Premier cycle Mardi 24 Juin 2008

I3 - Algorithmique

Durée : *3h00*
Documents autorisés : **AUCUN** (calculatrice comprise)

Remarques :
- Veuillez lire attentivement les questions avant de répondre.
- Le barème donné est un barème indicatif qui pourra évoluer lors de la correction.
- Rendez une copie propre.

1 Compréhension d'algorithmes vus en cours (5 points)

1.1 Min-max

Après avoir rappelé en quelques lignes le principe de l'algorithme min-max, quel est le coup qui sera choisi par cet algorithme sur l'arbre présenté par la figure 1.

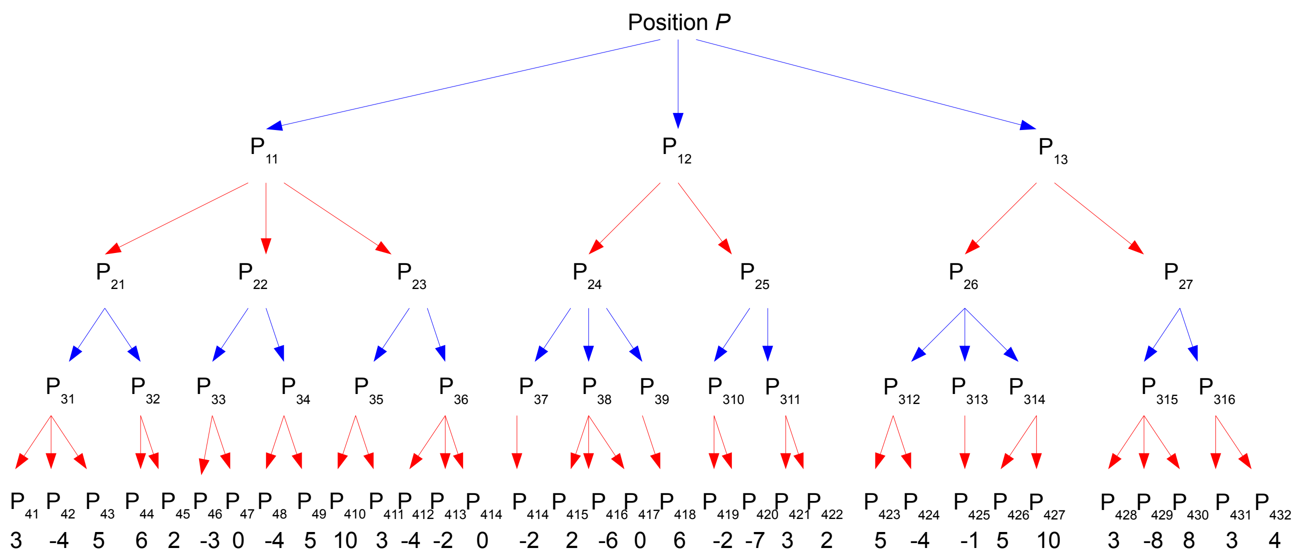
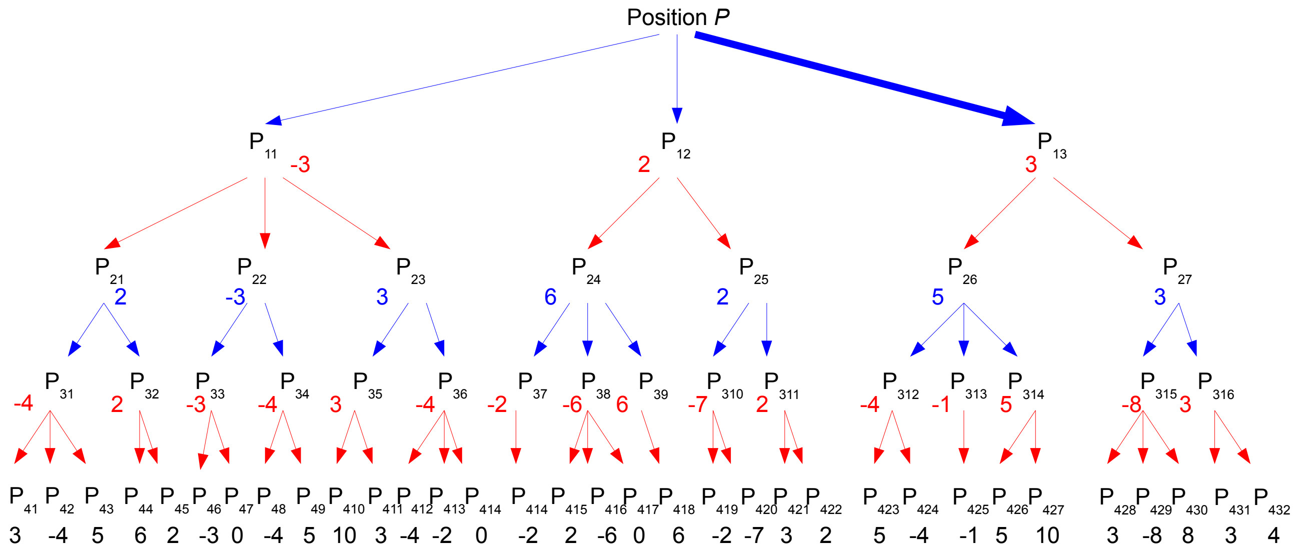


FIG. 1 – Arbre de positions

Solution proposée :



1.2 *paint*

Dans le cours sur la récursivité nous avons vu l'algorithme de la procédure *remplir* suivante :

procédure remplir (**E/S** e : Ecran , **E** x,y : **Naturel** , ancienneCouleur, nouvelleCouleur : Couleur)
debut
  si obtenirCouleurPixel(e,x,y)=ancienneCouleur **alors**
    fixerCouleurPixel(e,x,y,nouvelleCouleur)
    remplir(e,x,y-1,ancienneCouleur,nouvelleCouleur)
    remplir(e,x,y+1,ancienneCouleur,nouvelleCouleur)
    remplir(e,x-1,y,ancienneCouleur,nouvelleCouleur)
    remplir(e,x+1,y,ancienneCouleur,nouvelleCouleur)
  finsi
fin

Après avoir recopié la figure 2 sur votre copie, numéroter les pixels qui seront coloriés suivant leur ordre d'apparition à l'écran en commençant par le pixel numéroté 1 (l'ancienne couleur est le blanc, la nouvelle le noir).

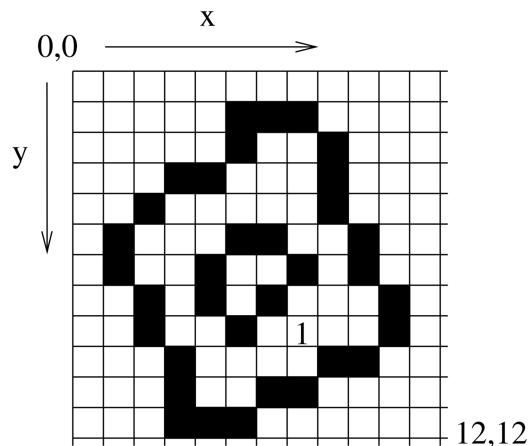
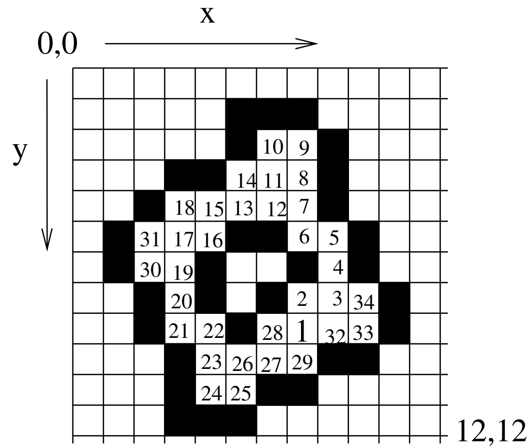


FIG. 2 – Surface à remplir

Solution proposée :



1.3 Partitionner

Après avoir rappelé en quelques lignes le principe du partitionnement d'un tableau utilisé dans le tri rapide, donner le résultat du partionnement du tableau suivant en considérant que la valeur pivot est la valeur de la première case.

5	4	3	7	10	6	9	1	3	12	9	8
1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*	*12*

Solution proposée :

1	4	3	3	5	6	9	10	7	12	9	8
1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*	*12*

L'indice pivot est donc de 5.

2 Polynome (4 points)

Soit le type *Polynome* avec les opérations suivantes :
- **fonction** monome (a : **Reel**, n : **Naturel) :** Polynome
- **fonction** addition (p1,p2 : Polynome) **:** Polynome
- **fonction** degre (p : Polynome) **: Naturel**
- **fonction** coefficient (p : Polynome, n : **Naturel) : Reel**

Donnez le corps des fonctions suivantes :

1. **fonction** multiplicationParScalaire (p : Polynome, a : **Reel) :** Polynome
2. **fonction** soustraction (p1,p2 : Polynome) **:** Polynome
3. **fonction** multiplication (p1,p2 : Polynome) **:** Polynome
4. **fonction** derivation (p : Polynome) **:** Polynome

Solution proposée :
fonction multiplicationParScalaire (p : Polynome, a : **Reel) :** Polynome

Déclaration resultat : Polynome
i : **Naturel**
coef : **Reel**

debut
resultat ← monome(0,0)
pour i ←0 **à** degre(p) **faire**

```
        resultat ← addition(resultat,monome(a*coefficient(p,i),i))
    finpour
    retourner resultat
fin

fonction soustraction (p1,p2 : Polynome) : Polynome
    Déclaration   temp : Polynome
debut
    temp ← multiplicationParScalaire(p2,-1)
    retourner addition(p1,temp)
fin

fonction multiplication (p1,p2 : Polynome) : Polynome
    Déclaration   resultat : Polynome
                  i,j : Naturel
debut
    resultat ← monome(0,0)
    pour i ←0 à degre(p1) faire
        pour j ←0 à degre(p2) faire
            resultat ← addition(resultat,monome(coefficient(p1,i)*coefficient(p2,j),i+j))
        finpour
    finpour
    retourner resultat
fin

fonction derivation (p : Polynome) : Polynome
    Déclaration   resultat : Polynome
                  i : Naturel
                  coef : Reel
debut
    resultat ← monome(0,0)
    pour i ←1 à degre(p) faire
        resultat ← addition(resultat,monome(coefficient(p,i)*naturelEnReel(i),i-1))
    finpour
    retourner resultat
fin
```

3 Problème du labyrinthe (11 points)[1]

L'objectif de cet exercice est d'étudier le problème du labyrinthe. Comme l'indique la figure 3, l'objectif est de trouver un algorithme permettant de trouver le chemin qui mène de l'entrée à la sortie.

En fait, un labyrinthe est composé de cases. On accède à une case à partir d'une case et d'une direction. Les directions possibles sont `Nord`, `Sud`, `Est` et `Ouest`.

Par exemple, comme le montre la figure 4, le labyrinthe précédent peut être considéré comme étant composé de 25 cases. La case numéro 6 est la case d'entrée. La case 20 est la case de sortie. La case 8 est accessible depuis la case 13 avec la direction `Nord`.

3.1 Type direction (0,25 points)

Donner le type `Direction`.

[1] Les 4 premières parties de cet exercice sont indépendantes

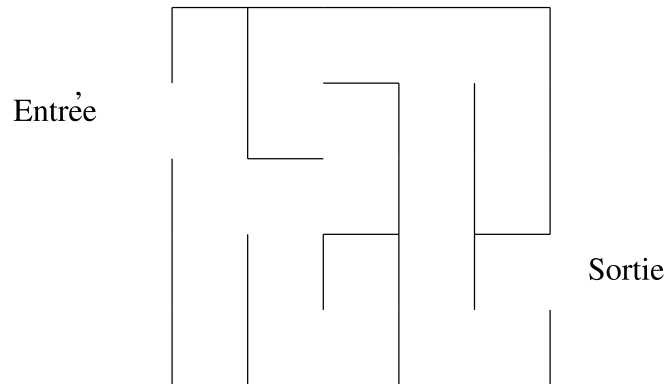


FIG. 3 – Un labytinthe

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

FIG. 4 – Un labytinthe composé de cases

Solution proposée :
Type Direction = {Nord,Sud,Est,Ouest}

3.2 Conception préliminaire d'un ensemble de directions (2,5 points)

À l'image du type `EnsembleDEntiers` vu en TD, on considère que l'on a le type `EnsembleDeDirections`.

1. Rappeler les opérations disponibles pour le type `EnsembleDEntiers`.
2. Donner les signatures des procédures et fonctions de ces opérations pour le type `EnsembleDeDirections`.

Solution proposée :

1. Les opérations disponibles pour le type `EnsembleDEntiers`.
   – initialiser un ensemble (dans ce cas il est vide, sa taille est de 0),
   – obtenir la taille d'un ensemble,
   – savoir si un entier est présent dans l'ensemble,
   – ajouter un entier (si l'entier est déjà présent, l'action ne modifie pas l'ensemble)
   – retirer un entier (si l'entier n'est présent, l'action ne modifie pas l'ensemble)
   – obtenir le ième entier (on considère dans ce cas que l'on a toujours $1 \leq i \leq$ taille de l'ensemble).
2. Signatures des procédures et fonctions de ces opérations pour le type `EnsembleDeDirections`.
   procédure initialiser **(** **E/S** lEnsemble : EnsembleDeDirections **)**
   fonction taille (lEnsemble : EnsembleDeDirections) **: Naturel**
   fonction estPresent (lEnsemble : EnsembleDeDirections, d : Direction) **: Booleen**
   procédure ajouter **(** **E/S** lEnsemble : EnsembleDeDirections , **E** d : Direction **)**

procédure retirer (**E/S** lEnsemble : EnsembleDeDirections , **E** d : Direction)
fonction iemeDirection (lEnsemble : EnsembleDeDirections, i : **Naturel) :** Direction

3.3 Conception détaillée d'une pile de directions (4 points)

Une pile est un type de données de type LIFO (*Last In First Out*), c'est-à-dire que la première donnée insérée dans une pile (on dit que l'on *empile* une donnée) sera la dernière donnée qui pourra être retirée de la pile (on dit que l'on *dépile* une donnée). Réciproquement, la dernière donnée empilée sera la première à être dépilée.

La figure 5 est une représentation graphique classique d'une pile. Dans cet exemple, c'est e_1 qui a été empilé en premier. e_2 a été empilé en deuxième, e_3 en troisième. C'est e_3 qui sera le premier à être dépilé.

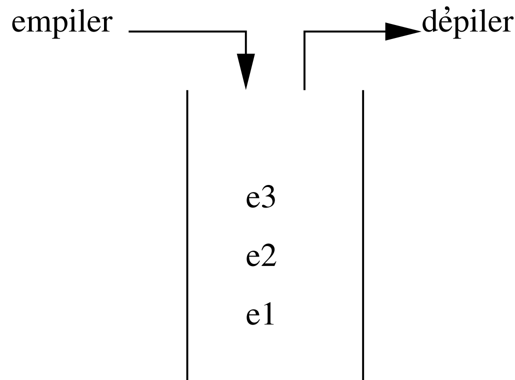


FIG. 5 – Une pile

Les opérations pour manipuler une pile sont les suivantes :
- créer une pile vide (sans aucun élément)
- savoir si une pile est vide
- empiler un élément dans une pile
- dépiler un élément d'une pile

En considérant que les éléments que l'on va utiliser sont des directions, on peut concevoir le type `PileDeDirections` de la façon suivante :

Type PilesDeDirections **= Structure**
  lesDirections : **Tableau[**1..MAX**] de** Direction
  nb : **Naturel**
finstructure

La conception préliminaire de ce type donne les signatures de fonctions et procédures suivantes :
- **fonction** creerPileDeDirections () **:** PileDeDirections
- **fonction** estUnePileDeDirectionsVide (p : PileDeDirections) **: Booleen**
- **procédure** empilerDirection **(E/S** p : PileDeDirections , **E** d : Direction **)**
- **procédure** depilerDirection **(E/S** p : PileDeDirections , **S** d : Direction **)**
  ...avec $non(estUnePileDeDirectionsVide(p))$

Donner le corps de ces fonctions et procédures.

Solution proposée :
fonction creerPileDeDirections () **:** PileDeDirections
  Déclaration resultat : PileDeDirection
debut
  resultat.nb ← 0
  retourner resultat
fin
fonction estUnePileDeDirectionsVide (laPile : PileDeDirections) **: Booleen**

debut
  retourner laPile.nb=0
fin
procédure empilerDirection (**E/S** laPile : PileDeDirections , **E** d : Direction)
debut
  laPile.nb ← laPile.nb+1
  laPile.lesDirections[laPile.nb] ← d
fin
procédure depilerDirection **(** **E/S** laPile : PileDeDirections , **S** d : Direction **)**
debut
  d ← laPile.lesDirections[laPile.nb]
  laPile.nb ← laPile.nb-1
fin

3.4 Conception préliminaire du type Labyrinthe (1,25 points)

Les opérations disponibles sur un labyrinthe sont les suivantes :
- créer un labyrinthe (rectangle d'une certaine dimension),
- obtenir la case d'entrée,
- savoir si une case est la case de sortie,
- obtenir un ensemble de directions possibles depuis une case donnée,
- obtenir la case accessible depuis une case et une direction.

Donner les signatures des fonctions et procédures correspondant aux opérations décrites ci-dessus.

Solution proposée :
- **fonction** creerLabyrinthe **(**largeur,hauteur : **Naturel) :** Labyrinthe
- **fonction** caseDEntree **(**unLabyrinthe : Labyrinthe**) : Entier**
- **fonction** estUneCaseDeSortie **(**unLabyrinthe : Labyrinthe, uneCase : **Entier) : Booleen**
- **fonction** directionsPossibles **(**unLabyrinthe : Labyrinthe, uneCase : **Entier) :** EnsembleDeDirections
- **fonction** caseDestination **(**unLabyrinthe : Labyrinthe, uneCase : **Entier**, uneDirection : Direction**) : Entier**

3.5 Utilisation du type Labyrinthe : Algorithme du petit-poucet (4 points)

L'objectif de cette dernière partie est d'obtenir une pile de directions qui permet de trouver la sortie depuis une case. Une solution a ce problème est d'utiliser le principe du petit poucet, c'est-à-dire mettre un caillou sur les cases rencontrées. Lorsque l'on tombe sur un cul de sac ou une case déjà rencontrée, on « retourne » à la case précédente pour tester une autre direction.

Pour ne pas modifier le type Labyrinthe, plutôt que de marquer une case avec un caillou on peut ajouter une case à un ensemble (`EnsembleDEntiers` vu en TD). Pour vérifier si on a déja rencontré une case, il suffit alors de vérifier si la case est présente dans l'ensemble.

Proposer le corps de la procédure suivante qui permet de trouver le chemin de sortie (s'il existe) à partir d'une case donnée[2] :
- **procédure** calculerCheminDeSortie **(** **E** l : Labyrinthe, caseCourante : **Entier** , **E/S** casesVisitees : EnsembleDEntiers , **S** permetDAllerJusquALaSortie : **Booleen**, lesDirectionsASuivre : PileDeDirections **)**

Solution proposée :
procédure calculerCheminDeSortie **(** **E** l : Labyrinthe, caseCourante : Case , **E/S** casesVisitees : EnsembleDEntiers , **S** permetDAllerJusquALaSortie : **Booleen**, lesDirectionsASuivre : PileDeDirections **)**

[2]Vous pouvez vous inspirer de la procédure *remplir* du premier exercice

```
Déclaration  directions : EnsembleDeDirections
             i : Naturel
             caseTest : CaseEntier
debut
  si estCaseDeSortie(caseCourante) alors
    permetDAllerJusquALaSortie ← VRAI
    lesDirectionsASuivre ← creerPileDeDirections()
  sinon
    si non estPresent(casesVisitees,caseCourante) alors
      casesVisitees ← ajouter(casesVisitees,caseCourante)
      directions ← directionsPossibles(l,caseCourante)
      permetDAllerJusquALaSortie ← FAUX
      i ← 1
      tant que i≤taille(directions) et non permetDAllerJusquALaSortie faire
        caseTest ← caseDestination(l,iemeDirection(directions,i))
        calculerCheminDeSortie(l,caseTest,casesVisitees,permetDAllerJusquALaSortie,
        lesDirectionsASuivre)
        si permetDAllerJusquALaSortie alors
          empilerDirection(lesDirectionsASuivre,iemeDirection(directions,i))
        finsi
        i ← i+1
      fintantque
    finsi
  finsi
fin
```