $C_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot y^*(t-\tau)\,dt$

- Pour les signaux à énergie infinie $C_{xy}(\tau) = \lim_{T_0 \to \infty} \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) y^*(t-\tau)\,dt$

Exemple d'application   Détection par intercorrélation







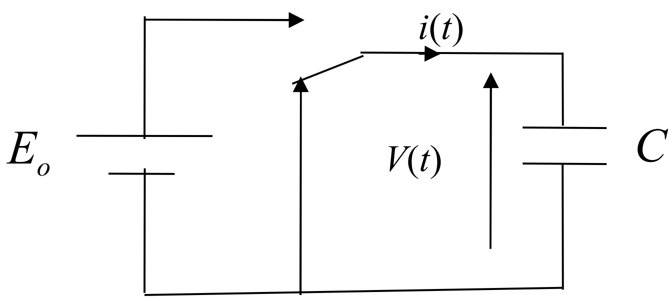
Autres exemples

Détection de signal périodique noyé dans le bruit

Analyse spectrale

Test de "blancheur"

Introduction aux distributions



$$V(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ E_o & t > 0 \end{cases}$$

V est discontinue

Question : que vaut $i(t)$? $$i(t) = C\frac{dV}{dt}$$

$i(t)$ est nul partout. En 0, on ne connaît pas la valeur de i car $V(t)$ est discontinue en 0 et n'est donc pas dérivable en ce point.

Et pourtant, $i(t)$ en 0 existe puisque il y a eu transfert de charge $q = \int_{-\infty}^{+\infty} i(t)dt = CE_o$

entre l'alimentation et la capacité. Aire sous i(t) = CE_0 ... étrange non ?

⇨ $i(t)$ serait une fonction qui vaut 0 partout et l'infini en 0 impossible car on aurait $2*i(t) = i(t)$, ou $i(t)^2 = i(t)$ ...

⇨ *i(t)* n'est donc pas une fonction, c'est une distribution ! On l'appelle distribution de Dirac

Distribution de Dirac

❑ Définition

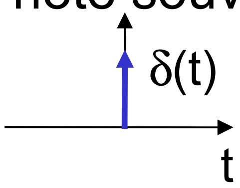
- Si φ est une fonction, la distribution de Dirac ou <u>impulsion de Dirac</u> est définie par :

$$\delta(\varphi)=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t).\delta(t)\,dt=\varphi(0)$$

=> Dirac appliqué à une fonction = la valeur de la fonction en 0

<u>Remarque</u> : il n'existe pas de fonction δ vérifiant cette propriété

- Cependant pour des raisons de commodités, on la note souvent comme une fonction de t : δ(t), qu'on représente :



❑ Propriétés

- Dirac représente un signal de durée théoriquement nulle et d'énergie finie (=1).
- Notation incorrecte mais commode : $\delta_{(t_1)} = \delta(t - t_1)$
- Une impulsion de Dirac à l'instant t_1 donne : $\delta_{(t_1)}(\varphi) = \varphi(t_1)$
- Autre propriété : $x(t)\cdot\delta(t - to) = x(to)\cdot\delta(t - to)$

Distribution de Dirac

Autres définitions :

- Comme une fonction :

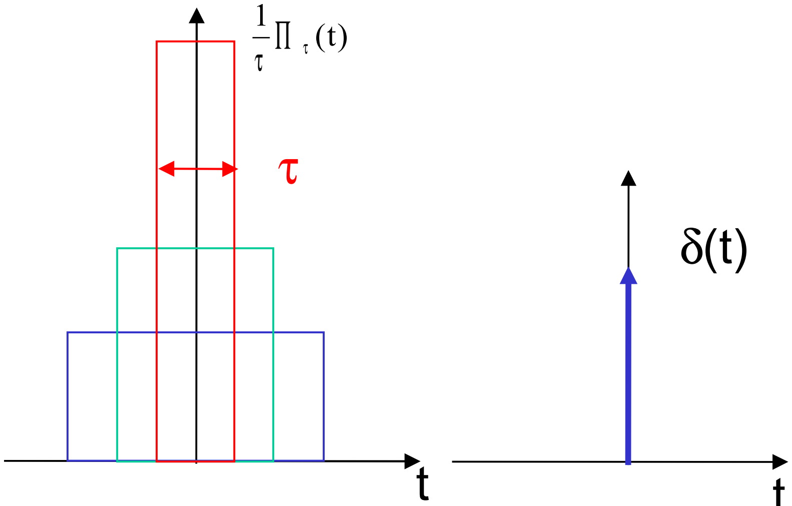
$$\delta(x) \begin{cases} \delta(x) = 0 & x \neq 0 \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\,dx = 1 & \end{cases}$$

<u>Remarque1</u> : ceci est impossible : l'aire sous le pic ne peut être égale à 1...

<u>Remarque2</u> : l'énergie du Dirac est donc égale à 1

- À partir du signal porte :

$$\delta(x) = \lim_{\tau \to 0} \frac{1}{\tau} \Pi_{\tau}(x)$$



Mêmes remarques !

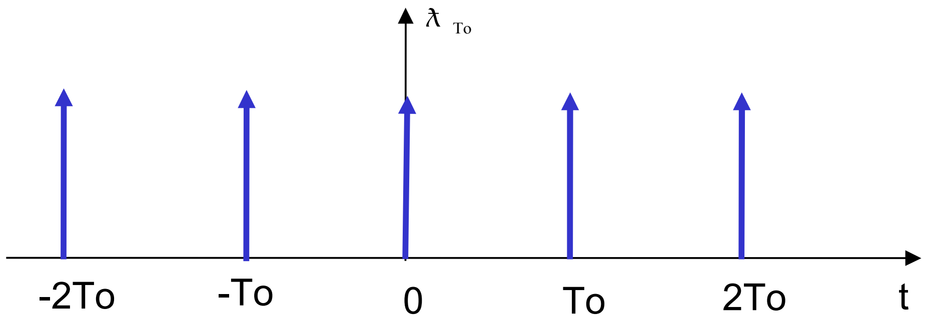
- Peut être vue comme la dérivée d'un échelon

Peigne de Dirac

❑ Définition

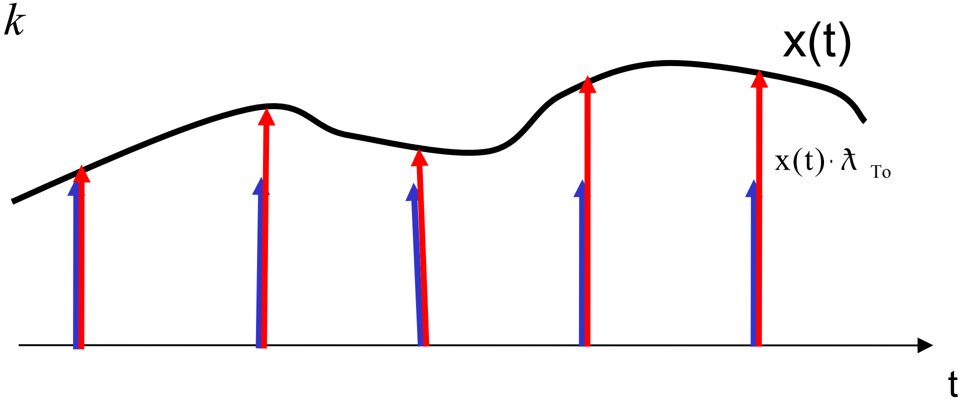
C'est une somme infinie d'impulsions de Dirac régulièrement espacées de T_o

$$Ш_{T_o} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_o)$$



❑ Propriété

$$x(t) \cdot Ш_{To} = \sum_{k} x(kTo) \cdot \delta(t - kTo)$$



Echantillonnage de la fonction $x(t)$

Qq éléments sur la théorie des Distributions ...

Définition

On appelle une distribution D, un opérateur sur l'espace vectoriel V de fonctions $\varphi(t)$, indéfiniment dérivable et à support borné.

$$\begin{aligned} D: \quad V &\to \mathbb{C} \\ \varphi(t) &\to \langle D, \varphi \rangle \ ou \ D(\varphi) \end{aligned}$$

$\mathbb{C}$ ensemble des nombres complexes

- Propriétés

$$D(\varphi_1 + \varphi_2) = D(\varphi_1) + D(\varphi_2)$$

$$D(\lambda \varphi) = \lambda D(\varphi)$$ λ est un scalaire

- Dérivation d'une distribution

Soit D une distribution alors la dérivée D' de D définit également une distribution telle que $D'(\varphi) = -D(\varphi')$

- Voir J. Auvray pour plus de précisions