

Exercice 1

7.16 Papadimitriou

5 points

Une salade est une combinaison des ingrédients suivants : (1) tomate, (2) laitue, (3) épinards, (4) carotte, et (5) huile. Chaque salade doit contenir : (A) au moins 15 grammes de protéines , (B) au moins 2 et au plus 6 grammes de matières grasses , (C) au moins 4 grammes de glucides , (D) au plus 100 mg de sodium. En outre , (E) vous ne voulez pas votre salade contienne plus de 50 % de matière verte (laitue + épinards) en masse. Le contenu nutritionnel de ces ingrédients (pour 100 grammes) sont donnés par la table suivante :

<i>ingrédient</i>	calories (kcal)	protéines (grammes)	matières grasses (grammes)	glucides (grammes)	sodium (milligrammes)
tomate	21	0.85	0.33	4.64	9.00
laitue	16	1.62	0.20	2.37	8.00
épinards	371	12.78	1.58	74.69	7.00
carotte	346	8.39	1.39	80.70	508.20
huile	884	0.00	100.00	0.00	0.00

Le problème est de faire la salade avec le moins de calories sous les contraintes nutritionnelles.

1. Formuler le problème comme un programme linéaire et donner une solution.
2. Reformuler le programme linéaire sous sa forme standard.

$$\begin{cases} \min_{z \in \mathbb{R}^m} & c^\top z \\ \text{avec} & Az = b \\ \text{et} & z \geq 0 \end{cases}$$

3. Vérifiez que votre solution est bien optimale.
4. Donnez le dual de ce problème.
5. Montrez que les formulations primale et duale donnent les mêmes résultats.

Exercice 2

Variation totale

5 points

On considère que l'on dispose de $n = 40$ observations $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{40}$ (exercice2.m sur moodle et figure ci-dessus)

0.5104 -0.1529 -0.0009 0.2760 0.0449 0.4215 0.3102 0.0875 -0.2333 0.1700 -0.4148 0.0733 0.2425 0.0639
 0.2639 0.6117 0.2772 0.0801 0.1925 0.1276 0.6056 0.8751 1.3674 0.9869 1.1747 0.6980 1.0194 1.1801 0.5915
 1.1043 0.9454 0.7181 0.9887 0.4311 0.3616 0.6469 0.7028 0.6481 0.4824 1.0865

On cherche à résoudre le problème suivant pour un vecteur \mathbf{x} donné et pour $\lambda = 5$

$$\min_{s \in \mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^n |s_i - x_i| + \lambda \sum_{i=1}^{n-1} |s_i - s_{i+1}|$$

1. Donner une solution.
2. Soit D la matrice obtenue à l'aide des instruction Matlab suivantes (avec n un entier)

```
D = eye(n) + diag(-ones(n-1,1),1);
D(end,:) = [];
```

Soit \mathbf{x} un vecteur de \mathbb{R}^n . Explicitez \mathbf{v} , le résultat du produit $\mathbf{v} = D\mathbf{x}$?

3. Formuler le problème comme un **programme linéaire** et proposez une solution utilisant cette formulation.

