Exercice 1 PL en nombres entiers 5 points

Une startup cherche à produire au meilleur cout 999 machines à laver parlantes. Il existe trois façons de produire ces machines à laver : manuellement, semi automatiquement et automatiquement. Manuellement, la production d'une machine à laver requière une minutes de travail qualifié, 40 minutes de travail non qualifié et trois minutes pour son assemblage. Les valeurs correspondantes sont de 4, 30 et 2 minutes pour la production semi automatique et de 8 , 20 et 4 minutes pour le montage automatique. La start up dispose de 4500 minutes de travail qualifié, 36000 minutes de travail non qualifié et 2700 minutes d'assemblage. Le cout de production manuelle d'une machine à laver parlante est de 70 euros, 80 euros pour une production semi automatique et 85 euros pour une production automatique.

1. Formuler le problème comme un programme linéaire et donner une solution.
2. Reformuler le programme linéaire sous sa forme standard.

$$\begin{cases} \min\limits_{z \in \mathbb{R}^m} & c^\top z \\ \text{avec} & Az = b \\ \text{et} & z \geq 0 \end{cases}$$

3. Donnez le dual de ce problème. Montrez que les formulations primale et duale donnent les mêmes résultats.
4. Les syndicats ont obtenus que la quantité de travail qualifié soit au moins 10% delà la quantité de travail qualifié plus non qualifié (donc hors assemblage). Reformulez le problème pour prendre en compte cette nouvelle contrainte. que pensez vous du résultat.
5. Il s'avère qu'en plus, toutes les minutes non utilisées dans l'atelier d'assemblage peuvent être louées 5 euros la minute. Reformulez le problème pour prendre en compte cette nouvelle possibilité.

Exercice 2 Mini-moke et maxi-jupe 5 points

Le but de cet exercice est d'écrire la fonction matlab `a = ma_regression_Linf(X,ya)` permettant d'estimer la fonction passant au centre d'un ensemble de point à l'aide d'un polynôme de degré neuf. Il s'agit, à partir d'un ensemble de couples $(x_i, y_i), i = 1, n$ (en rouge sur la figure ci-jointe) d'estimer les coefficients $a \in \mathbb{R}^{10}$ d'un polynôme $p_a(x) = \sum_{j=0}^{9} a_j x^j$ (en vert sur la figure) au plus prêt des observations.

Afin de tester votre procédure vous pourrez utiliser le code suivant (vu en TP).

```
clear
clf
rand('seed',1);
randn('seed',1);
n = 100;
x = sort(rand(n,1));
nt = 1000;
xt = linspace(0,1,nt)';
y = cos(pi*x);
yt = cos(pi*xt);
figure(1);
plot(xt,yt,'LineWidth',2);  hold on;
sig = 0.5;
ya = y+sig*randn(size(y));
plot(x,ya,'xr');
X = [ones(size(x)) x x.^2 x.^3 x.^4 x.^5 x.^6 x.^7 x.^8 x.^9];
Xt = [ones(size(xt)) xt xt.^2 xt.^3 xt.^4 xt.^5 xt.^6 xt.^7  xt.^8 xt.^9 ];

[n,p] = size(X);

[a] = ma_regression_Linf(X,ya)

plot(xt,Xt*a,'g');
plot(x,X*a,'og');
```

1. Afin d'estimer la fonction passant au centre d'un ensemble de point à l'aide d'un polynôme de degré neuf on se propose de formaliser le probème de la manière suivante :

$$\min_{a \in \mathbf{R}^{10}} \max_{i \in \{1,n\}} |p_a(x_i) - y_i|$$

on pourra poser $m = \max_{i \in \{1,n\}} |p_a(x_i) - y_i|$. Donner un code matlab permettant de le résoudre.

2. Quelle est la valeur maximale de l'erreur ($\max_{i \in \{1,n\}} |p_a(x_i) - y_i|$) et combien des d'observations atteignent ce maximum ?

3. Afin d'améliorer les résultat on se propose d'utiliser une pénalité de type L2 et donc de minimiser le cout suivant

$$\min_{a \in \mathbf{R}^{10}} \max_{i \in \{1,n\}} |p_a(x_i) - y_i| + \lambda \|a\|^2$$

avec $\lambda = 0,0005$ Donner un code matlab permettant de le résoudre. Est-ce toujours un programme linéaire ?

4. Que se passe t'il si l'on ajoute un point aberrant

```
ya(1) = -2
```

5. Afin de traiter ce point aberrant on se propose d'introduire, pour chaque observation une variable d'écart $\xi_i, i = 1, n$

$$\xi_i = \begin{cases} 0 & \text{si } |p_a(x_i) - y_i| \leq m \\ |p_a(x_i) - y_i| - m & \text{sinon} \end{cases}$$

et l'on cherche à minimiser

$$m + \lambda \|a\|^2 + C \sum_{i=1}^{n} \xi_i$$

pour $C = 0,02$. Donner un code matlab permettant de résoudre ce problème et visualisez le résultat.