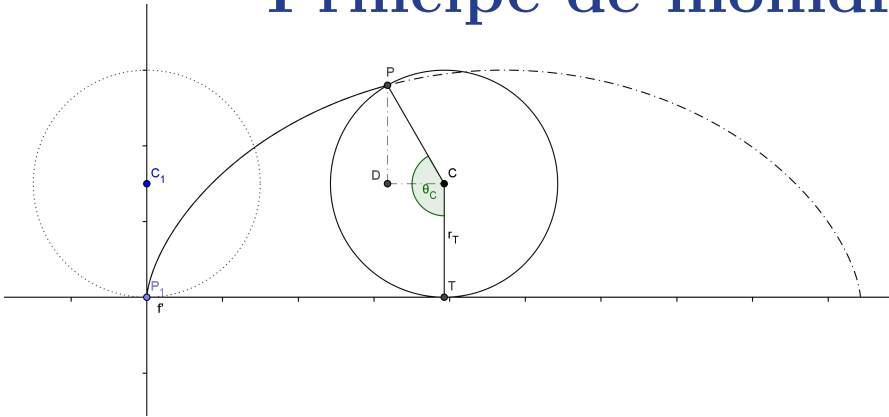


## Principe de moindre action



Enseignant responsable :  
Guillaume DUVAL

Étudiants :  
Laure LECOUEY  
Andréas MEULEMAN  
Sorin URSACHI

Ahmed BELGHAZI  
Axel NARBONNE



**Date de remise du rapport :** 05/06/15

**Référence du projet :** STPI<sup>1</sup>/P6/2015

**Intitulé du projet :** Principe de moindre action

**Type de projet :** Preuves mathématiques et applications physiques

**Objectifs du projet :** Avoir un aperçu de quelques lois physiques liés au principe philosophique de moindre action.

---

1. INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES DE ROUEN  
DÉPARTEMENT SCIENCES ET TECHNIQUES POUR L'INGÉNIEUR  
685 AVENUE DE L'UNIVERSITÉ BP 08- 76801 SAINT-ÉTIENNE-DU-ROUVRAY  
TÉL : 33 2 32 95 66 21 - FAX : 33 2 32 95 66 31

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>5</b>
I	Méthodologie . . . . .	5
II	Origine historique . . . . .	6
III	Origine philosophique . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Optique géométrique</b>	<b>8</b>
I	Principe de Fermat et Snell-Descartes . . . . .	8
1	Démonstration de la loi de réflexion . . . . .	8
2	Démonstration de la loi de réfraction . . . . .	9
II	Ellipse en optique - théorème de Roberval . . . . .	10
<b>3</b>	<b>Inégalité Isopérimétrique</b>	<b>11</b>
I	Les triangles . . . . .	11
<b>4</b>	<b>Les cycloïdes</b>	<b>12</b>
I	Équations paramétriques . . . . .	12
II	Isochronie . . . . .	13
III	Brachystochronie . . . . .	15
<b>5</b>	<b>Calcul de la vitesse de la lumière par Römer</b>	<b>17</b>
I	Histoire de la détermination de la vitesse de la lumière . . . . .	17
II	Les connaissances de l'époque . . . . .	17
1	Les lois de Kepler . . . . .	18
2	Distance Jupiter-Soleil . . . . .	18
3	Distance Terre-Soleil par Cassini et Richer . . . . .	18
III	Démonstration avec l'analogie de l'effet Doppler-Fizeau . . . . .	19
IV	Démonstration selon Römer . . . . .	20
<b>6</b>	<b>Euler-Lagrange</b>	<b>22</b>
I	Théorème . . . . .	22
II	Démonstration . . . . .	22
1	Lemme . . . . .	22
2	Preuve du théorème . . . . .	23
III	Minimisation de temps . . . . .	24
IV	Minimisation de l'action et PFD . . . . .	25
1	Théorème . . . . .	25
V	Conservation de l'énergie . . . . .	25
VI	Application au pendule simple . . . . .	25
1	Les équations différentielles . . . . .	25
2	Quelques courbes de vitesse angulaire en fonction de l'angle . . . . .	27
VII	Application au pendule double . . . . .	29



# Chapitre 1

## Introduction

Le principe de moindre action est l'hypothèse selon laquelle la dynamique d'une (position, vitesse. . .) entre deux instants se déduit d'une unique grandeur appelée action dont on suppose qu'elle atteint son minimum. En mécanique classique, le principe de moindre action est très utilisé pour déterminer les trajectoires et les états des systèmes physiques. La détermination du trajet peut alors se faire par méthode variationnelle : à points extrémités fixés, temps de trajet fixé et trajet variable, on cherche le ou les trajets pour lesquels l'action est stationnaire par rapport aux variations possibles et infimes du trajet. L'action est alors la somme de la différence entre l'énergie cinétique ( $E_c$ ) et l'énergie potentielle ( $E_p$ ). Ainsi, d'après l'équation Euler Lagrange, le trajet entre deux points assez proches minimise l'action dans cette méthode variationnelle.

Le principe de moindre action n'a jamais été démontré, ni remis en cause car il est toujours vérifié expérimentalement. Il ne possède ni justification morale, ni justification théologique mais il s'applique aujourd'hui dans le cadre scientifique moderne, en mathématiques, en physique, en économie...

### I Méthodologie

L'enseignement de P6 se déroulait sur un créneau de 1h30 avec notre professeur le Mardi après-midi dans les salles de Projets en Dumont-Durville.

Les deux premières semaines de travail sur le projet ont été un peu plus chaotiques que les autres puisqu'un problème dans les affectations a contraint trois des neufs étudiants à louper la première séance. Ces deux premières semaines ont donc été consacrées à la découverte des grandes lignes du Principe de Moindre Action. Les deux projets initiaux n'ont après cela fait qu'un seul, plus grand et global.

Par la suite, l'organisation du travail était très structurée : d'une séance à l'autre, M. Duval donnait à un étudiant (ou un groupe de deux à trois) la tâche de se documenter sur une application spécifique du Principe de Moindre Action. La séance suivante, cet étudiant (ou ce groupe) devait alors exposer ce qu'il avait appris aux autres ; nécessitant une compréhension approfondie du sujet pour transmettre au mieux les connaissances. Durant les différents exposés auxquels nous étions spectateurs, il fallait être attentif et prendre des notes car nous devions généralement résoudre en fin de séance une application directe de la loi démontrée.

La fin de l'enseignement de P6 se faisant déjà sentir proche après les IS de début Avril, nous devions (chaque élève) remettre au propre toutes les démonstrations et applications réalisées à

M. Duval pour s'assurer de l'implication générale et préparer le rendu du rapport. Après cela, nous avons été divisé en groupe de trois (Laure, Sorin et Andreas pour le premier ; Timothée, Octave et Riad pour le deuxième et Axel, Ahmed et Quentin pour le dernier) qui devaient chacun rendre un rapport « global » du travail effectué.

Enfin, pour la soutenance de P6 du Lundi 22 Juin, nous avons du séparer le troisième groupe (et « réinsérer » ses membres) afin de respecter les deux créneaux accordés aux groupes de M. Duval. Le premier groupe de soutenance est donc finalement composé de Laure, Sorin, Andreas, Axel et Ahmed alors que le deuxième est représenté par Timothée, Octave, Riad et Quentin.

La présence d'un « groupe de discussion Facebook » a également permis une bonne synchronisation car il n'est pas évident de réaliser un travail en commun à neuf personnes différentes.

## II Origine historique

Les premières recherches approchant ce principe de moindre action remonte à l'Antiquité. En effet, les problèmes isopérimétriques et les questions géométriques relevant du processus de minimisation ou de maximisation sont connus depuis 3000 ans.

En -814 avant Jésus-Christ, la légende de Didon fait intervenir un problème isopérimétrique. Une princesse désirait trouver un nouveau territoire afin d'y établir une nouvelle capitale pour son peuple. Pour cela, elle conclut un accord pacifiste avec le maître des lieux : la surface des terres qu'elle prenait devait « tenir dans une peau de bœuf ». La princesse, maligne, décida alors de couper une peau de bœuf en très fines lamelles et d'assembler celles-ci entre elles pour faire une corde. Au final, la corde mesurait 4 km. Ce stratagème s'inclut tout à fait dans le domaine qui étudie les problèmes d'isopérimétrie. La question que l'on se pose alors est : Quelle est la courbe fermée plane de longueur donnée qui maximise la valeur de la surface entourée. Nous étudierons plus loin la réponse à cette question dans divers cas.

Au VIIème siècle avant J-C, l'école milésienne affirme que le cosmos est issu d'une substance unique qui est le summum de la simplicité.

Au Vème siècle avant J-C, l'école pythagoricienne allie beauté et simplicité. Dans cette continuité, les cercles et les sphères sont considérés comme parfaits et purs. En effet, il est dit que ces deux formes géométriques sont agencées pour construire l'univers tel un organisme et, en plus, ils régissent le mouvement des planètes observées. A cette époque, Pythagore découvre une application dans le domaine de la musique : l'harmonie des sons concorde avec l'harmonie des nombres. L'école pythagoricienne affirme alors que tout élément du cosmos est régi par les nombres, surtout ceux qui sont parfaits.

Au Ier siècle après J-C, des découvertes importantes quant aux principes de moindre action sont réalisées dans le domaine de l'optique par Héron d'Alexandrie. Le principe de moindre longueur (ou loi de la réflexion optique) est alors énoncé : un rayon lumineux suit le chemin le plus court c'est-à-dire en ligne droite.

Au XVème siècle, Galilée fait une compréhension mécaniste de la nature avec la conviction d'un ordre simple sans arbitraire, autrement dit la religion n'intervient pas.

Au XVIIème siècle, Fermat énonce le principe de moindre temps : « La lumière se propage d'un point à un autre sur des trajectoires telles que la durée du parcours soit localement minimale. ». Il découvrira également que « La variation entre le temps de parcours d'un trajet réellement suivi par la lumière et le temps de parcours d'un trajet virtuel voisin est nulle ».

Le principe de Fermat ne convainc pas tout le monde à l'époque. Il semble en effet troublant

pour un esprit rationnel : Comment la lumière sait-elle quel est le chemin le plus court ? De plus ce principe semble violer le principe de causalité : Comment le rayon connaît-il le chemin à prendre à partir de sa destination finale ?

Au XVIIIème siècle, Euler développe cette idée de raisonnement à partir de la finalité : « Car, étant donné, que la facture du monde tout entier est la plus parfaite qui soit et qu'elle a été exécutée par le créateur le plus sage, il n'arrive absolument rien dans le monde, dans lequel ne se manifeste pas un certain procédé de maximum ou de minimum ; c'est pourquoi on ne peut pas douter que tous les effets du monde puissent être déduits aussi facilement des causes finales, au moyen de la méthode des maxima et minima, que des causes efficientes (agissantes) elles-mêmes ». Cet argument théologique affirme donc que l'on peut expliquer les phénomènes naturels à partir de leur finalité. De plus, le résultat obtenu sera obligatoirement le « meilleur » possible c'est-à-dire un maximum ou un minimum.

### III Origine philosophique

Le principe de moindre action équivaut au principe philosophique de base d'économie naturelle s'énonce de la façon suivante : «La nature agit toujours par les voies les plus courtes et les plus simples ».

Ce principe sert à prédire comment va se comporter un phénomène. Ce qui détermine le trajet est non pas les conditions initiales et les forces en présence mais le point d'arrivée qui est d'ailleurs nécessairement postérieur au point de départ. Cela signifie que parmi l'infinité de chemins possibles et imaginables, celui qui est choisi est celui permettant la plus grande économie d'action. On se retrouve alors avec une causalité inversée.

Cette façon de penser amène alors à se demander si l'univers dans son ensemble aurait lui aussi une cause finale et ainsi l'avenir de l'univers serait déjà potentiellement déterminé. Cela renforce l'idée que le hasard n'existe pas dans le monde réel. Par conséquent, l'évolution du monde serait orienté, non pas dans le sens du temps mais dans une direction qui est transversale à toutes les dimensions possibles. Le principe de moindre action ne cherche donc pas nécessairement le chemin ayant la distance la plus courte ou le temps de trajet le plus court car le chemin de moindre action n'est pas contraint par l'espace-temps mais uniquement par la recherche de l'optimum énergétique.



# Chapitre 2

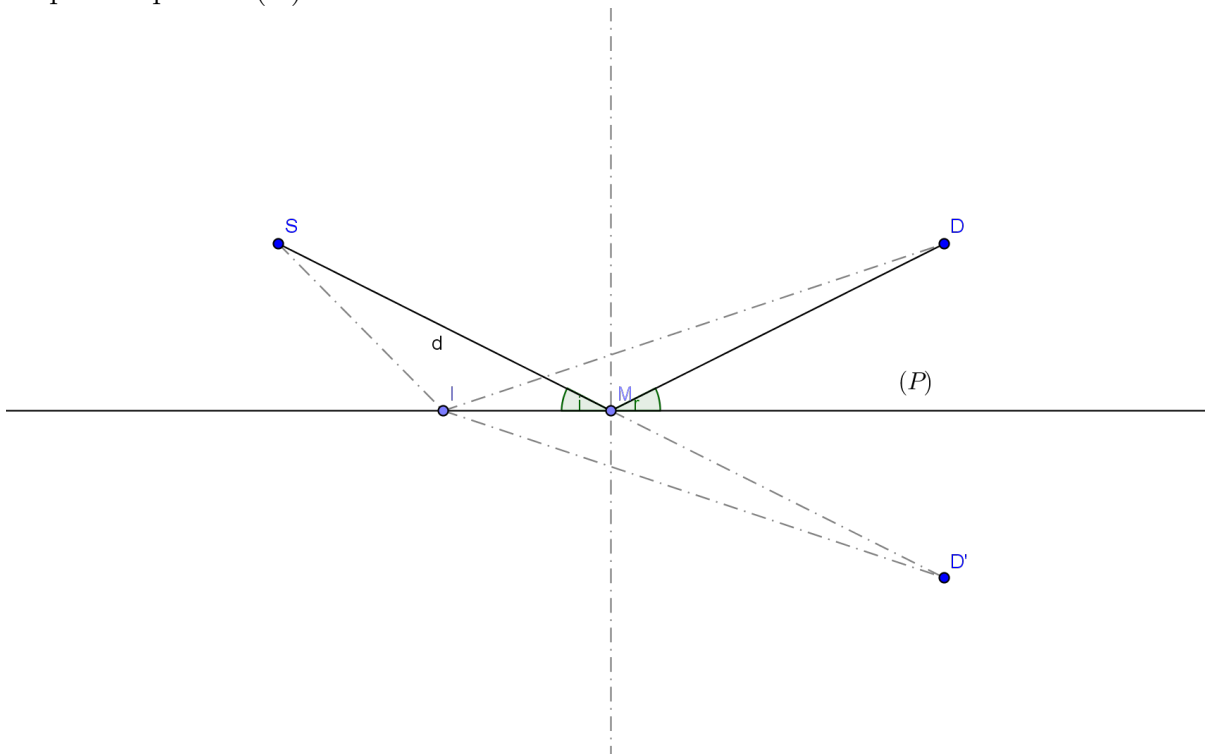
## Optique géométrique

### I Principe de Fermat et Snell-Descartes

Pierre de Fermat, né dans la première décennie du  $XVII^e$  siècle, découvre que la lumière peut avoir différentes vitesses dans des milieux différents. C'est lui qui a mis la base du principe de moindre action par le « Principe du Fermat » en optique. Ce principe nous dit que – Le trajet parcouru par la lumière entre deux points est toujours celui qui optimise le temps de parcours – ou, autrement dit, que la durée du parcours soit stationnaire/minimale.

#### 1 Démonstration de la loi de réflexion

Soit  $S$  une source lumineuse et  $D$  un détecteur de lumière. La droite  $(P)$  est un miroir.  $D'$  est le symétrique de  $D$  par  $(P)$ ,  $M$  est le point sur  $(P)$  tel que  $S, M, D'$  alignés et  $I$  est un point quelconque sur  $(P)$ .



$$[SM] + [MD] = [SM] + [MD'] \leq [SI] + [ID'] = [SI] + [ID] \text{ (inégalité triangulaire)}$$

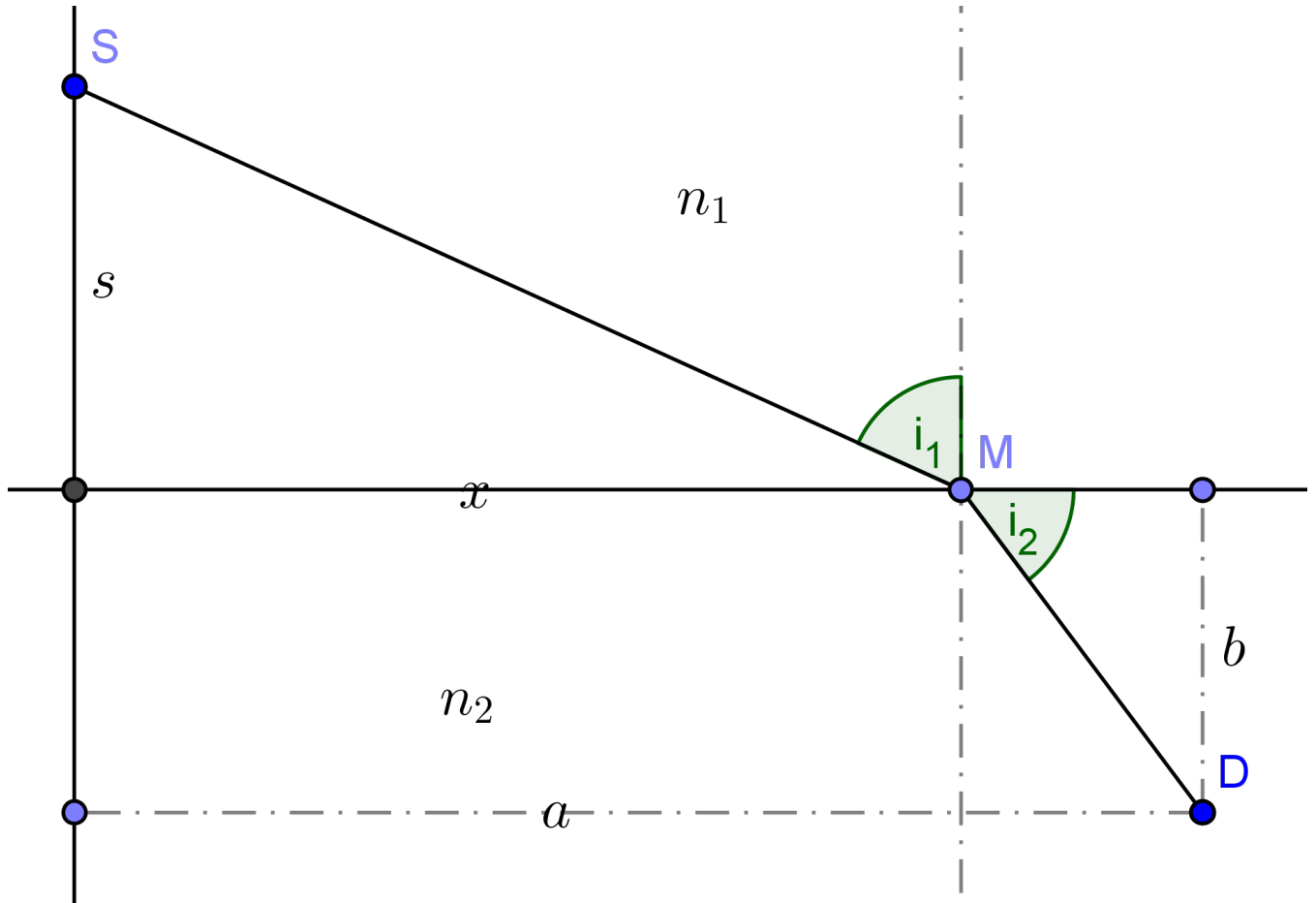
Donc le chemin le plus court, qui sera choisi par la lumière, emprunte  $M$ , or on a  $S, M, D'$

alignés, d'où :

$$i = r$$

## 2 Démonstration de la loi de réfraction

Soit la droite ( $P$ ) qui sépare deux milieux d'indice de réfraction différents, la source  $S$  dans le milieu d'indice  $n_1$  et le détecteur  $D$  dans le milieu d'indice  $n_2$ . Soit le point  $M$  appartenant à la droite  $P$ . Les points sont définis comme :  $S$  : (0 suivant  $x$  et  $s$  suivant  $y$ ),  $M$  : ( $x$  suivant  $x$  et 0 suivant  $y$ ),  $D$  : ( $a$  suivant  $x$  et  $b$  suivant  $y$ ).



Le chemin optique est :  $\frac{SM}{v_1} + \frac{MD}{v_2}$ . Sachant que l'indice de réfraction  $n_i = \frac{c}{v_i}$ , le temps total du parcours est donc  $(\frac{n_1 SM + n_2 MD}{c})$ . Or la durée du parcours doit-être minimale, donc le problème consiste à trouver  $x$ , distance  $OM$ , telle que :  $n_1 SM + n_2 MD$  soit un extremum.

On pose  $f(x) = n_1 SM + n_2 MD$

$$SM = \sqrt{(x^2 + s^2)}$$

$$MD = \sqrt{((a-x)^2 + b^2)}$$

$f(x)$  extrémal  $\Leftrightarrow f'(x) = 0$

$$f'(x) = \frac{n_1 x}{\sqrt{(x^2 + s^2)}} - \frac{n_2 (a-x)}{\sqrt{((a-x)^2 + b^2)}}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{n_1 x}{\sqrt{(x^2+s^2)}} - \frac{n_2(a-x)}{\sqrt{((a-x)^2+b^2)}} = 0$$

$$\frac{n_1 x}{\sqrt{(x^2+s^2)}} = \frac{n_2(a-x)}{\sqrt{((a-x)^2+b^2)}}$$

Or on remarque sur le dessin :  $\frac{x}{\sqrt{(x^2+s^2)}} = \sin(i_1)$

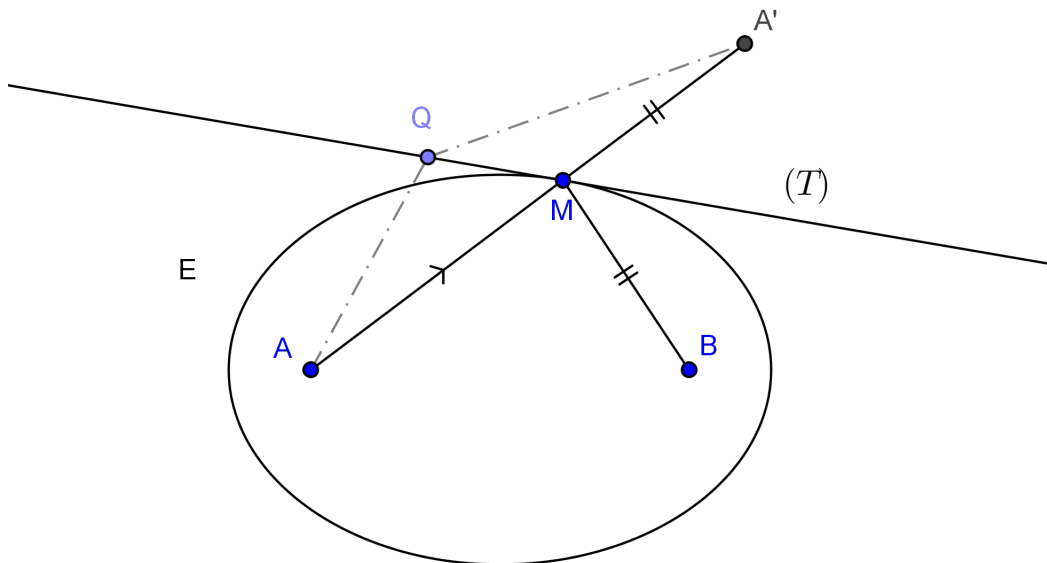
$$\frac{(a-x)}{\sqrt{((a-x)^2+b^2)}} = \sin(i_2)$$

$$\text{Donc : } \boxed{n_1 \sin(i_1) = n_2 \sin(i_2)}$$

## II Ellipse en optique - théorème de Roberval

Nous cherchons ici à montrer que si un rayon par d'un des foyers de l'ellipse, se réfléchit sur un bord, alors il passe par le second foyer.

Soit  $E$  l'ellipse de foyers  $A$  et  $B$ .  $M$  est le point sur l'ellipse vers lequel se dirige le rayon lumineux.  $A'$  est tel que  $AM' = MB$  et  $A, M, A'$  alignés. Soit  $(T)$  la bissectrice de  $\widehat{BMA'}$ , on a alors  $\theta = \alpha$ .



Il faut à présent montrer que  $(T)$  est la tangente de  $E$  en  $M$ . Soit  $(Q)$  un point sur  $(T)$ . On a :

$$AQ + QB = AQ + QA' \quad ((T) \text{ Bissectrice de } \widehat{BMA'})$$

$$\geq AM + MA' \quad (\text{inégalité triangulaire})$$

$$= AM + MB$$

On a donc bien  $Q$  à l'extérieur de  $E$ .  $(T)$  est tangente à  $E$  en  $M$ . Ainsi, le rayon partant de  $A$  se réfléchissant sur la surface de l'ellipse en  $M$  passe par  $B$ .

# Chapitre 3

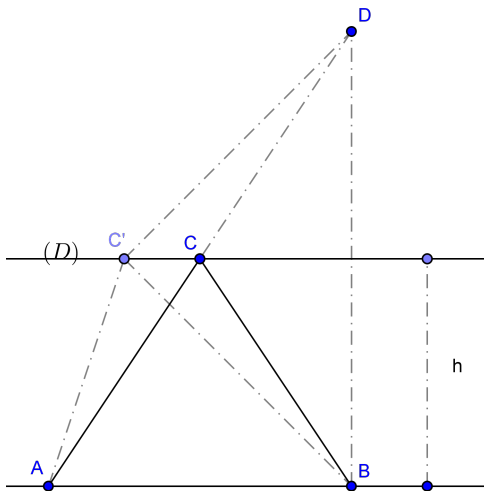
## Inégalité Isopérimétrique

Chez les polygones, pour un périmètre fixé, celui qui maximise l'aire est le polygone régulier.

Chez les courbes, celle qui maximise l'aire est un cercle. D'où, pour toute courbe fermée,  $A < \frac{P^2}{4\pi}$  avec  $A$  l'aire à l'intérieur de la courbe et  $P$  sont périmètre.

### I Les triangles

Soit  $ABC$  le triangle isocèle en  $C$  et  $ABC'$  un triangle quelconque. Les deux triangles ont la même base et la même hauteur, donc la même aire.  $B'$  est le symétrique de  $B$  par rapport à  $(D)$  et  $(D) \parallel (AB)$ .



On a  $AC + CB = AB' < AC' + C'B' = AC' + C'B$  par inégalité triangulaire. Donc  $P(ABC) < P(ABC')$ . Aussi, à aire et à base égale, le triangle isocèle a le plus petit périmètre.

On suppose que  $ABC$  non équilatéral a le plus petit périmètre possible pour envelopper une certaine aire. On peut donc prendre deux côtés consécutifs qui n'ont pas la même longueur. Or, selon le lemme démontré ci-dessus, le triangle aurait la même aire et un périmètre plus faible avec deux côtés égaux. Cela contredit l'hypothèse, donc le triangle d'aire fixé avec le plus petit périmètre est équilatéral.

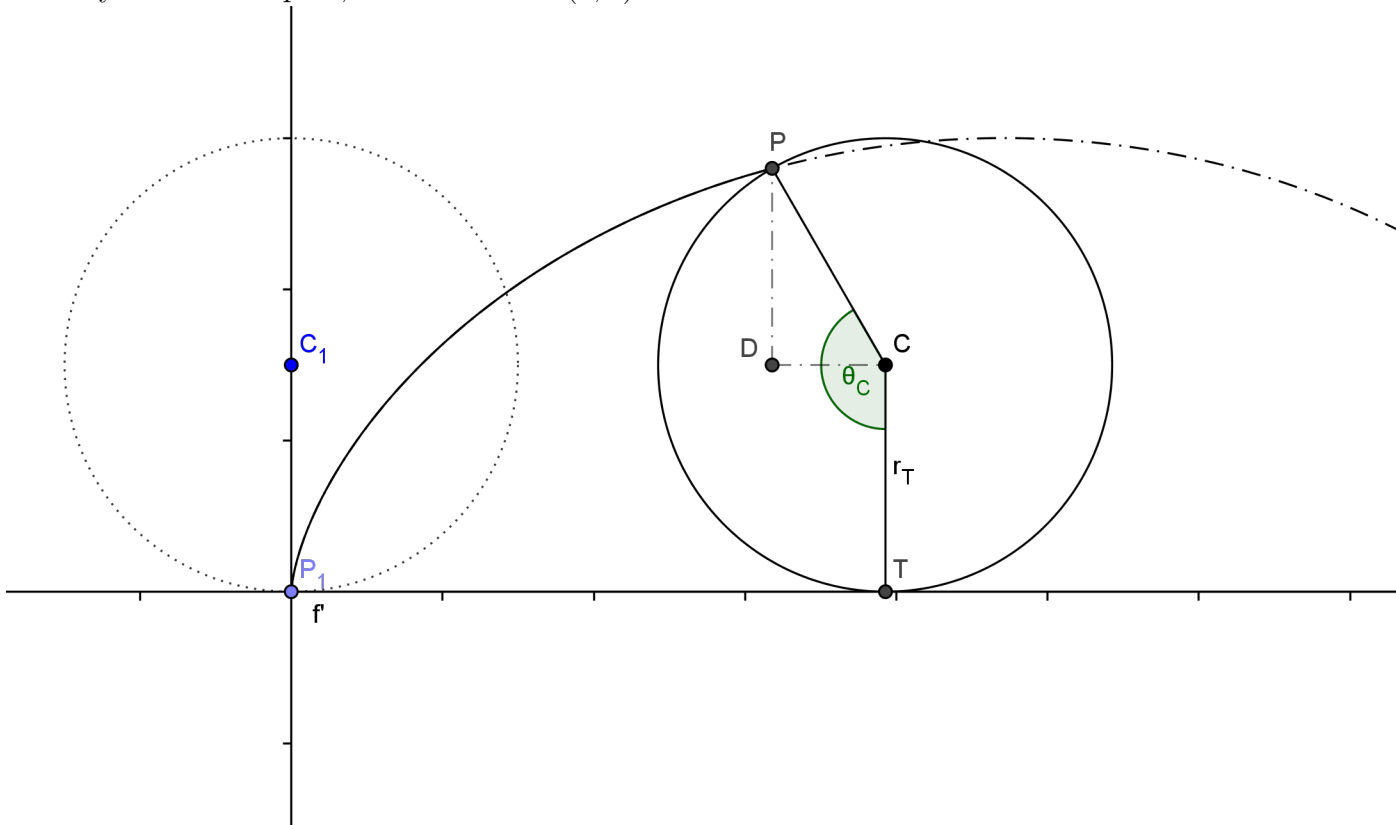
# Chapitre 4

## Les cycloïdes

les cycloïdes sont des courbes en deux dimensions définies par le chemin parcouru par un point fixé sur l'extérieure d'un roue qui avance. Elles ont plusieurs propriétés intéressantes en physique.

### I Équations paramétriques

La courbe est le parcours du point  $P$  en fonction de l'angle  $\theta$  parcouru par le cercle de centre  $C$  et de rayon  $R$ . Au départ,  $\theta_1 = 0$  et  $P_1 = (0; 0)$ .



Sur le dessin, on voit que quand l'angle  $\theta$  est parcouru,  $C = (R\theta; R)$ . On a aussi les longueurs :

$$DC = R\cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = R\sin(\theta)$$

$$DP = R\sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = -R\cos(\theta)$$

D'où les coordonnées de  $P$  :

$$x = R\theta - DC$$

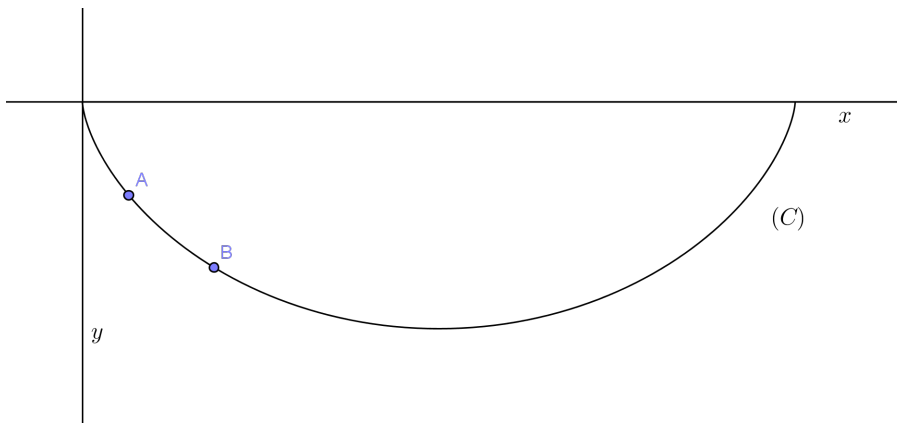
$$y = R + DP$$

$$x = R(\theta - \sin(\theta))$$

$$y = R(1 - \cos(\theta))$$

## II Isochronie

On cherche à vérifier que la courbe de la cycloïde  $C$  est Isochrone. C'est à dire que  $C$  est tel que la période d'une bille lancée n'importe où soit la même. Soit :  $(A, B) \in C^2 \Rightarrow T_A = T_B$ .



Comme la cycloïde est paramétrée en fonction d'un angle  $\alpha$ , on pose  $x(\alpha)$  et  $y(\alpha)$  :

$$dx = x' d\alpha$$

$$dy = y' d\alpha$$

On peut aussi écrire, grâce à la conservation de l'énergie :

$$E_M = E_M(0, 0) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 = mg(y - y_0) \text{ (car notre repère est orienté vers le bas)}$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{2g(y - y_0)}$$

$$v = \frac{dl}{dt} \Rightarrow v dt = dl$$

$$v dt = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{x'^2 + y'^2} d\alpha$$

$$dt = \sqrt{\frac{x'^2 + y'^2}{2g(y - y_0)}} d\alpha$$

$$\Rightarrow t = \int_{\alpha_0}^{\pi} \sqrt{\frac{x'^2 + y'^2}{2g(y - y_0)}} d\alpha \text{ (Temps de parcours de } A \text{ à } D)$$

Écrivons :  $y = R(1 - \cos(\alpha))$  et  $x = R(\alpha - \sin(\alpha))$  (équations paramétriques de la cycloïde) :

$$\Rightarrow t = \int_{\alpha_0}^{\pi} \sqrt{\frac{(R - R\cos(\alpha))^2 + (R\sin(\alpha))^2}{2g[R(1 - \cos(\alpha)) - R(1 - \cos(\alpha_0))]} d\alpha}$$

$$\Rightarrow t = \int_{\alpha_0}^{\pi} \sqrt{\frac{R^2[(1 - \cos(\alpha))^2 + \sin^2(\alpha)]}{2g[R(1 - \cos(\alpha)) - R(1 - \cos(\alpha_0))]} d\alpha}$$

$$\text{Or : } (1 - \cos(\alpha))^2 + \sin^2(\alpha) = 1 - 2\cos(\alpha) + \cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha)$$

$$= 2(1 - \cos(\alpha)) = 4\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$\text{Donc } t = \int_{\alpha_0}^{\pi} \frac{2R\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\sqrt{2gR[(1 - \cos(\alpha)) - (1 - \cos(\alpha_0))]} d\alpha}$$

$\Rightarrow T(\alpha) = 2 \int_{\alpha_0}^{\pi} \frac{2R\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\sqrt{2gR[2\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - 2\sin^2\left(\frac{\alpha_0}{2}\right)]} d\alpha$  (Le temps de  $A$  à  $A'$  est deux fois le temps de  $A$  à  $D$ )

$$T(\alpha) = \sqrt{\frac{R}{g}} \int_{\alpha_0}^{\pi} \frac{2\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\sqrt{[\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\alpha_0}{2}\right)]} d\alpha}$$

$$T(\alpha) = \sqrt{\frac{R}{g}} \int_{\alpha_0}^{\pi} \frac{2\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\sqrt{[\cos^2\left(\frac{\alpha_0}{2}\right) - \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)]} d\alpha}$$

$$T(\alpha) = 2\sqrt{\frac{R}{g}} \int_{\alpha_0}^{\pi} \frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha_0}{2}\right)} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\alpha_0}{2}\right)}} d\alpha}$$

$$\text{Changement de variables : } u = \frac{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha_0}{2}\right)}$$

$$\Rightarrow du = -\frac{1}{2} \frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha_0}{2}\right)} d\alpha$$

$$T(\alpha) = 2\sqrt{\frac{R}{g}} \int_1^0 \frac{-2}{\sqrt{1-u^2}} du$$

$$= 4\sqrt{\frac{R}{g}} [\arcsin(u)]_0^1$$

$$= 4\sqrt{\frac{R}{g}} \frac{\pi}{2}$$

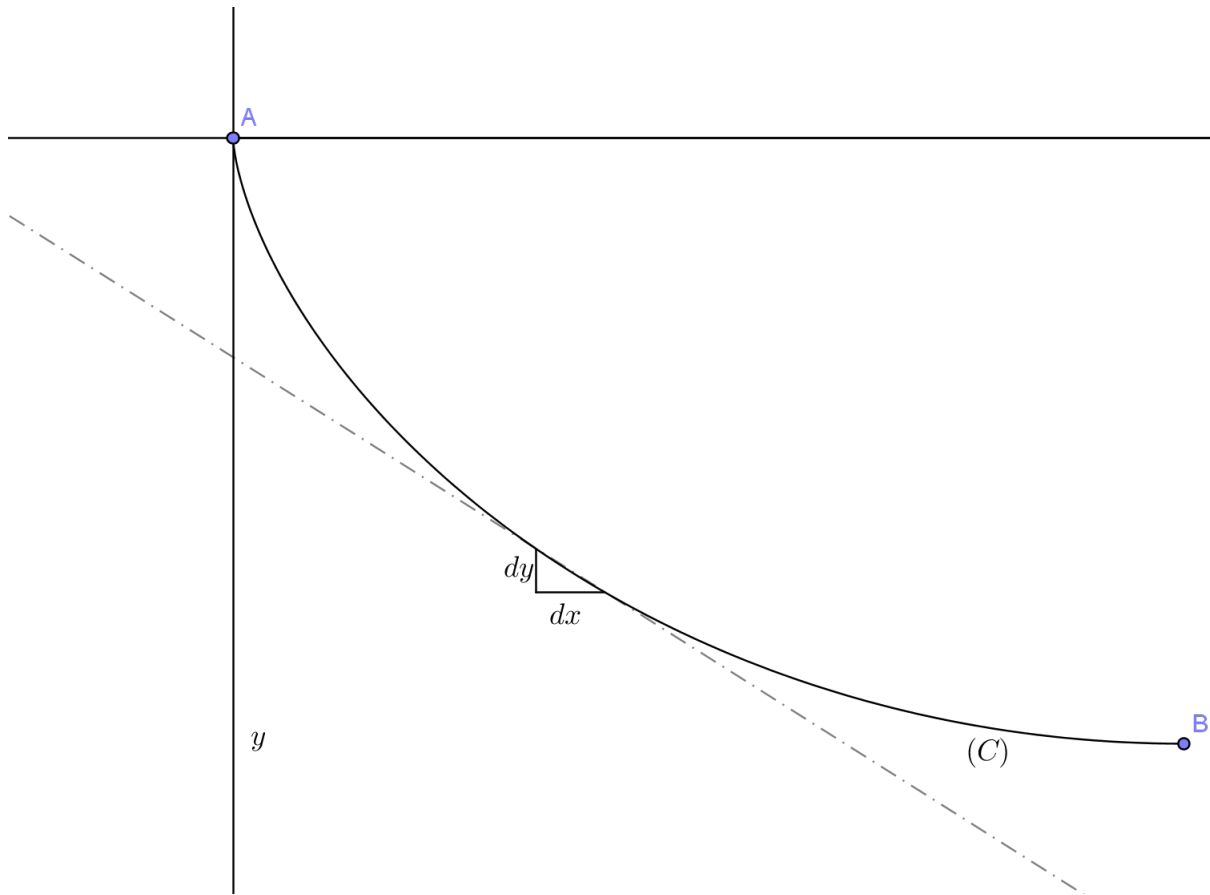
$$T = \pi \sqrt{\frac{4R}{g}}$$

La période d'une bille lâchée dans un arc de cycloïde ne dépend donc pas de la hauteur à laquelle elle est lâchée, mais uniquement du rayon de la cycloïde et de la gravitation.

Cette expression de la période correspond à l'approximation des petites oscillations d'un pendule ( $\sin(\theta) \approx \theta$  quand  $\theta \rightarrow 0$ ).

On peut utiliser cela pour les horloges, la période d'un balancier qui suit une cycloïde ne varie pas suivant l'amplitude du mouvement.

### III Brachystochronie



On cherche ici la courbe qui permet de réduire un maximum le temps parcouru par une bille soumise à la gravitation entre les points de l'espace  $A$  et  $B$ . Cette recherche de minimisation rappelle le principe de moindre action.

On commence par découper l'espace entre  $A$  et  $B$  en fines lames horizontales tel qu'on peut approximer que la vitesse de la bille est constante dans une lame et que le chemin le plus rapide entre deux lames est une droite. Nous pouvons donc utiliser Snell-Descartes :

$$v_i = \frac{c}{n_i} ; n_i \sin(\theta_i) = n_j \sin(\theta_j) \text{ pour toutes les lames, avec } n_i \text{ l'indice de réfraction.}$$

$$\text{D'où } \forall (i, j) : \frac{\sin(\theta_i)}{v_i} = \frac{\sin(\theta_j)}{v_j}$$

D'après la mécanique,  $v = \sqrt{2gy}$  où  $g$  est la constante d'accélération gravitationnelle sur la Terre ( $y$  est orienté vers le bas)

$$\Rightarrow \frac{\sin(\theta)}{\sqrt{y}} = d\sqrt{2g} = \sqrt{k}$$

Avant de continuer, nous devons faire un point sur la trigonométrie et les différentielles.

$$\cot^2(\alpha) + 1 = \frac{1}{\sin^2(\alpha)} \Rightarrow \sin(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{\cot^2(\alpha)+1}}$$

$$\tan(\theta) = \frac{dx}{dy} \text{ (voir } dx \text{ et } dy \text{ sur le schéma)} \Rightarrow \cot(\theta) = \frac{dy}{dx} = y'$$



Remplaçons cela dans notre équation :

$$\frac{1}{\sqrt{y}\sqrt{\cot^2(\theta)+1}} = \sqrt{k}$$

$$y(y'^2 + 1) = \frac{1}{k}$$

$$y'^2 = \frac{1}{yk} - 1 = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

$$dx = \frac{dy}{\sqrt{\frac{1}{yk}-1}}$$

Posons alors  $y = L\sin^2(\alpha) \in ]0; L]$

$$\frac{dy}{d\alpha} = 2L\cos(\alpha)\sin(\alpha)$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{d\alpha} = \frac{2L\cos(\alpha)\sin(\alpha)}{\sqrt{\frac{1}{L\sin^2(\alpha)k}-1}}$$

$$= L(1 - \cos(2\alpha))$$

$$x(\alpha) = \int \frac{dx}{d\alpha} d\alpha = \int L(1 - \cos(2\alpha))$$

$$x(\alpha) = L\left(\alpha - \frac{\sin(2\alpha)}{2}\right)$$

$$x(\alpha) = \frac{L}{2}(2\alpha - \sin(2\alpha))$$

Cela correspond à une équation paramétrique de cycloïde de rayon  $\frac{L}{2}$  et de paramètre  $2\alpha$ , donc une cycloïde est solution du problème de brachystochronie.

# Chapitre 5

## Calcule de la vitesse de la lumière par Römer

### I Histoire de la détermination de la vitesse de la lumière

C'est le danois Ole Römer qui a effectué la première mesure de la vitesse de la lumière en 1676. A l'époque il était à l'observatoire de Paris. Römer fut cette découverte un peu par hasard car à ce temps là il étudiait , Io, un satellite de Jupiter.

Io complète son orbite autour du Jupiter en 42h 28min ( soit 42,5h). Au grand étonnement de l'astronome, celui-ci s'aperçut que « la lune jovienne » n'était pas toujours exactement où elle aurait dû se trouver. A certains époques de l'année, elle était légèrement en avance et à d'autres moments, légèrement en retard.

En étudiant Io plusieurs mois, Römer observa que le retard s'accroissait sur une période de six mois pour atteindre jusqu'à 8 minutes, puis le retard commençait à diminuer jusqu'à ce que « la lune jovienne » soit, six mois plus tard, 8 minutes en avance.

Römer, s'aperçut que la phénomène correspondait à un cycle s'étendant sur une période d'une année et, surtout, que le cycle correspondait à l'éloignement et au rapprochement de la Terre par rapport à Jupiter. Le moment où Io était le plus en retard correspondait exactement au moment où la Terre était le plus éloignée de Jupiter, et inversement ; lorsque Io était le plus en avance, cela correspondait au moment où la Terre était le plus près de Jupiter.

L'astronome alors est arrivé à la seule conclusion qui s'imposait : La lumière prenait un certain temps à parcourir la distance entre la Terre et Jupiter. Cette découverte sera une révolution parmi les savants, puisqu'on croyait jusque-là que la lumière se propageait instantanément. Römer estima la vitesse de la lumière à environ 350 000 km/s – une estimation pas très éloignée de la véritable valeur de 299 792 km/s. Et ce n'est pas vraiment si mal si on considère les instruments de l'époque.

### II Les connaissances de l'époque

À l'époque de la découverte de Römer (1676), plusieurs grandeurs étaient déjà connues de façon approximatives :

-la distance Terre-Soleil  $TS = 1 U.A \approx 138370000km$

- la distance Jupiter-Soleil  $JS \approx 5,2 U.A$
- Le rayon de la Terre  $r_T = 6400 km$  (par Ératosthène)
- La période de Io, satellite de Jupiter, observée depuis la Terre quand elle se rapproche de Jupiter :  $P'' = 1,76962 jours$
- Quand elles s'éloignent :  $P' = 1,77003 jours$
- La période réelle :  $P_0 = 1,76983 jours$  (Moyenne des périodes observées pendant un an depuis la Terre)
- La vitesse orbitale de la Terre :  $v = 30km \cdot s^{-1}$

## 1 Les lois de Kepler

Les lois de Kepler aident grandement aux études du système solaire. Elles sont utilisées dans plusieurs des démonstrations suivantes. Trois ont été publiées entre 1609 et 1618 :

- La loi des orbites
- La loi des aires
- La loi des périodes

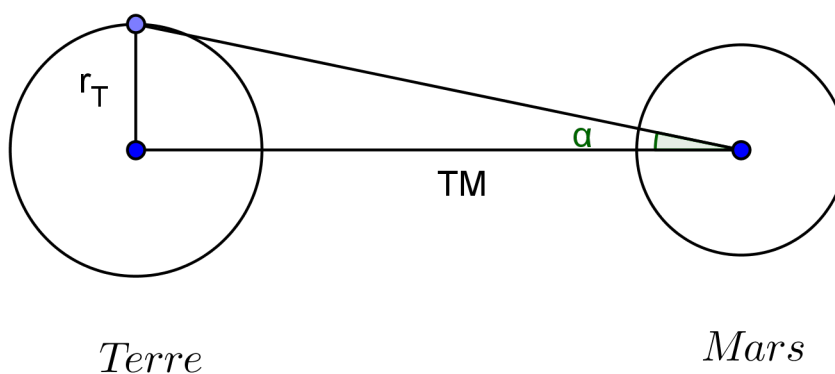
## 2 Distance Jupiter-Soleil

Cette distance se trouve grâce à la troisième loi de Kepler (1618). Celle-ci donne  $\frac{a^3}{T^2}$  est constante pour tout les astres tournant autour du soleil.  $a$  est le demi grand axe, donc  $a \approx R$  et  $T$  est la période de révolution de l'astre. On sait que  $T_{Terre} = 1 année$  et  $T_S = R_{Terre} = 1 U.A$ . Donc  $\frac{R^3}{T^2} = 1$  quelque soit la planète du système solaire. On peut donc écrire :  $R = \sqrt[3]{T^2}$ . D'après les observations des astronomes, on sait que la période de Jupiter  $T_J = 11,8 ans$ , donc

$$JS \approx 5,2 U.A$$

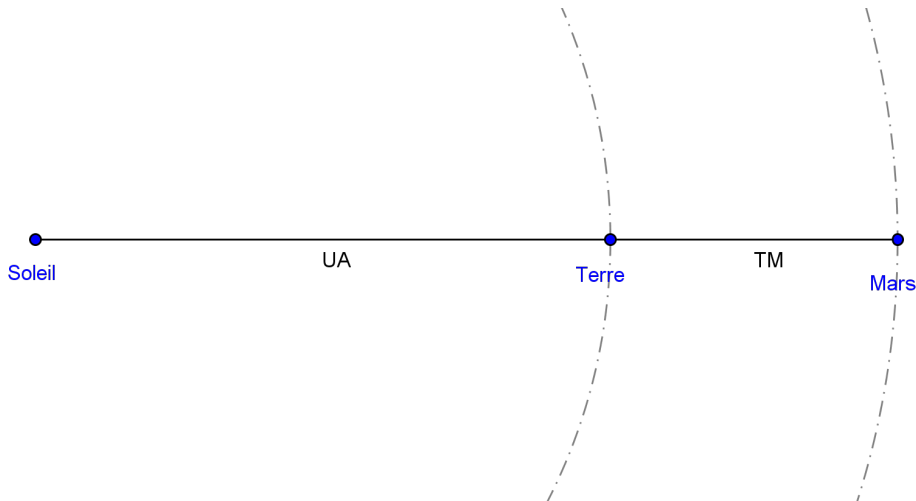
## 3 Distance Terre-Soleil par Cassini et Richer

Cassini, Picard et Richer étaient des astronomes du *XVII<sup>e</sup>* siècle. Cette approximation date de 1672. Tout d'abord, ils calculent la distance Terre-Mars quand Mars est au plus proche de nous.



D'après le schéma, l'expression de la distance Terre-Mars s'écrit :  $TM = \frac{r_T}{\tan(\alpha)}$

En observant Mars depuis deux sites, un près des pôles et l'autre sur l'équateur, ils en déduisent l'angle  $\alpha \approx 24''$ , D'où  $TM \approx 55 \cdot 10^9 m$ .



D'après la troisième loi de Kepler, on peut écrire :

$$\frac{R_T^3}{T_T^2} = \frac{R_M^3}{T_M^2} \text{ avec } R_M = R_T + TM$$

$$R_T = \frac{TM^2}{\sqrt[3]{\frac{T_M}{T_T}} - 1}$$

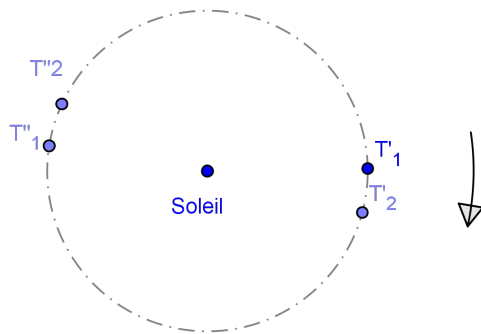
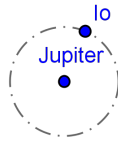
On a :  $T_M = 1,88 \text{ ans}$ , d'où l'application numérique :

$$R_T \approx 1,4 \cdot 10^{11} m$$

### III Démonstration avec l'analogie de l'effet Doppler-Fizeau

Soit : les situations (1) et (2) sont séparées d'une période.  $t_1$  et  $t_2$  l'instant réel d'apparition de Io dans les situations (1) et (2).  $L_1 = T_1 J_1$  et  $L_2 = T_2 J_2$  la distance Jupiter-Terre aux situations (1) et (2) ;  $P_{perçu}$  la période de Io perçu par la Terre.  $P_0$  la période réelle ;  $v$  la vitesse orbitale de la Terre ;  $c$  la célérité de la lumière.

Cette démonstration est analogue à une situation d'effet Doppler-Fizeau où l'onde est l'apparition régulière de Io, cette onde se déplace à la vitesse de la lumière. Le récepteur est la Terre, il se déplace en s'éloignant ou se rapprochant de Jupiter.



$$t_{1\text{perçu}} = t_1 + \frac{L_1}{c} \text{ et } t_{2\text{perçu}} = t_2 + \frac{L_2}{c}$$

$$P_0 = t_2 - t_1$$

$$\text{D'où } P_{\text{perçu}} = t_{1\text{perçu}} - t_{2\text{perçu}} = P_0 + \frac{L_2 - L_1}{c}$$

Posons à présent  $P'$ ,  $L'_1$  et  $L'_2$ , les mêmes grandeurs que  $P_{\text{perçu}}$ ,  $L_1$  et  $L_2$  quand la Terre s'éloigne de Jupiter.  $P''$ ,  $L''_1$  et  $L''_2$  sont les mêmes quand la Terre se rapproche de Jupiter.

$$P' = P_0 + \frac{L'_2 - L'_1}{c} \text{ et } P'' = P_0 + \frac{L''_2 - L''_1}{c} \text{ On retrouve ici les égalités de Doppler-Fizeau.}$$

$$L'_2 - L'_1 = v(t'_1 - t'_2) = vP_0 \text{ et } L''_2 - L''_1 = -vP_0$$

$$P' - P'' = \frac{L'_2 - L'_1}{c} - \frac{L''_2 - L''_1}{c} = \frac{2vP_0}{c}$$

$$\Rightarrow \boxed{c = \frac{2vP_0}{P' - P''}}$$

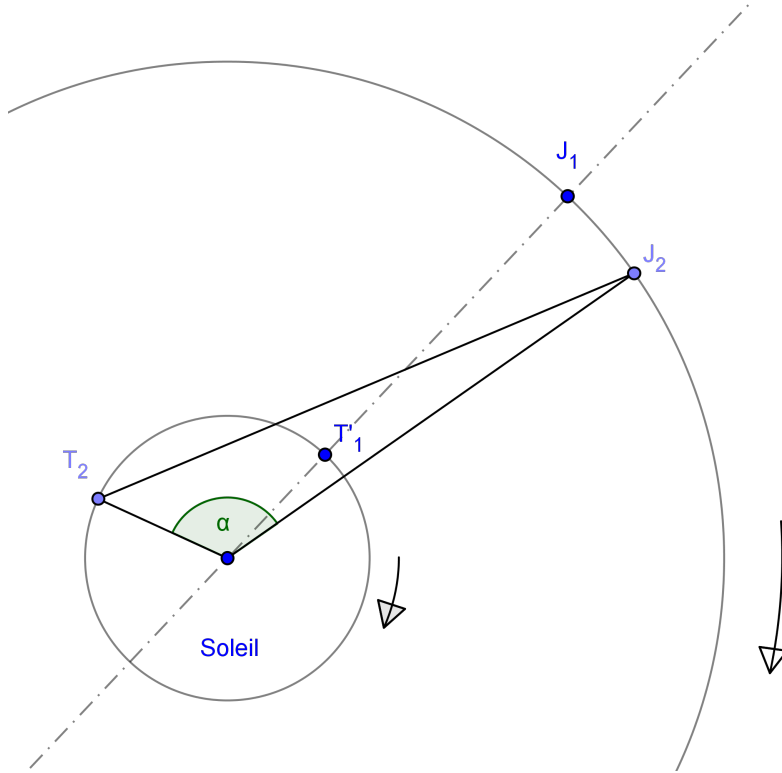
$$\text{L'application numérique donne } \boxed{c \approx 2,6 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}$$

## IV Démonstration selon Römer

Römer observe un décalage entre l'heure théorique et l'heure observée des éclipses de seize minutes entre la position (1) et (2). Cela signifie que la lumière met seize minutes de plus pour

parcourir la distance  $T_2J_2$  que pour  $T_1J_1$ . Pour calculer la vitesse de la lumière, il faut donc déterminer la différence des distances  $T_2J_2$  et  $T_1J_1$ .

L'observation (1) a lieu quand la Terre est au plus proche de Jupiter, soit quand le Soleil, la Terre et Jupiter sont alignés, d'où :  $T_1J_1 = JS - TS = 4,2 U.A.$  L'observation (2) a lieu  $\Delta t = 261 \text{ jours}$  plus tard.



On cherche à calculer  $T_2J_2$ . D'après le théorème d'Al Kashi, on a :

$$JT_2^2 = JS^2 + ST^2 - 2(JS \times ST)\cos(\alpha)$$

Calculons  $\alpha$  :

$$\alpha = 2\pi(\alpha_T - \alpha_J)$$

$$= -2\pi\left(\frac{\Delta t}{T_T} - \frac{\Delta t}{T_J}\right) \text{ où } \Delta t \text{ est le temps écoulé, } T_T \text{ et } T_J \text{ les périodes de la Terre et de Jupiter.}$$

D'où :

$$JT_2 = \sqrt{JS^2 + ST^2 - 2(JS \times ST)\cos\left(-2\pi\left(\frac{\Delta t}{T_T} - \frac{\Delta t}{T_J}\right)\right)}$$

L'application numérique donne :

$$JT_2 = 5,77 U.A$$

D'où une différence de marche  $J_2T_2 - J_1T_1 = 1,57 U.A$

Enfin, calculons la vitesse de la lumière :

$$c = \frac{J_2T_2 - J_1T_1}{\Delta t} \approx 2,25 \cdot 10^8 m \cdot s^{-1}$$

# Chapitre 6

## Euler-Lagrange

### I Théorème

Soit  $x(t)$  une fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}^n$ ,  $\dot{x}(t)$  sa dérivée par  $t$  et  $t \in \mathbb{R}$ .  $f(t, x, \dot{x})$  une fonction dans  $\mathbb{R}$ . L'intégrale  $I = \int_{t_0}^{t_1} f(t, x, \dot{x}) dt$  est extrémale quand  $\boxed{\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \right) = 0}$ . Usuellement, on a :

$x(t) : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^3$  un chemin

$\dot{x}(t) : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^3$  une vitesses le long d'un chemin

$t : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  le temps

$f(t, x, \dot{x})$  une énergie

Ce théorème permet donc de retrouver le chemin entre deux points qui minimise une énergie.

### II Démonstration

#### 1 Lemme

Soit  $f : \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$

Si  $\forall h \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R}), h(a) = h(b) = 0$  On a :  $\int_a^b f(t)h(t)dt = 0$

Alors  $\boxed{f = 0 \text{ sur } [a, b]}$

preuve

Si  $\exists x \in ]a, b[, f(x) > 0$ , par continuité on a interval  $I$  de  $]a, b[, f(I) > 0$ . Prenons  $h$  tel que :

$$\begin{cases} h(x) > 0 \text{ sur } I \\ h(x) = 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

On a alors  $\begin{cases} f \times h > 0 \text{ sur } I \\ f \times h = 0 \text{ sinon} \end{cases}$  C'est absurde, donc  $\forall x \in ]a, b[, f(x) \leq 0$ . On fait de même avec

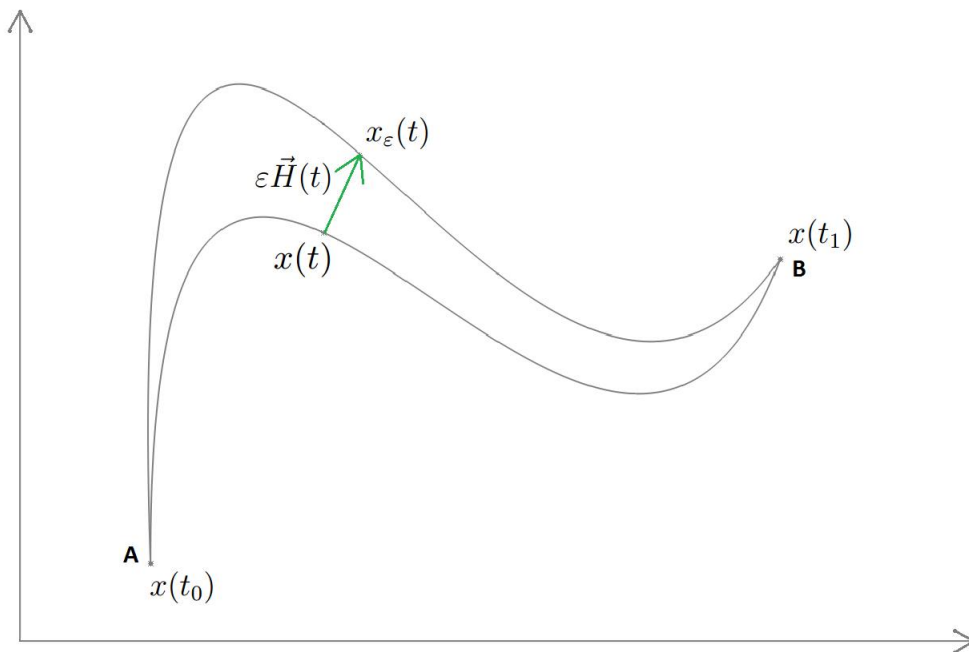
$f(x) < 0$  Et on obtient :

$$\forall x \in ]a, b[, f(x) = 0$$

## 2 Preuve du théorème

Soit  $f$  tel que  $f(a) = A$  et  $f(b) = B$  et  $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $x$  rend  $\mathcal{A} = \int_{t_0}^{t_1} f(x, \dot{x}, t) dt$  extrémale. Alors une perturbation de  $x$  dans un cas augmentera (minimale) et dans l'autre diminuera (maximale)  $\mathcal{A}$ . Posons la fonction perturbée :

$x_\varepsilon(t) = x + \varepsilon h(t)$  tel que  $h(t) \in \mathcal{C}^1$  et  $h(t_0) = h(t_1) = 0$  car les points de départs et d'arrivés sont fixés.  $h(t)$  est la fonction de perturbation du chemin.



$$\mathcal{A}(\varepsilon) = \int_{t_0}^{t_1} f(x, \dot{x}, t) dt$$

$$\frac{d\mathcal{A}(\varepsilon)}{d\varepsilon} = \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} f(x, \dot{x}, t) dt$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \left( \frac{\partial x}{\partial \varepsilon} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial \dot{x}}{\partial \varepsilon} \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} + \frac{\partial t}{\partial \varepsilon} \frac{\partial f}{\partial t} \right) dt \text{ Or, } h(t) = \frac{\partial x}{\partial \varepsilon} \text{ donc :}$$

$$\frac{d\mathcal{A}(\varepsilon)}{d\varepsilon} = \int_{t_0}^{t_1} \left( h(t) \frac{\partial f}{\partial x} + \dot{h}(t) \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \right) dt$$

$$\text{Or, pour a extrémale, on a } \frac{d\mathcal{A}(\varepsilon)}{d\varepsilon} = 0$$

$\int_{t_0}^{t_1} h(t) \frac{\partial f}{\partial x} dt + \int_{t_0}^{t_1} \dot{h}(t) \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} dt = 0$  Soit  $h_i(t)$  les coordonnées de  $h(t)$  et  $x_i(t)$  les coordonnées de  $x(t)$ . Avec une intégration par parties, on obtient :

$$\int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^n h_i(t) \frac{\partial f}{\partial x_i} dt + \sum_{i=1}^n [h_i(t) \frac{\partial f}{\partial \dot{x}_i}]_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^n h_i(t) \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f}{\partial \dot{x}_i} \right) dt = 0 \text{ Or, } \forall i, h_i(t_0) = h_i(t_1) = 0 :$$

$$\sum_{i=1}^n \int_{t_0}^{t_1} h_i(t) \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f}{\partial \dot{x}_i} \right) \right) dt = 0$$

$$\text{Posons } F_i = \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f}{\partial \dot{x}_i} \right) \right)$$



On a alors  $\forall i, \forall h_i(t) \in \mathcal{C}^1([t_0, t_1], \mathbb{R}), h_i(t_0) = h_i(t_1) = 0$  et  $\sum_{i=1}^n \int_{t_0}^{t_1} h_i(t) \times F_i \cdot dt = 0$

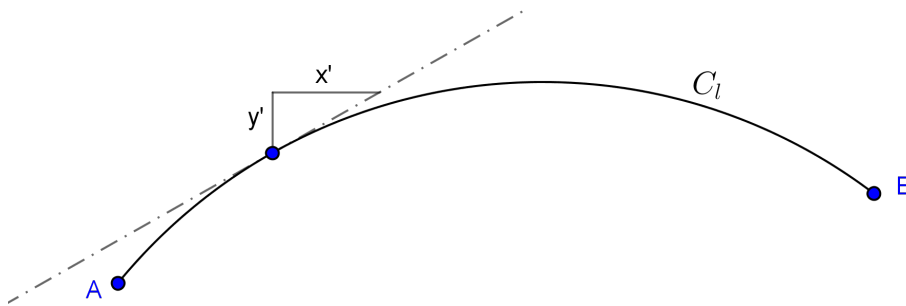
Donc, en prenant  $h(t)$  tel que  $\begin{cases} h_j = 1 \text{ si } j = i \\ h_j = 0 \text{ sinon} \end{cases}$  on obtient :

$\forall i, \int_{t_0}^{t_1} h_i(t) \times F_i \cdot dt = 0$  donc  $\forall i, F_i = 0$

$$\Rightarrow \left( \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \right) = 0 \right)$$

### III Minimisation de temps

On cherche à déterminer le trajet entre deux points  $A$  et  $B$  qui minimise le temps parcouru, le déplacement est à vitesse constante. On utilisera le théorème d'Euler-Lagrange avec  $l(\alpha) = \begin{pmatrix} x(\alpha) \\ y(\alpha) \end{pmatrix}$  courbe chemin,  $l'(\alpha) = \begin{pmatrix} x'(\alpha) \\ y'(\alpha) \end{pmatrix}$  son gradient,  $\alpha \in \mathbb{R}$  une paramétrisation.



Soit  $f(\alpha, l, l') = dt = \frac{\|l'(\alpha)\|}{c} = \frac{\sqrt{x'^2 + y'^2}}{c}$  l'élément à intégrer entre  $\alpha = a$  et  $\alpha = b$  pour obtenir le temps de parcours. Le trajet minimise donc  $\Delta t = \int_a^b f(\alpha, l, l') d\alpha$ , d'où, d'après le théorème :  $\frac{\partial f}{\partial l} - \frac{d}{d\alpha} \left( \frac{\partial f}{\partial l'} \right) = 0$ .

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 - \frac{d}{d\alpha} \frac{2x'}{2c\sqrt{x'^2 + y'^2}} = 0 \\ 0 - \frac{d}{d\alpha} \frac{2y'}{2c\sqrt{x'^2 + y'^2}} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} = K_1 \\ \frac{y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} = K_2 \end{cases} \text{ avec } K_1 \text{ et } K_2 \text{ deux constantes.}$$

On a donc  $y'(\alpha) = \frac{K_2}{K_1} x'(\alpha) \forall \alpha \in [a, b]$  : toutes les tangentes à la courbe de  $l$  ont la même direction et  $l$  est continue, donc la trajectoire est une droite.

## IV Minimisation de l'action et PFD

### 1 Théorème

En 1744, Maupertuis a proposé une définition de l'action en mécanique :  $\mathcal{A}_a^b = \int_{A, t_a}^{B, t_b} mv \cdot dx$  qui doit être minimal à chaque instant pour un trajet donné. Lagrange donne une définition équivalente, mais plus simple en 1788 :  $\mathcal{A}_a^b = \int_{t_a}^{t_b} (T(\dot{x}) - U(x)) \cdot dt$  où  $T$  est l'énergie cinétique et  $U$  est l'énergie potentiel,  $x$  un chemin. Cela correspond donc à une minimisation d'énergie. Nous cherchons à montrer que  $\mathcal{A}_a^b$  extrémale implique le Principe Fondamental de la Dynamique.

$\mathcal{A} = \int_{t_a}^{t_b} \mathcal{L}(x, \dot{x}, t) \cdot dt$  avec  $\mathcal{L}(x, \dot{x}, t) = T - U$  le lagrangien  $\mathcal{L} = \frac{1}{2}m|\dot{x}|^2 - U(x)$ . D'après le théorème d'Euler-Lagrange, pour  $\mathcal{A}$  extrémale, on a :  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right) = 0$

$$\Rightarrow \frac{-\partial U}{\partial x} = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2}m \sum_{i=1}^n \frac{d}{dx} \dot{x}_i^2 \right)$$

$$= \frac{d}{dt} (m \sum_{i=1}^n \dot{x}_i)$$

$$= m \sum_{i=1}^n \ddot{x}_i$$

$$\Rightarrow \frac{-\partial U}{\partial x} = m \frac{\partial \dot{x}}{\partial t}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\vec{F} = m\vec{a}}$$

Nous obtenons ainsi l'expression de Principe Fondamental de la Dynamique à partir de l'action lagrangienne.

## V Conservation de l'énergie

L'objectif ici est de démontrer que  $E = T + U$  est constant à l'aide de la fonction précédente.

$$E = 2T + U - T = m\dot{x}^2 + U - T = \dot{x} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} - \mathcal{L}$$

$$\frac{dE}{dt} = \ddot{x} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} + \dot{x} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{d\mathcal{L}}{dt}$$

$$= \ddot{x} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} + \dot{x} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} - 0 \text{ car } \mathcal{L} \text{ ne dépend pas explicitement du temps.}$$

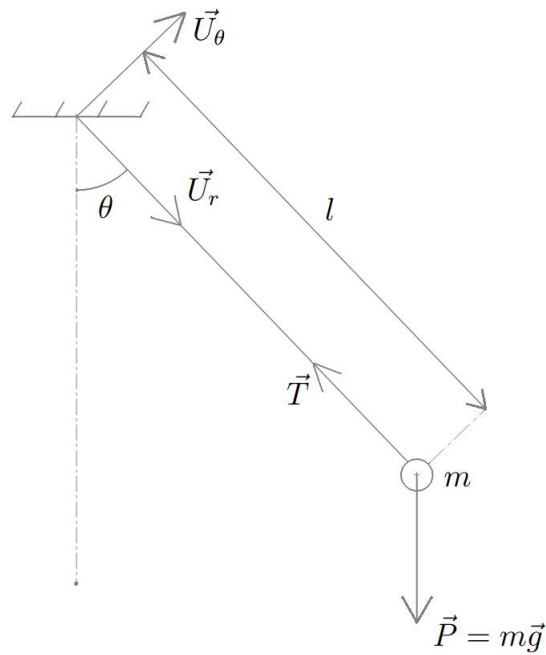
$$\text{Or, } \frac{d\mathcal{L}}{dt} = \ddot{x} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} + \dot{x} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}$$

Donc  $\boxed{\frac{dE}{dt} = 0}$  ; l'énergie mécanique ne dépend pas du temps, l'énergie mécanique se conserve.

## VI Application au pendule simple

### 1 Les équations différentielles

Le pendule  $M$  de masse  $m$  n'est soumis qu'au poids et à la tension du fil accroché en  $O$  de longueur  $l$ . L'angle entre l'axe vertical ( $\vec{U}_y$ ) et le fil ( $\vec{U}_r$ ) est  $\theta$ . Nous chercherons une expression de  $\ddot{\theta}$  de deux façons différentes, et nous verrons que ces méthodes sont équivalentes.



Avec le PFD

$$O\vec{M} = l\vec{U}_r$$

$$\vec{v} = l \frac{d\vec{U}_r}{dt} = l\dot{\theta}\vec{U}_\theta$$

$$\vec{a} = l \frac{d^2\vec{U}_r}{dt^2} = l\ddot{\theta}\vec{U}_\theta - l\dot{\theta}^2\vec{U}_r$$

Bilan des forces :

$$\vec{T} = T\vec{U}_r \text{ et } \vec{p} = mg \begin{pmatrix} \cos(\theta)\vec{U}_r \\ -\sin(\theta)\vec{U}_\theta \end{pmatrix}$$

$$\text{D'où } m\vec{a} \cdot \vec{U}_\theta = ml\ddot{\theta} = \vec{p} \cdot \vec{U}_\theta = -mg \cdot \sin(\theta)\vec{U}_\theta \cdot \vec{U}_\theta$$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \sin(\theta)}$$

Avec le lagrangien  $\mathcal{L}$

$$\mathcal{L}(\theta, \dot{\theta}) = T - U = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl \cdot \cos(\theta)$$

D'après le théorème d'Euler-Lagrange, on a :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = -mgl \cdot \sin(\theta)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) = \frac{d}{dt} (ml^2\dot{\theta}) = ml^2\ddot{\theta}$$

$$\text{Donc : } -mgl \cdot \sin(\theta) = ml^2\ddot{\theta}$$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \sin(\theta)}$$

Les deux méthodes donnent les mêmes résultats, comme démontré précédemment.

## 2 Quelques courbes de vitesse angulaire en fonction de l'angle

Nous avons vu que  $E = T + U$  est constante. Nous tracerons donc les courbes des vitesses angulaires en fonction de l'angle pour différentes valeurs de l'énergie mécanique  $E$ .

$$E = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - mgl \cos(\theta)$$

$$\Rightarrow \dot{\theta} = \pm \sqrt{\frac{2E + 2mg \cos(\theta)}{ml^2}}$$

Pour notre application numérique, nous choisirons,  $m = 1kg$ ,  $g = 10m \cdot s^{-2}$  et  $l = 1m$ , afin de simplifier les calculs à venir.

$$\Rightarrow \dot{\theta} = \pm \sqrt{2E + 20 \cos(\theta)}$$

On s'aperçoit qu'avec  $E < 10$ , la vitesse angulaire n'est pas définie : l'énergie ne peut pas être inférieure à  $-10$  pour ce système. Avec  $E = -10$ , la vitesse angulaire n'est définie qu'en  $\theta = 0$ , avec  $\dot{\theta} = 0$ , donc, avec cette valeur, le pendule est immobile à l'équilibre.

Pour  $E \in ]-10; 10[$ , on observe des oscillations du pendule, d'un angle  $-\theta$  à  $\theta$ . La courbe de la vitesse angulaire  $\dot{\theta}$  en fonction de l'angle  $\theta$  correspondante à  $E = 0 \in ]-10; 10[$  est affichée en (1) sur le graphique. le pendule oscille pour cet exemple entre  $\theta = \frac{\pi}{2}$  et  $\theta = -\frac{\pi}{2}$ .

Pour  $E > 10$ ,  $\dot{\theta}$  garde toujours le même signe, c'est à dire que le pendule n'oscille plus, mais tourne continuellement et toujours dans le même sens. La courbe (2) correspond au cas  $E = 20 > 10$ .

Enfin, un cas particulièrement intéressant, quand  $E = 10$  le pendule oscile entre l'angle  $\theta = \pi$  et  $\theta = -\pi$ . Ce cas est décrit par la courbe (2). On détermine le temps de parcours du pendule de l'angle  $0$  à  $\pi$  :

$$\frac{d\theta}{dt} = \sqrt{20 \cdot (1 + \cos(\theta))}$$

$$\Rightarrow dt = \frac{d\theta}{\sqrt{20 \cdot (1 + \cos(\theta))}}$$

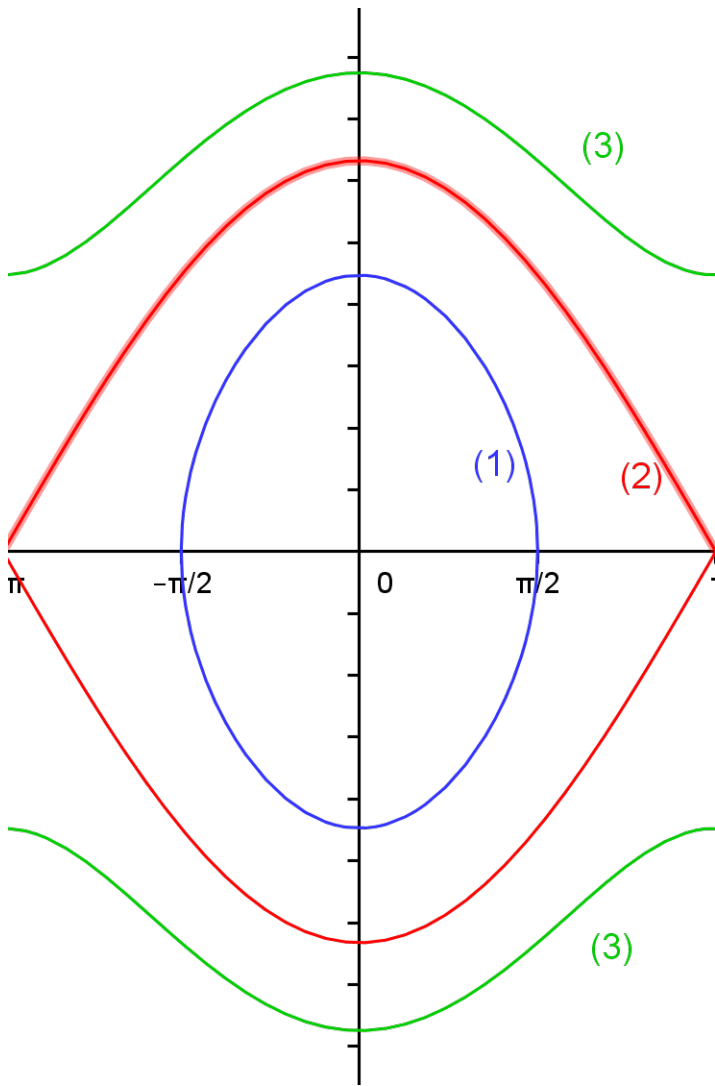
$$\Delta t = \int_0^\pi \frac{d\theta}{\sqrt{20 \cdot (1 + \cos(\theta))}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{40}} \int_0^\pi \frac{d\theta}{\sqrt{\cos(\frac{\theta}{2})}}$$

Comme la fonction n'est pas définie en  $\pi$ , on utilise le développement limité de  $\cos(\frac{\theta}{2})$  en  $\pi$  :  $\cos(\frac{\theta}{2}) = \frac{1}{2}(x - \pi) + o(x^2)$ . D'où :

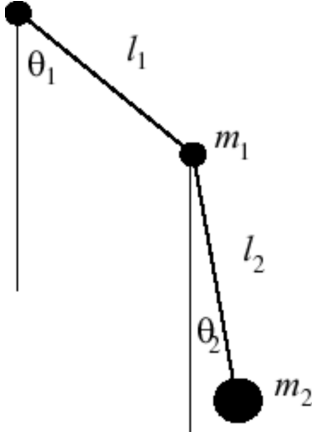
$\Delta T \sim \frac{2}{x - \pi}$  en  $\pi$ . Or, d'après le critère de Riemann, cette intégrale divergente tend vers  $+\infty$ . On a donc, dans le cas  $E = 10$  :

$\Delta T = +\infty$  ; le temps de parcours de  $0$  à  $\pi$  est infini dans ce cas.



## VII Application au pendule double

Le pendule est composé de deux corps  $M_1$  et  $M_2$  de masse respective  $m_1$  et  $m_2$ .  $M_1$  est relié à l'origine  $O$  par une tige de longueur  $l_1$  et  $M_2$  est relié à  $m_1$  avec la longueur  $l_2$ . L'angle  $\theta_1$  est l'angle entre la première tige et l'axe vertical,  $\theta_2$  est l'angle entre la deuxième tige et l'axe vertical. Nous cherchons une équation différentiel permettant de décrire le mouvement à l'aide du lagrangien  $\mathcal{L}$ .



$$\mathcal{L}(\theta, \dot{\theta}) = T - U$$

$$T = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2$$

Avec  $v_2^2 = (\vec{v}_1 + \vec{v}'_2)^2$  où  $v'_2$  est la vitesse de  $M_2$  par rapport à  $M_1$

$$= v_1^2 + v_2'^2 + \vec{v}_1 \cdot \vec{v}'_2$$

$$\text{D'où : } T = \frac{1}{2}m_1l_1^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2[l_1^2\dot{\theta}_1^2 + l_2^2\dot{\theta}_2^2 + 2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)]$$

$$U = -m_1gl_1 \cos(\theta_1) - m_2g(l_1 \cos(\theta_1) + l_2 \cos(\theta_2))$$

$$U = -(m_1 + m_2)gl_1 \cos(\theta_1) - m_2gl_2 \cos(\theta_2)$$

D'après le théorème d'Euler-Lagrange, on a :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) = 0$$

$$(1) (m_1 + m_2)l_1\ddot{\theta}_1 + m_2l_2\ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + m_2l_2\dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + (m_1 + m_2)g \sin(\theta_1) = 0$$

$$(2) l_1\ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) + l_2\ddot{\theta}_2 - l_1\dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + g \sin(\theta_2) = 0$$

# Chapitre 7

## Conclusion

En conclusion, cet E.C. Projet nous a permis d'apprendre beaucoup sur la façon comment les physiciens de l'époque ont pu théoriser et appliquer le Principe de Moindre Action. L'étude de phénomènes autant reliés à l'optique, la mécanique ou la géométrie nous a fait prendre conscience des passerelles entre différents domaines de la physique qui ne sautent pas forcément aux yeux lors des EC d'enseignements traditionnels.

En parlant d'EC d'enseignement, il est important de souligner que ce que nous avons mis en œuvre lors de ce semestre se rapprochait plus d'un apprentissage que le déroulement d'un projet, car le but de ce projet était essentiellement de s'informer le plus possible concernant le Principe de Moindre Action.

La poursuite de ce projet risque cependant d'être difficile à mettre en œuvre puisqu'il s'agissait d'avantage d'un enrichissement personnel et non de l'élaboration d'une méthodologie qui pourrait être complétée. En outre le fait d'approfondir un peu ce sujet avec d'autres groupes de P6 (qui profiteraient de nos recherches) pourrait aboutir sur ce qui ressemblerait à « un cours » concernant l'histoire du Principe de Moindre Action et ses applications.