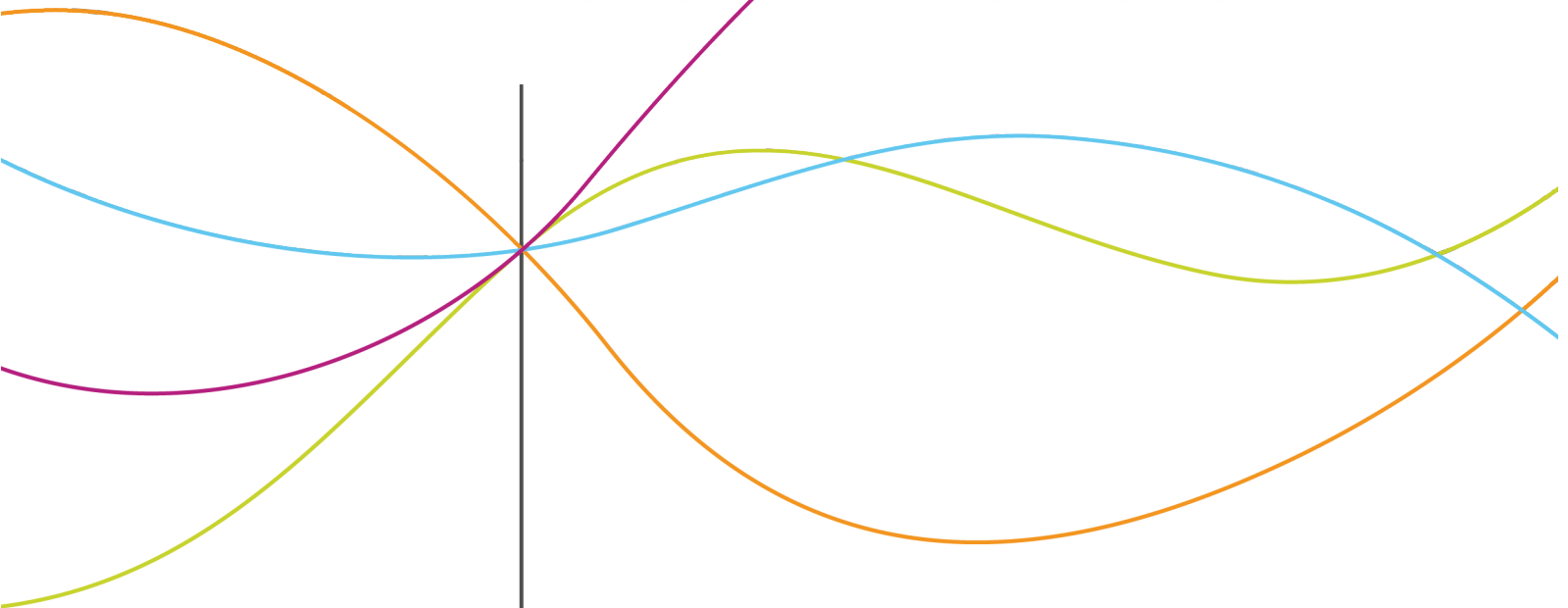


Oscillateur Masses Ressorts



Enseignant responsable :
Bernard Gleyse

Étudiants :
Guillaume Boulier
Sylvain Petit

Robin Condat
Cécile Ottino
Sophie Fougeron

Date de remise du rapport : 15/06/2015

Référence du projet : STPI¹/P6/2014 – 2015

Intitulé du projet : Projet n°6 : Oscillateur masses-ressorts

Type de projet : *modélisation mathématique*

Objectifs du projet : *L'objectif du projet est de modéliser le mouvement des masses d'une oscillateur harmonique horizontal à n masses et $n+1$ ressorts. On cherche donc à obtenir les n équations du mouvement indépendantes des n masses par rapport à leur position d'équilibre.*

Remerciements : *Nous tenons tout particulièrement à remercier M. Gleyse, notre encadrant, pour ses nombreux conseils avisés*

Table des matières

Introduction	4
1 Méthodologie, organisation du travail	5
2 Système à deux masses et trois ressorts	6
2.1 Mise en équation du système	6
2.2 Résolution	7
2.3 Étude graphique des résultats	9
3 Système à n masses et (n+1) ressorts	14
3.1 Mise en équation	14
3.2 Résolution	15
Conclusion	27
Bibliographie	28
4 Annexe	30

Introduction

Dans le cadre de notre dernier semestre du département STPI, il nous a été demandé d'effectuer un projet de physique. Chacun d'entre nous a dû choisir cinq sujets parmi une cinquantaine proposée. Le travail demandé dans chaque projet était spécifique. Certains projets constituaient ainsi en un travail de simulation, d'autres un travail de bibliographie et certains encore un travail de modélisation. Nous avons été affectés au sujet numéro 6, c'est-à-dire l'oscillateur masse-ressort. Alliant simulation et raisonnements mathématiques, ce projet fut un véritable défi pour nous cinq. Nous sommes partis d'un problème de physique classique (étudier le mouvement de masses accrochées à des ressorts) avec pour objectifs de modéliser cette situation et de résoudre mathématiquement ce problème, et ce dans le but ultime de comparer les résultats théoriques avec les expérimentations concrètes réalisées par un projet précédent. Cette résolution a nécessité la mise en application de nombreux raisonnements mathématiques et physiques que nous avons étudié au cours de ces quatre semestres de STPI. Nous avons ainsi pu comprendre l'unité et la complétude de toutes ces notions.

Lors de ces cinq mois de collaborations, notre travail s'est essentiellement concentré autour de la détermination des équations de mouvement de masse d'un système oscillateur masse ressort horizontale. A partir du modèle physique d'un oscillateur horizontal de n masses et $n+1$ ressorts, en considérant respectivement les masses et les constantes de raideur de chaque masse et chaque ressort égales, nous avons réalisé l'ensemble du raisonnement mathématiques menant aux équations. Grâce à ce raisonnement nous avons pu modéliser, à l'aide du logiciel SAGE, la position d'une i ème masse en fonction du temps.

De plus, ce sujet est dans la continuation d'une série d'autres des années précédentes. Notre objectif fut donc de continuer leur travail, d'apporter certaines précisions. Nous nous sommes particulièrement intéressés au travaux expérimentaux d'un groupe afin de pouvoir comparer certains de nos résultats théoriques.

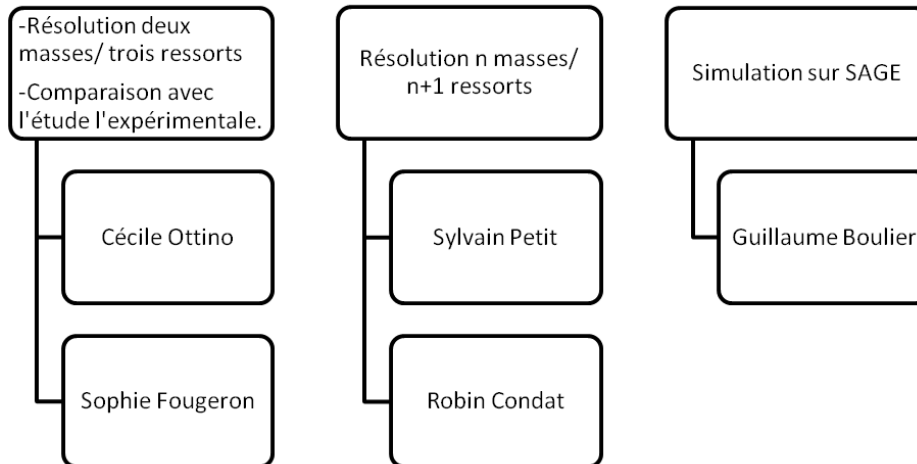
Ce dossier fait un état des lieux du projet à la fin de ce semestre. Il détaille l'ensemble des raisonnements qui nous ont permis d'atteindre le résultat, ainsi que la chronologie de notre réflexion.

Partie 1

Méthodologie, organisation du travail

Dans le but de fournir un travail efficace et de qualité, notre groupe s'est très rapidement organisé . En effet, dès la première séance, Monsieur Gleyse nous a demandé de choisir un correspondant, lien entre le professeur et notre groupe. Cécile s'est proposée, ce qui a fait d'elle notre chef de groupe. Au cours des deux semaines qui suivirent, chacun a pu trouver sa place, comprendre son rôle et ses tâches à accomplir. Nous avons choisi de travailler surtout en binôme dans le but de partager des idées ainsi que des méthodes de travail. Nous connaissions également l'importance de la communication au sein du groupe grâce au trois projets effectués en semestre 3. Il nous a donc paru évident de créer une plate-forme internet afin d'assurer une certaine coordination de nos travaux individuels et ainsi une organisation facilitée.

Voici ci-dessous l'organigramme de notre organisation :



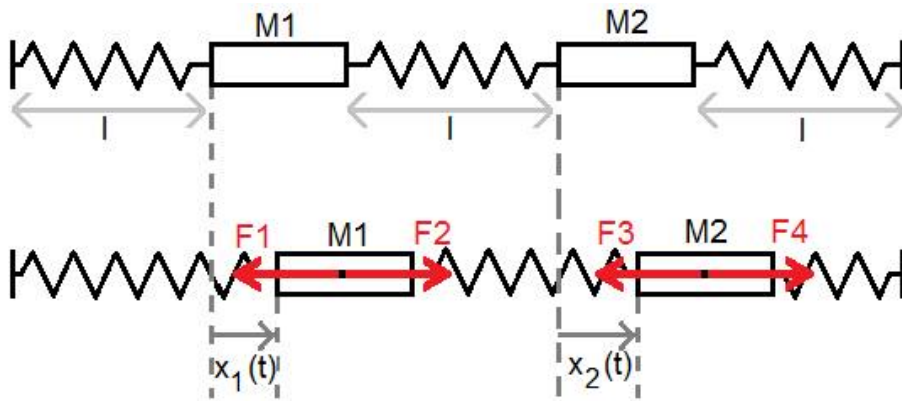
Pour ne pas perdre de temps et pour une meilleure lisibilité de nos raisonnements, nous avons choisi d'écrire le rapport en latex en parallèle avec notre raisonnement. En effet, cela nous a permis de ne pas avoir de problème de pertes de documents et de pouvoir lire sans difficultés le travail effectué par d'autres. A la fin de chaque séance chacun d'entre nous sauvegardait ses avancées sur la plate-forme : le travail de chacun était donc ainsi constamment disponible par tous.

Partie 2

Systeme à deux masses et trois ressorts

2.1 Mise en équation du système

Soit k la constante de raideur des ressorts, et l la longueur à vide des ressorts. x_i représente la position du ressort i par rapport à sa position d'équilibre.



$$\begin{aligned}F_1 &= -k \cdot x_1(t) \cdot \vec{u}(x) \\F_2 &= k \cdot (x_2(t) - x_1(t)) \cdot \vec{u}(x) \\F_3 &= -k \cdot (x_2(t) - x_1(t)) \cdot \vec{u}(x) \\F_4 &= -k \cdot x_2(t) \cdot \vec{u}(x)\end{aligned}$$

On applique le principe fondamental de la dynamique (PFD) au système :

$$\text{en A : } m \cdot \ddot{x}_1(t) = F_1 + F_2 = k \cdot (x_2(t) - 2x_1(t))$$

$$\text{en B : } m \cdot \ddot{x}_2(t) = F_3 + F_4 = k \cdot (x_3(t) - 2x_2(t))$$

Donc :

$$\begin{pmatrix} \ddot{x}_1(t) \\ \ddot{x}_2(t) \end{pmatrix} = M \cdot \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

avec :

$$M = \frac{-k}{m} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

2.2 Résolution

Valeurs propres :

$$\det(M - \lambda Id) = -\frac{k}{m} \begin{vmatrix} 2 - \lambda & -1 \\ -1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = -\frac{k}{m} [(2 - \lambda)^2 - 1] \quad (2.3)$$

Pour $-\frac{k}{m} [(2 - \lambda)^2 - 1] = 0$, on trouve $\lambda_1 = 3$ ou $\lambda_2 = 1$.

Matrice de passage :

Pour $\lambda_1 = 3$:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x \\ 3y \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

On peut donc écrire le système d'équation :

$$\begin{cases} 2x - y = 3x \\ -x + 2y = 3y \end{cases} \iff \begin{cases} -y = x \\ -x = y \end{cases}$$

On obtient un vecteur propre : $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

De la même manière, pour $\lambda = 1$ on trouve un vecteur propre $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

On peut dire que la matrice de passage P est égale à : $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

et que la matrice diagonale D est égale à : $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Matrice M' :

On sait que $M' = P^{-1}MP$

et on a $P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

On trouve :

$$M' = \frac{-k}{m} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

On reprend le système précédent en remplaçant M par M' :

$$\begin{pmatrix} \ddot{y}_1(t) \\ \ddot{y}_2(t) \end{pmatrix} = M' \cdot \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \ddot{y}_1(t) \\ \ddot{y}_2(t) \end{pmatrix} = \frac{-k}{m} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

Posons $C = \frac{k}{m}$

On obtient le système d'équations différentielles de second ordre avec second membre :

$$\begin{cases} \ddot{y}_1(t) = -3Cy_1(t) \\ \ddot{y}_2(t) = -Cy_2(t) \end{cases}$$

Pour $\ddot{y}_1(t) = -3Cy_1(t)$, on obtient $y_1(t) = \lambda \cos(\sqrt{3C}t) + \mu \sin(-\sqrt{3C}t)$

Pour $\ddot{y}_2(t) = -Cy_2(t)$, on obtient $y_2(t) = \lambda' \cos(\sqrt{C}t) + \mu' \sin(-\sqrt{C}t)$

On utilise maintenant la matrice de passage pour repasser dans la base initiale :

$$PY = X$$

avec :

$$Y = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cos(\sqrt{3C}t) + \mu \sin(-\sqrt{3C}t) \\ \lambda' \cos(\sqrt{C}t) + \mu' \sin(-\sqrt{C}t) \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

On obtient donc :

$$X = \begin{pmatrix} \lambda \cos(\sqrt{3C}t) + \mu \sin(-\sqrt{3C}t) + \lambda' \cos(\sqrt{C}t) + \mu' \sin(-\sqrt{C}t) \\ -\lambda \cos(\sqrt{3C}t) - \mu \sin(-\sqrt{3C}t) + \lambda' \cos(\sqrt{C}t) + \mu' \sin(-\sqrt{C}t) \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

Pour trouver les constantes, on utilise les conditions initiales. On sait que la vitesse initiale de chaque masse est nulle, que la masse 1 est déplacée de A unités et la masses 2 de A' unités, d'où : à $t = 0$, $x_1(0) = A$, $x_2(0) = A'$ et $\dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0$.

On dérive X :

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} -\lambda\sqrt{3C} \sin(\sqrt{3C}t) - \mu\sqrt{3C} \cos(-\sqrt{3C}t) - \lambda'\sqrt{C} \sin(\sqrt{C}t) + \mu'\sqrt{C} \cos(-\sqrt{C}t) \\ \lambda\sqrt{3C} \sin(\sqrt{3C}t) + \mu\sqrt{3C} \cos(-\sqrt{3C}t) - \lambda'\sqrt{C} \sin(\sqrt{C}t) - \mu'\sqrt{C} \cos(-\sqrt{C}t) \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

On sait que : $x_1(0) = A$, $x_2(0) = A'$ et $\dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0$, donc :

$$\begin{cases} x_1(0) = A = \lambda + \lambda' \\ \dot{x}_1(0) = 0 = -\mu\sqrt{3C} - \mu'\sqrt{C} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2(0) = A' = -\lambda + \lambda' \\ \dot{x}_2(0) = 0 = \mu\sqrt{3C} - \mu'\sqrt{C} \end{cases}$$

$$\begin{cases} A' = -\lambda + \lambda' \\ A = \lambda + \lambda' \\ -\mu\sqrt{3} = \mu' \\ \mu\sqrt{3} = \mu' \end{cases}$$

donc :

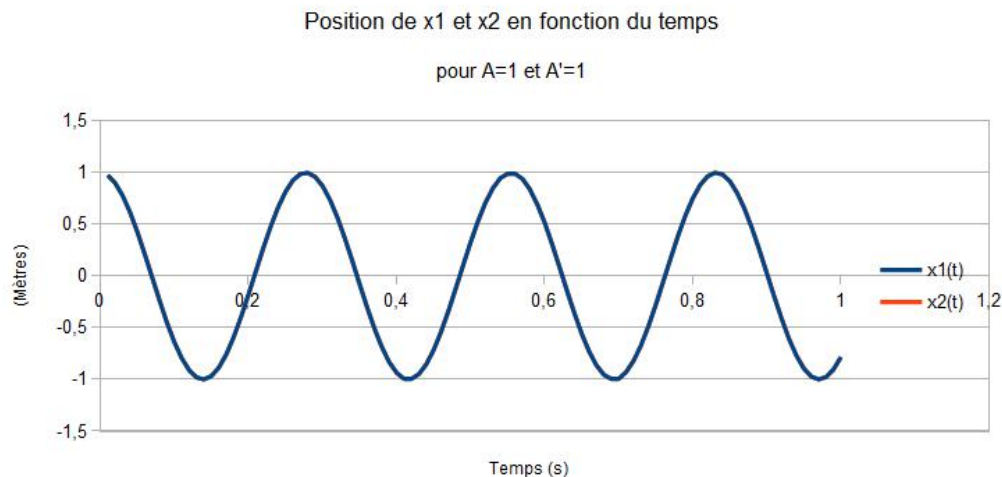
$$\begin{cases} -\mu = \mu' = 0 \\ \lambda = \frac{A-A'}{2} \\ \lambda' = \frac{A+A'}{2} \end{cases}$$

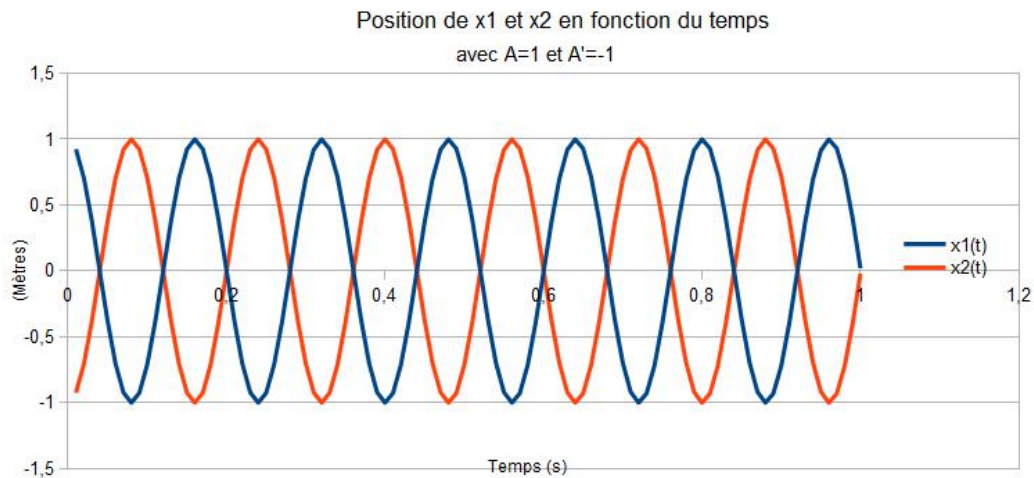
Remplaçons dans l'équation de X :

$$X = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{A-A'}{2} \cos(\sqrt{3C}t) + \frac{A+A'}{2} \cos(\sqrt{C}t) \\ -\frac{A-A'}{2} \cos(\sqrt{3C}t) + \frac{A+A'}{2} \cos(\sqrt{C}t) \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

2.3 Étude graphique des résultats

Nous avons effectué cette étude avec les mêmes valeurs de masses et de constantes de raideur que celles du projet de 2012/2013 afin de pouvoir faire un parallèle entre nos résultats et leurs études expérimentales. Nous avons donc tracé, pour $m=37 \text{ g}$ et $k=19 \text{ N.m}^{-1}$, plusieurs graphiques représentant les positions des masses 1 et 2 en fonction du temps. Nous avons gardé une vitesse initiale des masses nulles et nous avons fait varier le déplacement initial de m_2 , en gardant le déplacement initial de m_1 identique dans tous nos graphiques.





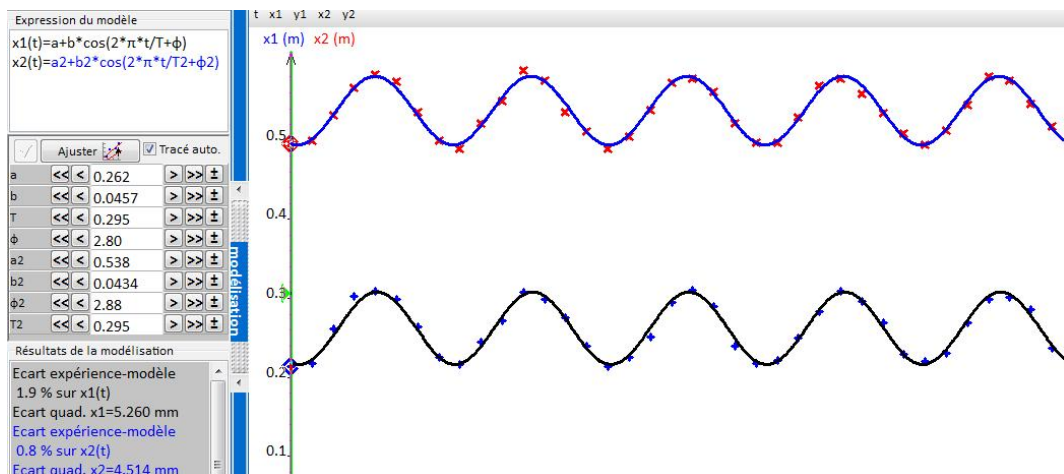
Observations :

Pour $A' = 1$ et $A' = -1$, on observe des courbes sinusoïdales. Lorsque $A' = 1$, le signal a une période de 0,28 secondes. Les deux courbes de $x_1(t)$ et $x_2(t)$ sont en phase et ont la même amplitude ce qui signifie que dans les deux cas les masses oscillent autour de leur position d'équilibre. Lorsque $A' = -1$, le signal a une période de 0,16 secondes. Les deux courbes sont en opposition de phase ce qui indique que les masses oscillent de manière symétrique par rapport au milieu du système.

Parallèle avec l'étude expérimentale :

Avant d'effectuer une comparaison avec l'étude expérimentale faite en 2012/2013, il nous a fallu au préalable adapter les origines de nos deux études. Voici les deux cas :

" On décale par rapport aux positions d'équilibre les deux masses de la même distance et dans la même direction "



Nous avons calculé la position de x_1 et x_2 par rapport à une origine absolu situé à gauche du système.

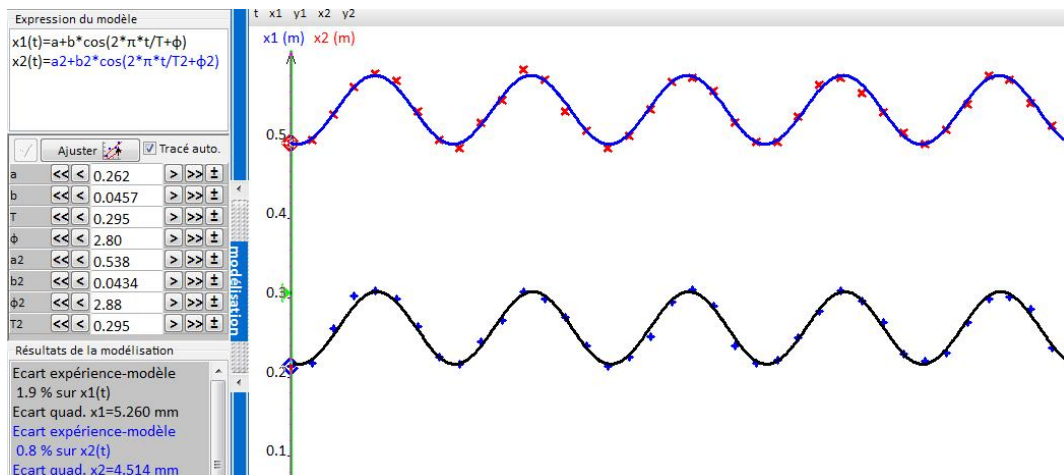
$$\begin{cases} x_1(0) = a + b \cos(\phi) = 0.2189 \\ x_2(0) = a_2 + b_2 \cos(\phi_2) = 0.4961 \end{cases}$$

En se replaçant dans notre système (avec deux origines situées au point d'équilibre de chaque masse), nous trouvons :

$$\begin{cases} x_1(0) = b \cos(\phi) = -0.0431 \\ x_2(0) = b_2 \cos(\phi_2) = -0.0420 \end{cases}$$

Les deux masses sont bien écartées initialement de la même distance et dans la même direction. Les résultats expérimentaux concordent bien avec nos résultats théoriques. Les courbes x_1 et x_2 sont bien en phase et possèdent la même amplitude. Cependant il nous est compliqué d'effectuer une comparaison des périodes étant données que les masses et la raideur des ressorts ont des valeurs différentes.

" On décale par rapport aux positions d'équilibre les deux masses de la même distance et dans les directions opposés "



Dans ce cas, la position de x_1 et x_2 par rapport à une origine absolue situé à gauche du système sont :

$$\begin{cases} x_1(0) = a + b \cos(\phi) = 292.8 \\ x_2(0) = a_2 + b_2 \cos(\phi_2) = 516.4 \end{cases}$$

En se replaçant dans notre système (avec deux origines situées au point d'équilibre de chaque masse), nous trouvons :

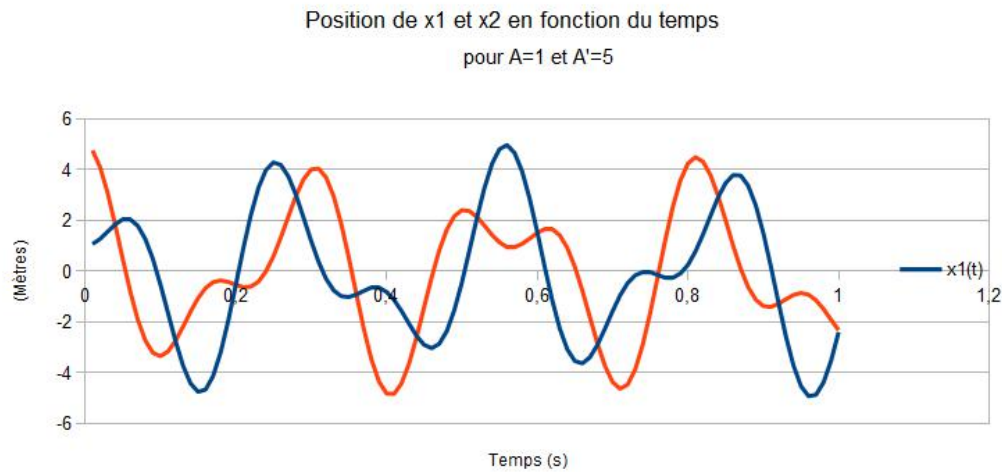
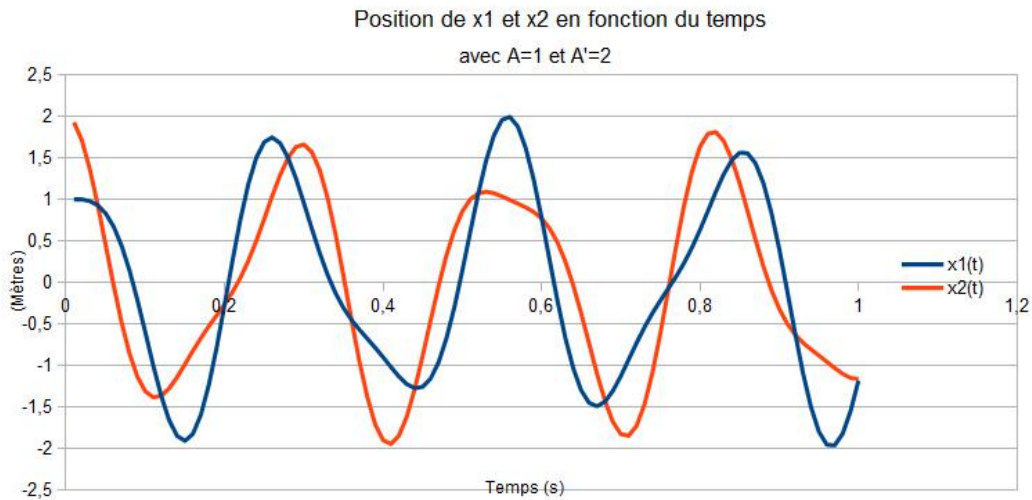
$$\begin{cases} x_1(0) = b \cos(\phi) = 30.77 \\ x_2(0) = b_2 \cos(\phi_2) = 33.4 \end{cases}$$

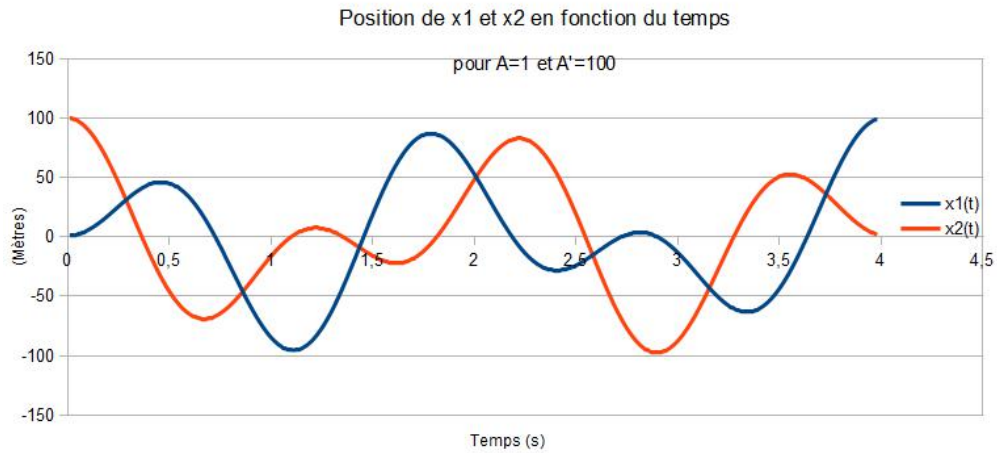
Les deux masses sont bien écartées initialement de la même distance (l'écart est dues aux facteurs d'incertitude fortement présents dans l'expérimentation). Les résultats expérimentaux concordent

bien avec nos résultats théoriques. Les courbes x_1 et x_2 sont bien en opposition de phase et possèdent la même amplitude.

De plus, les valeurs expérimentales des périodes sont de 0,295 secondes lorsque les masses sont déplacées dans le même sens et de 0.161 secondes lorsque les masses sont déplacées dans des sens opposés. Ces périodes correspondent bien à celles que nous avons observées sur nos graphiques

Lorsqu'on décale les masses de distance différentes :





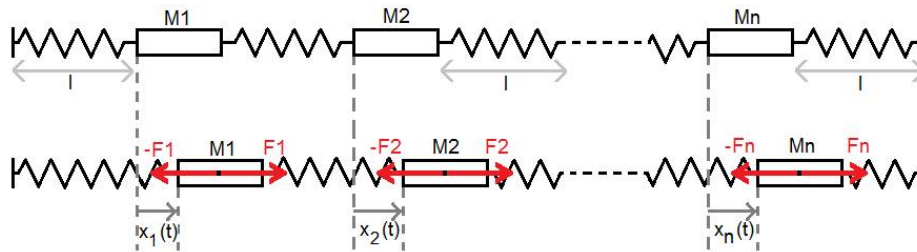
Observations :

Plus la valeur d' A' augmente, plus l'amplitude des oscillations est grande. De plus les signaux ne sont plus périodiques.

Partie 3

Système à n masses et (n+1) ressorts

3.1 Mise en équation



Soit k la constante de raideur des ressorts.

$$F_1 = -k \cdot x_1(t) \cdot \vec{u}(x)$$

$$F_2 = k \cdot (x_2(t) - x_1(t)) \cdot \vec{u}(x)$$

$$F_3 = -F_2 = -k \cdot (x_2(t) - x_1(t)) \cdot \vec{u}(x)$$

\vdots

$$F_{2n-1} = -k \cdot (x_n(t) - x_{n-1}(t)) \cdot \vec{u}(x)$$

$$F_{2n} = -k \cdot x_n(t) \cdot \vec{u}(x)$$

On applique le principe fondamental de la dynamique (PFD) au système :

$$\text{en } M_1 : m \cdot \ddot{x}_1(t) = F_1 + F_2 = k \cdot (x_2(t) - 2x_1(t))$$

$$\text{en } M_2 : m \cdot \ddot{x}_2(t) = F_3 + F_4 = k \cdot (x_3(t) - 2x_2(t) + x_1(t))$$

$$\text{en } M_3 : m \cdot \ddot{x}_3(t) = F_5 + F_6 = k \cdot (x_4(t) - 2x_3(t) + x_2(t))$$

\vdots

$$\text{en } M_n : m \cdot \ddot{x}_n(t) = k \cdot (-2x_n(t) + x_{n-1}(t))$$

Donc, en introduisant la matrice T :

$$\begin{pmatrix} \ddot{x}_1(t) \\ \ddot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \ddot{x}_n(t) \end{pmatrix} = T \cdot \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

avec :

$$T = \frac{-k}{m} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

3.2 Résolution

Comment trouver les valeurs propres d'une matrice tridiagonale réelle symétrique

$$\text{Soit } T = \frac{k}{m} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & -1 & 2 & -1 & 0 \\ \vdots & & \ddots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad (T \in M_{n,n}(\mathbb{R})).$$

La matrice T est *symétrique réelle*, ses valeurs propres sont donc réelles et simples (donc n valeurs propres distinctes).

De plus, si on note $r_i = \sum_{j=1, i \neq j}^n |t_{i,j}|$, avec $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, on a finalement, pour $i = 1$ et $i = n$:

$$r_1 = r_n = |-1| + |0| + |0| + \dots = 1 \quad (3.3)$$

Par ailleurs, pour $i \neq 1$ et $i \neq n$ ($i \in \llbracket 2; n-1 \rrbracket$) :

$$r_i = |0| + \dots + |0| + |-1| + |-1| + |0| + |0| + \dots = 2 \quad (3.4)$$

Théorème 1 Toute valeur propre de T appartient à la réunion de boules fermées de centre t_{ii} et de rayon r_i .

On déduit de cette propriété que, si λ valeur propre de T, $|\lambda - t_{ii}| \leq r_i$ ($r_i = 2$, $i \neq 1$, $i \neq n$). Cela correspond à la définition d'une boule dans \mathbb{R} , de centre t_{ii} et de rayon r_i .

Comme $\lambda \in \mathbb{R}$ (matrice de Hessenberg), il existe $\theta \in [0; \pi]$ *unique* tel que :

$$\lambda = t_{ii} - 2 \cos(\theta) , \text{ avec } \lambda \geq 0$$

Dans notre cas, on a ainsi $t_{ii} = 2$. Or, par définition d'une valeur propre, on a :

$$TX = (t_{ii} - 2 \cos(\theta))X$$

Soit, sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & -1 & 2 & -1 & 0 \\ \vdots & & \ddots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (2 - 2 \cos(\theta)) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \cos(\theta) & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -1 & 2 \cos(\theta) & -1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & -1 & 2 \cos(\theta) & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & -1 & 2 \cos(\theta) & -1 & 0 \\ \vdots & & \ddots & -1 & 2 \cos(\theta) & -1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & 2 \cos(\theta) \end{pmatrix}}_{T_{2 \cos(\theta)}} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0$$

Il suffit donc de déterminer les valeurs de $\theta \in [0; 2\pi]$ pour lesquelles $T_{2 \cos(\theta)}$ n'est pas inversible, ou encore lorsque $\det(T_{2 \cos(\theta)}) = 0$.

Propriété 1 *Le déterminant d'une matrice tridiagonale A est donné par :*

$$\det A^{(n)} = a_{n,n} \det A^{(n-1)} - a_{n-1,n} a_{n,n-1} \det A^{(n-2)}$$

Dans notre cas, on pose :

$$\Delta_n = \det(T_{2 \cos(\theta)}) = 2 \cos(\theta) \times \Delta_{n-1} - \Delta_{n-2} \quad (n \geq 2)$$

Ainsi, on obtient :

$$\begin{cases} \Delta_0 = 1 \\ \Delta_1 = 2 \cos(\theta) \end{cases}$$

On reconnaît dans la formule une "suite" de déterminant récurrente d'ordre 2. On utilise donc les méthodes propres à ces suites pour obtenir le déterminant en fonction de n uniquement. Dans un premier temps, nous allons donc ainsi chercher le polynôme caractéristique de cette équation, puis déterminer ses racines.

Soit le polynôme caractéristique suivant :

$$r^2 = 2 \cos(\theta)r - 1$$

$$\begin{aligned} \Delta &= b^2 - 4ac \\ &= 4 \cos^2(\theta) - 4 \\ &= 4[\cos^2(\theta) - 1] \\ &= -4 \sin^2(\theta) \\ &= [2i \sin(\theta)]^2 \end{aligned} \tag{3.5}$$

Les solutions sont :

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{-2 \cos(\theta) - 2i \sin(\theta)}{2} \\ &= e^{i\theta} \\ r_2 &= \frac{-2 \cos(\theta) + 2i \sin(\theta)}{2} \\ &= e^{-i\theta} \end{aligned} \tag{3.6}$$

Cas 1

$$\forall \theta \in]0; \pi[, \Delta_n = \alpha e^{in\theta} + \beta e^{-in\theta} \tag{3.7}$$

Déterminons α et β

$$\begin{cases} \beta = 1 - \alpha \text{ car } \Delta_0 = 1 \\ \alpha e^{i\theta} + (1 - \alpha)e^{-i\theta} = 2 \cos(\theta) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \alpha (e^{i\theta} - e^{-i\theta}) &= 2 \cos(\theta) - e^{-i\theta} \\ \Leftrightarrow \alpha &= \frac{2 \cos(\theta) - e^{-i\theta}}{e^{i\theta} - e^{-i\theta}} \\ \Leftrightarrow \alpha &= \frac{2i (2 \cos(\theta) - e^{-i\theta})}{2i (e^{i\theta} - e^{-i\theta})} \\ \Leftrightarrow \alpha &= \frac{2 \cos(\theta) - e^{-i\theta}}{2i \sin(\theta)} \end{aligned} \quad \left| \quad \begin{aligned} \Leftrightarrow \alpha &= \frac{2 \cos(\theta) - (\cos(-\theta) + i \sin(-\theta))}{2i \sin(\theta)} \\ \Leftrightarrow \alpha &= \frac{\cos(\theta) + i \sin(\theta)}{2i \sin(\theta)} \\ \Leftrightarrow \alpha &= \frac{e^{i\theta}}{2i \sin(\theta)} \end{aligned}$$

$$\beta = 1 - \alpha \quad \left| \quad \begin{aligned} \beta &= \frac{-\cos(\theta) + i \sin(\theta)}{2i \sin(\theta)} \\ \beta &= -\frac{e^{-i\theta}}{2i \sin(\theta)} \end{aligned} \right.$$

$$\beta = \frac{2i \sin(\theta) - e^{i\theta}}{2i \sin(\theta)}$$

d'où

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{e^{i\theta}}{2i \sin \theta} e^{in\theta} - \frac{e^{-i\theta}}{2i \sin \theta} e^{-in\theta} \\ &= \frac{e^{i(n+1)\theta} - e^{-i(n+1)\theta}}{2i \sin \theta} \end{aligned}$$

d'où

$$\boxed{\Delta_n = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)}} \quad (3.8)$$

Cas 2 : $\theta = 0$

Pour $\theta = 0$ (donc $\cos \theta = 1$), le polynôme caractéristique devient :

$$r^2 - 2r + 1 = 0$$

Soit :

$$\begin{aligned} \Delta &= b^2 - 4ac \\ &= 4 - 4 \\ &= 0 \end{aligned} \quad (3.9)$$

La racine du polynôme est donc $r_0 = \frac{2}{2} = 1$. Soit finalement :

$$\boxed{\Delta_n = (\alpha + n\beta) \times r_0^n = \alpha + n\beta} \quad (3.10)$$

Déterminons α et β

$$\begin{cases} \Delta_0 = 1 \\ \Delta_1 = 2 \cos(\theta) \end{cases}$$

Par identification :

$$\begin{cases} \alpha = 1 \\ \alpha + \beta = 2 \cos(\theta) \end{cases}$$

Or, dans notre cas, $\theta = 0$, donc :

$$\alpha + \beta = 2 \cos(\theta) \iff \alpha + \beta = 2 \iff \beta = 1$$

D'où

$$\boxed{\text{Si } \theta = 0, \Delta_n = (1 + n)} \quad (3.11)$$

Or $\forall n \in \mathbb{N}$, $\Delta_n > 0$ d'où 0 n'est pas solution de l'équation $\Delta = 0$

Cas 3 : $\theta = \pi$

Pour $\theta = \pi$ (donc $\cos \theta = -1$), le polynôme caractéristique devient :

$$r^2 + 2r + 1 = 0$$

Soit :

$$\begin{aligned} \Delta &= b^2 - 4ac \\ &= 4 - 4 \\ &= 0 \end{aligned} \tag{3.12}$$

La solution du polynôme est donc $r_0 = -\frac{2}{2} = -1$. Soit finalement :

$$\boxed{\Delta_n = (\alpha + n\beta) \times (-1)^n} \tag{3.13}$$

Déterminons α et β

$$\begin{cases} \Delta_0 = 1 \\ \Delta_1 = 2 \cos(\theta) \end{cases}$$

Par identification :

$$\begin{cases} \alpha = 1 \\ \alpha - \beta = -2 \end{cases}$$

Or, dans notre cas, $\theta = \pi$, donc $\beta = -3$

D'où

$$\boxed{\text{Si } \theta = \pi, \Delta_n = (1 - 3n) \times (-1)^n} \tag{3.14}$$

Or $\Delta_n = 0 \iff (1 - 3n) \times (-1)^n = 0 \iff n = \frac{1}{3}$ Or $n \in \mathbb{N}$ d'où l'équation n'a pas de solution si $\theta = \pi$

Ainsi $\Delta_n = 0 \iff \theta \in]0; \pi[$ et $\sin((n+1)\theta) = 0$ d'où

$$\boxed{\theta_k = \frac{k\pi}{n+1}} \tag{3.15}$$

d'où les valeurs propres sont les nombres

$$\boxed{\lambda_k = t_{i,i} - 2 \cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right), k \in \llbracket 1; n \rrbracket} \tag{3.16}$$

Détermination des vecteurs propres

Dans cette partie, on cherche à déterminer les vecteurs propres associés à une valeur propre. Toutes les valeurs propres sont racines simples du polynôme caractéristique (autrement dit, le cardinal des valeurs propres est égal au degré du polynôme caractéristique). On en conclut que chaque espace propre est de dimension 1.

Obtention des vecteurs propres

Posons $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ le vecteur propre de T pour la valeur propre

$$\lambda_k = t_{i,i} - 2 \cos(\theta_k) \text{ où } \theta_k = \frac{k\pi}{n+1}$$

Par définition, il vérifie l'équation $TX = \lambda_k X$, c'est-à-dire $T_{2 \cos(\theta_k)} X = 0$

Explicitons le calcul :

$$\begin{pmatrix} 2 \cos(\theta) & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & 2 \cos(\theta) & -1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & -1 & 2 \cos(\theta) & -1 & \ddots & \vdots \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 & 2 \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2 \cos(\theta_k))x_1 - x_2 \\ -x_1 + (2 \cos(\theta_k))x_2 - x_3 \\ \vdots \\ -x_{i-1} + (2 \cos(\theta_k))x_i - x_{i+1} \\ \vdots \\ -x_{n-1} + (2 \cos(\theta_k))x_n \end{pmatrix} = 0 \quad (3.17)$$

On note Y la matrice résultant du produit de $T_{2 \cos(\theta_k)}$ et X

Si $x_1 = 0$, il vient alors $x_2 = 0$ et, par récurrence, $\forall 1 \leq i \leq n, x_i = 0$, c'est-à-dire $X_k = 0$ ce qui est impossible car un vecteur propre ne peut pas être nul. Il vient donc $x_1 \neq 0$ et x_1 peut être choisi arbitrairement dans \mathbb{R}^* .

On pose donc $x_1 = \sin(\theta_k)$

Le coefficient y_1 donne l'équation suivante

$$\begin{aligned} (2 \cos(\theta_k))x_1 - x_2 &= 0 \\ \iff x_2 &= (2 \cos(\theta_k)) \sin(\theta_k) \\ \iff x_2 &= \sin(2\theta_k) \text{ d'après la formule de l'arc double} \end{aligned} \quad (3.18)$$

Pour x_3

$$\begin{aligned} -x_1 + (2 \cos(\theta_k))x_2 - x_3 &= 0 \\ \iff x_3 &= x_1 - (2 \cos(\theta_k))x_2 \\ \iff x_3 &= -\sin(\theta_k) + 2 \cos(\theta_k) \sin(2\theta_k) \\ \iff x_3 &= \sin(3\theta_k) \end{aligned} \quad (3.19)$$

Propriété 2 Formule de trigonométrie

$$2 \sin((i-1)\theta_k) \cos(\theta_k) - \sin((i-2)\theta_k) = \sin(i\theta_k)$$

d'où, en considérant l'équation donnée par la i^e composante de la matrice Y , il vient

$$\begin{aligned}
 & -x_{i-2} + (2 \cos(\theta_k))x_{i-1} - x_i = 0 \\
 \iff & x_i = x_{i-2} - (2 \cos(\theta_k))x_{i-1} \\
 \iff & x_i = \sin(i\theta_k)
 \end{aligned} \tag{3.20}$$

Le vecteur propre associé à la valeur propre λ_k s'écrit donc sous la forme

$$X_k = \begin{pmatrix} \sin(\theta_k) \\ \sin(2\theta_k) \\ \vdots \\ \sin(i\theta_k) \\ \vdots \\ \sin(n\theta_k) \end{pmatrix} \tag{3.21}$$

On rappelle que $\theta_k = \frac{k\pi}{n+1}$

orthonormalisation de la base des vecteurs propres

Théorème 2 (Théorème spectral) *Si T est une matrice symétrique de taille $n * n$ dans \mathbb{R}^n munit du produit scalaire habituel. Elle peut s'écrire sous la forme $T = PDP^{-1}$ où D est une matrice diagonale dans la base des vecteurs propres et P la matrice de passage de la base canonique vers la base orthonormée des vecteurs propres. P est donc la matrice d'une isométrie, c'est-à-dire ${}^tPP = Id \iff P^{-1} = {}^tP$*

Enfin, dans notre cas particulier, en effectuant le calcul de tP on trouve P .

Ainsi, $P^{-1} = {}^tP = P$

Afin de simplifier les calculs, on va donc chercher à normer les vecteurs.

Soit V_k le vecteur normé. $V_k = \frac{X_k}{\|X_k\|}$ Or

$$\begin{aligned}
 \|X_k\|^2 &= X_k \cdot X_k \\
 &= \sum_{j=1}^n \sin^2(j\theta_k) \\
 &= \sum_{j=1}^n (1 - \cos^2(j\theta_k))
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{j=0}^n \left(1 - \frac{\cos(2j\theta_k) + 1}{2}\right) \\
 &= \sum_{j=0}^n \left(1 - \frac{\cos(2j\theta_k)}{2} - \frac{1}{2}\right) \\
 &= \sum_{j=0}^n \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sum_{j=0}^n \cos(2j\theta_k) \\
 &= \sum_{j=0}^n \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sum_{j=0}^n \operatorname{Re}(e^{2ij\theta_k})
 \end{aligned}$$

$$= \frac{n+1}{2} - \frac{1}{2} \underbrace{\operatorname{Re}\left(\sum_{j=0}^n e^{2ij\theta_k}\right)}_{=0} \quad \Bigg| \quad = \frac{n+1}{2}$$

d'où $\|X_k\| = \sqrt{\frac{n+1}{2}}$

$$\boxed{\text{Ainsi, } \forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, V_k = \sqrt{\frac{2}{n+1}} X_k} \quad (3.22)$$

$$\boxed{\text{d'où } \forall (i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2, p_{i,j} = \sqrt{\frac{2}{n+1}} \sin\left(\frac{ij\pi}{n+1}\right)} \quad (3.23)$$

Explicitons les termes de la matrice de passage P.

$$P = \sqrt{\frac{2}{n+1}} \begin{pmatrix} \sin\left(\frac{\pi}{n+1}\right) & \sin\left(\frac{2\pi}{n+1}\right) & \cdots & \cdots & \cdots & \sin\left(\frac{n\pi}{n+1}\right) \\ \sin\left(\frac{2\pi}{n+1}\right) & \sin\left(\frac{4\pi}{n+1}\right) & \cdots & \cdots & \cdots & \sin\left(\frac{2n\pi}{n+1}\right) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \sin\left(\frac{ij\pi}{n+1}\right) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \sin\left(\frac{(n-1)\pi}{n+1}\right) & \sin\left(\frac{2(n-1)\pi}{n+1}\right) & \cdots & \cdots & \cdots & \sin\left(\frac{n(n-1)\pi}{n+1}\right) \\ \sin\left(\frac{n\pi}{n+1}\right) & \sin\left(\frac{2n\pi}{n+1}\right) & \cdots & \cdots & \cdots & \sin\left(\frac{n^2\pi}{n+1}\right) \end{pmatrix} \quad (3.24)$$

On remarque bien que ${}^tP = P$

Ainsi, on peut exprimer la matrice diagonale D dans la base B des vecteurs propres, sans oublier la constante $\frac{k}{m}$ que l'on avait sorti de la matrice au début.

$$D = \begin{pmatrix} \frac{k}{m}(2 - 2\cos(\frac{\pi}{n+1})) & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \frac{k}{m}(2 - 2\cos(\frac{i\pi}{n+1})) & & & \\ \vdots & & \ddots & 0 & \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{k}{m}(2 - 2\cos(\frac{n\pi}{n+1})) & \end{pmatrix} \quad (3.25)$$

Résolution

Dans la base des vecteurs propres

Notons $\ddot{Y} = \begin{pmatrix} \ddot{y}_1 \\ \vdots \\ \ddot{y}_i \\ \vdots \\ \ddot{y}_n \end{pmatrix}$ les dérivées secondes des fonctions de position des masses dans la base

des vecteurs propres. On rappelle que X est le vecteur dont les composantes sont les fonctions de position des masses dans la base canonique.

Notre problème revient à résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} \ddot{Y} = DY \\ X = PY \text{ formule de changement de base} \end{cases} \quad (3.26)$$

En calculant la première équation du système, il vient un système de n équations différentielles de degré 2 *non liées*, c'est-à-dire solvables facilement.

$$\begin{cases} \ddot{y}_1(t) = \frac{k}{m} \left(2 - 2 \cos \left(\frac{\pi}{n+1} \right) \right) y_1(t) \\ \vdots \\ \ddot{y}_i(t) = \frac{k}{m} \left(2 - 2 \cos \left(\frac{i\pi}{n+1} \right) \right) y_i(t) \\ \vdots \\ \ddot{y}_n(t) = \frac{k}{m} \left(2 - 2 \cos \left(\frac{n\pi}{n+1} \right) \right) y_n(t) \end{cases} \quad (3.27)$$

Réolvons l'équation $\ddot{y}_i(t) = \frac{k}{m} \left(2 - 2 \cos \left(\frac{i\pi}{n+1} \right) \right) y_i(t)$

On remarque que $\frac{k}{m} \left(2 - 2 \cos \left(\frac{i\pi}{n+1} \right) \right) = \frac{4k}{m} \sin^2 \left(\frac{i\pi}{2(n+1)} \right) = \frac{k}{m} \lambda_i$

On trouve ainsi

$$\boxed{y_i(t) = A_i \cos \left(\sqrt{\frac{4k}{m} \sin^2 \left(\frac{i\pi}{2(n+1)} \right)} t \right) + B_i \sin \left(\sqrt{\frac{4k}{m} \sin^2 \left(\frac{i\pi}{2(n+1)} \right)} t \right)} \quad (3.28)$$

c'est-à-dire

$$y_i(t) = A_i \cos \left(\sqrt{\frac{k}{m} \lambda_i} t \right) + B_i \sin \left(\sqrt{\frac{k}{m} \lambda_i} t \right)$$

Retour à la base canonique

D'après la formule de changement de base $X = PY$, il vient

$$\boxed{x_i(t) = \sum_{q=1}^n p_{i,q} y_q(t)} \quad (3.29)$$

x_i représente donc la position de la masse i par rapport à sa position de repos, et ce exprimé dans la base canonique. En effectuant le calcul, il vient :

$$\begin{aligned} x_i(t) &= \sum_{q=1}^n \left(\sqrt{\frac{2}{n+1}} \sin \left(\frac{iq\pi}{n+1} \right) \times \left(A_q \cos \left(\sqrt{\frac{k}{m} \lambda_q} t \right) + B_q \sin \left(\sqrt{\frac{k}{m} \lambda_q} t \right) \right) \right) \\ x_i(t) &= \sqrt{\frac{2}{n+1}} \sum_{q=1}^n \left(\sin \left(\frac{iq\pi}{n+1} \right) \times \left(A_q \cos \left(\sqrt{\frac{k}{m} \lambda_q} t \right) + B_q \sin \left(\sqrt{\frac{k}{m} \lambda_q} t \right) \right) \right) \end{aligned} \quad (3.30)$$

Déterminons les constantes

Cas des constantes A_q

Notons $X(0) = \begin{pmatrix} x_{1,0} \\ \vdots \\ x_{n,0} \end{pmatrix}$ le vecteur contenant les positions initiales des masses par rapport à leur

position d'équilibre. On remarque de plus que $Y(0) = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix}$ (en effet, $\sin(0) = 0$ et $\cos(0) = 1$)

D'après la formule de changement de base, on a

$$Y(0) = P^{-1}X(0) \quad (3.31)$$

Or, d'après le théorème spectral, on sait que $P^{-1} = P$ d'où

$$\boxed{Y(0) = PX(0)} \quad (3.32)$$

d'où

$$A_q = \sum_{s=1}^n p_{q,s} x_{s,0}$$

$$\boxed{\forall q \in \llbracket 1; n \rrbracket, A_q = \sum_{s=1}^n \left(\sqrt{\frac{2}{n+1}} \sin\left(\frac{qs\pi}{n+1}\right) x_{s,0} \right)} \quad (3.33)$$

Cas des constantes B_q

On considère que les masses sont lâchées sans vitesse initiale, d'où $\forall q \in \llbracket 1; n \rrbracket, \dot{x}_{q,0} = 0$. Ce résultat noté sous forme matricielle devient $\dot{X}(0) = 0$. D'après la formule de changement de base, il vient donc

$$\dot{Y}(0) = 0 \quad (3.34)$$

d'où $\forall q \in \llbracket 1; n \rrbracket, y_q(0) = 0$.

Or, $\forall q \in \llbracket 1; n \rrbracket,$

$$\dot{y}_q(t) = -A_q \sqrt{\lambda_q} \sin\left(\sqrt{\lambda_q} t\right) + B_q \sqrt{\lambda_q} \cos\left(\sqrt{\lambda_q} t\right) \quad (3.35)$$

d'où

$$\dot{y}_q(0) = B_q \sqrt{\lambda_q} = 0 \quad (3.36)$$

Or $\sqrt{\lambda_q} \neq 0$ d'où,

$$\boxed{\forall q \in \llbracket 1; n \rrbracket, B_q = 0} \quad (3.37)$$

Ainsi, en injectant les valeurs des constantes dans l'équation de $x_i(t)$, il vient :

$$x_i(t) = \sqrt{\frac{2}{n+1}} \sum_{q=1}^n \left[\sin\left(\frac{iq\pi}{n+1}\right) \left(\sum_{s=1}^n \left[\sqrt{\frac{2}{n+1}} \sin\left(\frac{qs\pi}{n+1}\right) x_{s,0} \right] \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m} \lambda_q t}\right) \right) \right]$$

L'équation donnant la position de la i^e masse par rapport à sa position d'équilibre en fonction du temps est donné par l'équation :

$$x_i(t) = \frac{2}{n+1} \sum_{q=1}^n \left[\sin\left(\frac{iq\pi}{n+1}\right) \cos\left(\sqrt{\frac{4k}{m} \sin^2\left(\frac{q\pi}{2(n+1)}\right)} t\right) \sum_{s=1}^n \left[\sin\left(\frac{qs\pi}{n+1}\right) x_{s,0} \right] \right] \quad (3.38)$$

Simulation

Nous avons ensuite voulu modéliser cette formule grâce à un logiciel de calcul, ce qui nous permettrait également de vérifier les résultats obtenus pour le système deux masses-trois ressorts.

L'objectif était d'afficher les graphiques représentant les positions de toutes les masses en fonction du temps, avec k et m fixés.

Ne pouvant pas tracer de fonctions en Pascal, nous avons utilisé Matlab en premier lieu. Cependant, des problèmes liés aux sommes nous ont vite poussé à programmer sur un autre logiciel : SAGE.

Comme l'utilisateur ne peut rentrer de valeurs dans ce logiciel, nous avons dû les déclarer de manière explicite dans le programme. Ainsi, pour modifier les valeurs de k et de m , il faut le faire directement dans le code.

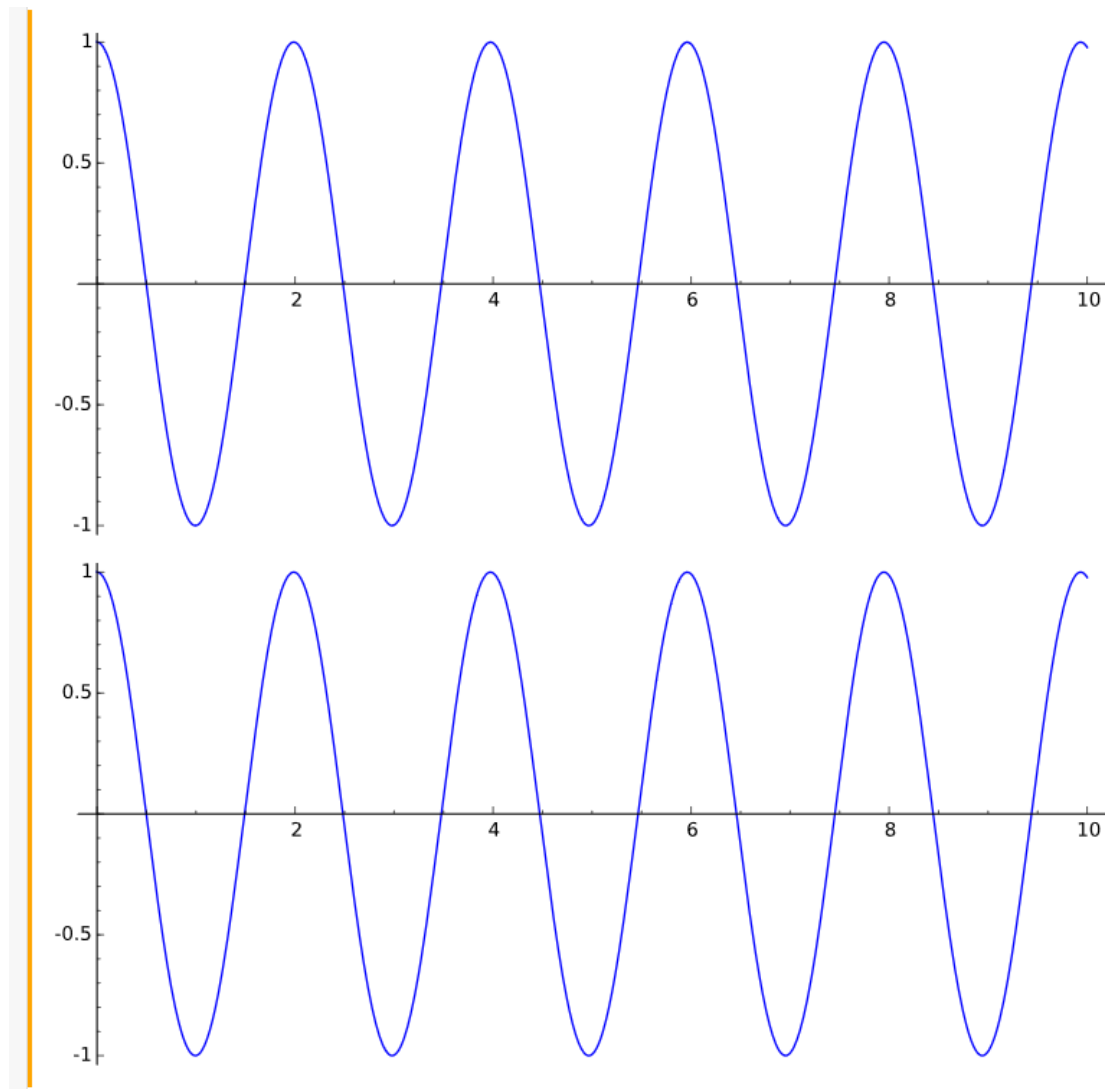
Finalement, nous avons rencontré une dernière difficulté, non résolue à ce jour. Un problème sur le traitement du terme $x_{s,0}$ a finalement conduit à une modélisation qui ne prend en charge que les cas où toutes les masses sont décalées de leur position de $+1$ (l'unité n'est pas importante ici), ce qui nous permet de supprimer le terme dans l'équation (code disponible en annexe).

Voici d'ailleurs ce à quoi aurait dû ressembler le code afin de prendre en charge le terme $x_{s,0}$, avec m_1 décalée de 1 et m_2 décalée de -1 :

```

12 sage: q, n, k, m, t, s, x, i = var('q, n, k, m, t, s, x, i')
13
14 sage: m=1
15 sage: k=10
16 sage: n=2
17
18 sage: x = vector([1, -1])
19
20
21 for i in range(1, n+1):
22     plot((2/(n+1))*sum((sin((i*q*pi)/(n+1))*cos(sqrt(((4*k)/m)*((sin((q*pi)
    / (2*(n+1))))^2))*t))*sum((sin((q*s*pi)/(n+1)))*x[s-1], s, 1, n), q, 1, n), 0, 10)
    
```

Pour terminer, nous avons effectué un test pour vérifier les graphiques obtenus en 2.3. Pour 2 masses-3ressorts, avec $k=10$ et $m=1$, nous avons ainsi obtenu les résultats suivants :



On observe bien deux courbes sinusoïdales en phase, de période 2 secondes, et de même amplitude, ce qui vient confirmer les résultats originaux.

Conclusion

Les bénéfices tirés par ce projet ont été de deux natures différentes. Tout d'abord ce projet a été le premier à traiter avec un groupe si nombreux. Effectivement, lors des projets informatique et mathématique, nous avons travaillé par groupe de deux, maximum trois. Ce changement d'échelle a impliqué de revoir notre façon individuelle de travailler ainsi que notre organisation. Pour un projet avec un groupe si nombreux, il nous est vite apparu nécessaire de définir des règles d'organisation ainsi qu'un « chef d'équipe » qui, à la manière d'un chef d'orchestre, répartit le travail et définit (en concertation bien sûr) les grandes orientations du projet. Ce chef d'équipe se charge aussi de la concordance et de l'harmonisation du travail fourni par les différentes unités de travail.

Le second élément important que nous retiendrons de ce projet est de nature plus scolaire. Ce projet nous a permis de mettre en application concrète (le problème de l'oscillateur harmonique est un problème souvent rencontré par les industriels) des notions théoriques et abstraites que nous avons étudié durant ces 4 semestres de STPI. Nous pouvons par exemple citer les notions de calcul matriciel, d'algèbre linéaire avec l'utilisation du théorème spectral qui nous a permis de diagonaliser notre matrice. De plus, de part son importance, ce projet a nécessité de notre part une attention particulière concernant le choix des notations utilisées : il fallait trouver des notations claires, précises et évocatrices, de sorte que les membres du projet ne travaillant pas sur cette partie comprennent simplement et rapidement les raisonnements employés. Enfin, du fait de la longueur du raisonnement, nous avons dû faire preuve d'une rigueur très poussée lorsque nous avons mené nos développements.

Ce projet restera dans nos mémoires, tant comme une belle aventure de concorde humaine que comme un marathon scientifique exaltant ; la satisfaction du résultat dépassant de loin les peines du calcul.

Bibliographie

Livres

- NOËL-ARNAUD MAGUIS *Rédigez des documents de qualité en latex*, éditions OpenClassrooms avril 2015
- PHILIPPE G. CIARLET, *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation* éditions Dunod 2003
- DAVID C. LAY, *Algèbre Linéaire et applications* éditions de Boeck 2004

Documents internet

Documentation mathématique et physique

- Article Wikipédia Matrice tridiagonale http://fr.wikipedia.org/wiki/Matrice_tridiagonale
- Article Wikipédia Suite récurrente linéaire http://fr.wikipedia.org/wiki/Suite_récurrente_linéaire
- Article Wikipédia Matrice de Hessenberg http://fr.wikipedia.org/wiki/Matrice_de_Hessenberg
- Accélération de la diagonalisation des matrices réelles symétriques. http://www.gmpcs.lumat.u-psud.fr/IMG/pdf/rapport_final.pdf
- Université de Rennes I <http://perso.univ-rennes1.fr/eric.darrigrand-lacarrieu/Teaching/PdfFiles/PolyF04cours.pdf>
- Université du Mans http://res-nlp.univ-lemans.fr/NLP_E_M01_G04/co/NLP_E_M01_G04_15.html
- Université du Mans <http://ressources.univ-lemans.fr/AccesLibre/UM/Pedago/physique/02bis/meca/chaine.html>

Documentation latex

- Document Wikibook <http://fr.wikibooks.org/wiki/LaTeX>
- Université de Lyon *Latex... pour le profs de Maths* <http://math.univ-lyon1.fr/irem/IMG/pdf/LatexPourProfMaths.pdf>
- Ecole Normale Supérieure *Aide mémoire Latex* <http://www.math.ens.fr/~millien/tdlatex/aide-memoire.pdf>
- Ecole Normale Supérieure *Pour bien taper un document avec Latex* http://www.math.ens.fr/~millien/tdlatex/conseils_latex.pdf

Logiciels

- Logiciel de calcul formel en ligne **WolframAlpha** <http://www.wolframalpha.com>
- Logiciel de calcul formel en ligne **SageMaths** <https://cloud.sagemath.com/>

Partie 4

Annexe

Code SAGE

```
sage: q, n, k, m, t, s, i = var('q, n, k, m, t, s, i')

sage: m=1
sage: k=10
sage: n=2

for i in range(1, n+1):
    plot((2/(n+1))*sum((sin((i*q*pi)/(n+1))*cos(sqrt(((4*k)/m)*
        ((sin((q*pi)/(2*(n+1))))^2))*t))*sum((sin((q*s*pi)/(n+1))),
        s, 1, n),q,1,n),0,10)
```