Programmation dynamique

Inspiré de [CLR94] et [Reb05]

Nicolas Delestre

INSA ROUEN NORMANDIE

Plan...

INSA ROUEN NORMANDIE

Combinaison 1 / 4

Exercice

Écrire une fonction cnp, qui pour deux entiers positifs n et p ($p \leq n$), retourne le nombre de combinaisons de p éléments parmi n.
Pour rappel :

$$\binom{n}{p} = C_n^p = \begin{cases} 1 & \text{si } p = 0 \text{ ou } n = p \\ C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1} \end{cases}$$

Solution

```
fonction cnp (n,p : naturel) : NaturelNonNul
    |précondition(s)   n≥p
debut
    si p=0 ou n=p alors
        retourner 1
    sinon
        retourner cnp(n-1,p)+cnp(n-1,p-1)
    finsi
fin
```


Combinaison 2 / 4

Code C

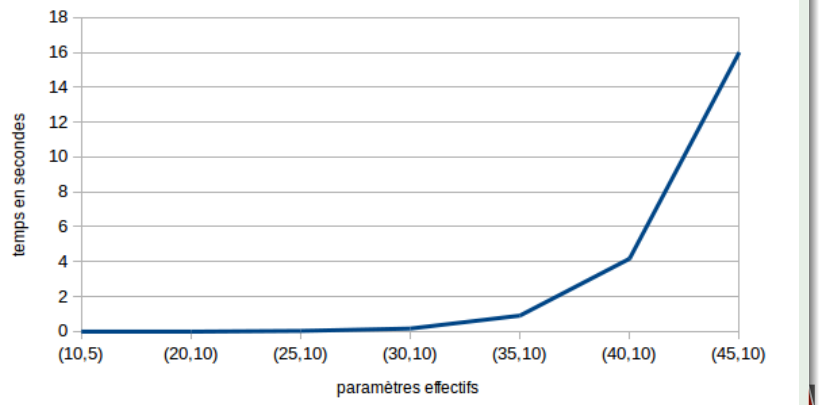
```c
#include<stdlib.h>
#include<stdio.h>

unsigned int combinaison(unsigned int n,unsigned int p) {
  if ((p==0) || (n==p))
    return 1;
  else
    return combinaison(n-1,p)+combinaison(n-1,p-1);
}

int main(int argc, char** argv) {
  unsigned int a,b;
  if(argc==3) {
    a = atoi(argv[1]);
    b = atoi(argv[2]);
    if (a>=b)
      printf("%d\n",combinaison(a,b));
  }
  return EXIT_SUCCESS;
}
```

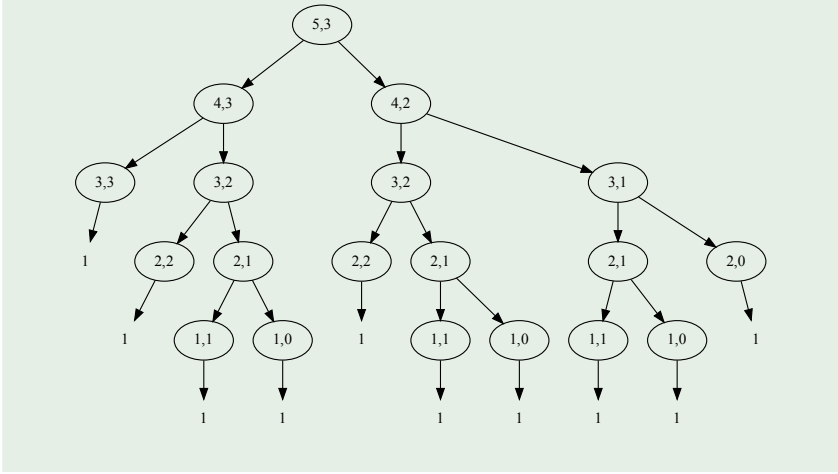
Combinaison 3 / 4

Temps d'exécution



Combinaison 4 / 4

Arbre des appels



Programmation dynamique 1 / 2

Première définition

≪ Paradigme de conception qu'il est possible de voir comme une amélioration ou adaptation de la méthode diviser-régner [dans le sens où une] solution d'un problème dépend des solutions précédentes obtenues des sous-problèmes ≫ [Reb05]

Deuxième définition

≪ La programmation dynamique est une technique algorithmique pour optimiser des sommes de fonctions monotones croissantes sous contrainte. ≫ (Wikipédia)

INSA ROUEN NORMANDIE

Programmation dynamique 2 / 2

Historique

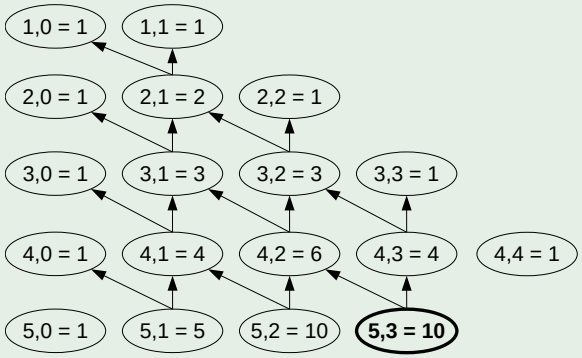
- Principe invité en 1940 par Richard Bellman
- Pour la petite histoire, Bellman a choisi le terme programmation dynamique dans un souci de communication : son supérieur ne supportait ni le mot ≪ recherche ≫ ni celui de ≪ mathématique ≫. Alors il lui a semblé que les termes ≪ programmation ≫ [(au sens de la planification)] et ≪ dynamique ≫ donnaient une apparence qui plairait à son supérieur

Amélioration de la méthode ≪ diviser-régner ≫

- Il faut (tenter d') utiliser la programmation dynamique lorsque les sous-problèmes ne sont pas indépendants et/ou la complexité de l'algorithme ≪ naïf ≫ est élevé (non polynomiale : exponentielle, factorielle)
- C'est un algorithme itératif qui calcule tout d'abord les résultats de base pour les assembler et ainsi calculer le résultat recherché
- Utilisation d'un tableau pour stocker des valeurs calculées qui pourront être réutilisées

Retour sur l'exemple Combinaison 1 / 5

On part des feuilles



On reconnaît le triangle de Pascal...

Retour sur l'exemple Combinaison 2 / 5

Nouvel algorithme pour cnp

```
fonction cnp (n,p : naturel) : NaturelNonNul
    ⌊précondition(s)  n≥p et n≤MAX_N et p≤MAX_P
    Déclaration  i,j : Naturel
                 b : Tableau[0..MAX_N][0..MAX_P] de
                 NaturelNonNul
debut
    pour i ←0 à n faire
        pour j ←0 à min(i,p) faire
            si i=j ou i=0 ou j=0 alors
                b[i,j] ← 1
            sinon
                b[i,j] ← b[i-1,j-1]+b[i-1,j]
            finsi
        finpour
    finpour
    retourner b[n,p]
fin
```

$\binom{5}{3}$

i \ j	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4		
5	1	5	10	10		

Retour sur l'exemple Combinaison 3 / 5

En utilisant un tableau à une dimension [Reb05]

```
fonction cnp (n,p : naturel) : NaturelNonNul
    ⌊précondition(s)  n≥p et n≤MAX_N et p≤MAX_P
    Déclaration  i,j : Naturel
                 b : Tableau[0..MAX_N] deNaturelNonNul
debut
    b[0] ← 1
    pour i ←1 à n faire
        b[i] ← 1
        pour j ←i-1 à 1 pas de -1 faire
            b[j] ← b[j]+b[j-1]
        finpour
    finpour
    retourner b[p]
fin
```


Retour sur l'exemple Combinaison 4 / 5

Code C

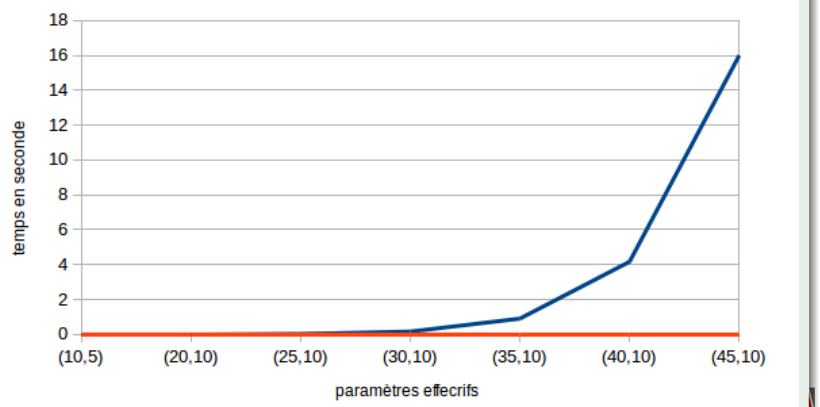
```c
#include<stdlib.h>
#include<stdio.h>

unsigned int combinaison(unsigned int n,unsigned int p) {
  int i,j;
  unsigned int b[n+1];
  b[0] = 1;
  for(i=1;i<=n;i++) {
    b[i] = 1;
    for(j=i-1;j>0;j--)
      b[j] = b[j] + b[j-1];
  }
  return b[p];
}

int main(int argc, char** argv) {
  unsigned int a,b;
  if(argc==3) {
    a = atoi(argv[1]);
    b = atoi(argv[2]);
    if (a>=b)
      printf("%d\n",combinaison(a,b));
  }
  return EXIT_SUCCESS;
}
```

Retour sur l'exemple Combinaison 5 / 5

Temps d'exécution



Problème du sac à dos 1 / 15

Présentation du problème

- Soit n objets i d'un certain poids w_i et d'une certaine valeur v_i
- Soit un sac à dos permettant de stocker au maximum des objets dont la somme des poids est W
- Quels objets mettre dans le sac de façon à maximiser la valeur de l'ensemble ?

Présentation mathématique du problème

- Soit $X \in [0,1]^n$ tel que $x_i = 1$ si l'objet est dans le sac à dos, 0 sinon.
- L'objectif est de choisir X afin de maximiser $\sum_{i=1}^{n} x_i v_i$ tel que $\sum_{i=1}^{n} x_i w_i \leq W$

Problème du sac à dos 2 / 15

Signature de la fonction

fonction resoudreSacADos **(**tailleDuSac, nbObjets : **NaturelNonNul** ; valeurs, poids : **Tableau[**1..MAX**] de Naturel) :** Ensemble<**NaturelNonNul**>

⌊**précondition(s)** nbObjets ≤ MAX

Exemple [Reb05]

- Données du problème :
  - Taille du sac : 11
  - Caractéristiques des objets :

objets	1	2	3	4	5
valeurs	1	6	18	22	28
poids	1	2	5	6	7

- Solution : {3,4} avec la valeur 40

Problème du sac à dos 3 / 15

Résolution en force brute

fonction resoudreSacADos **(**tailleDuSac, nbObjets : **NaturelNonNul** ; valeurs, poids : **Tableau[**1..MAX_OBJETS**] de Naturel) :** Ensemble<**NaturelNonNul**>

⌊**précondition(s)** nbObjets ≤ MAX_OBJETS

Déclaration i : **NaturelNonNul**
objetsDispos : Ensemble<**Naturel**>

debut
objetsDispos ← ensembleNaturels(1,nbObjets)
retourner resoudreSacADosR(tailleDuSac,ensemble(),objetsDispos,valeurs,poids)
fin

On suppose posséder :

- **fonction** ensembleNaturels **(**borneInf, borneSup**) :** Ensemble<**Naturel**>
- **fonction** somme **(**indice : Ensemble<**Naturel**>, valeurs : **Tableau[**1..MAX**] de Naturel) : Naturel**
- **procédure** obtenirSupprimerUnElement **(E/S** ens : Ensemble<**Naturel**>, **S** el : **Naturel)**

Il faut donc l'algorithme de :

- **fonction** resoudreSacADosR **(**tailleDuSac :**NaturelNonNul**, objetsChoisis, objetsRestants : Ensemble<**NaturelNonNul**> ; valeurs, poids : **Tableau[**1..MAX**] de Naturel) :** Ensemble<**NaturelNonNul**>

Problème du sac à dos 4 / 15

Résolution en force brute

Trois cas (disjoints) possibles :

1. La somme des poids des objets choisis est plus grande que la taille du sac à dos, on retourne alors un ensemble vide
2. Il n'y a plus d'objets restants, on retourne alors les objets choisis
3. On résout le problème avec un élément *el* de moins pour les objets restants. On obtient ainsi un ensemble d'objets *ens*. On retourne l'ensemble *ens* ou $ens \cup \{el\}$, celui dont la somme des valeurs est la plus grande

Problème du sac à dos 5 / 15

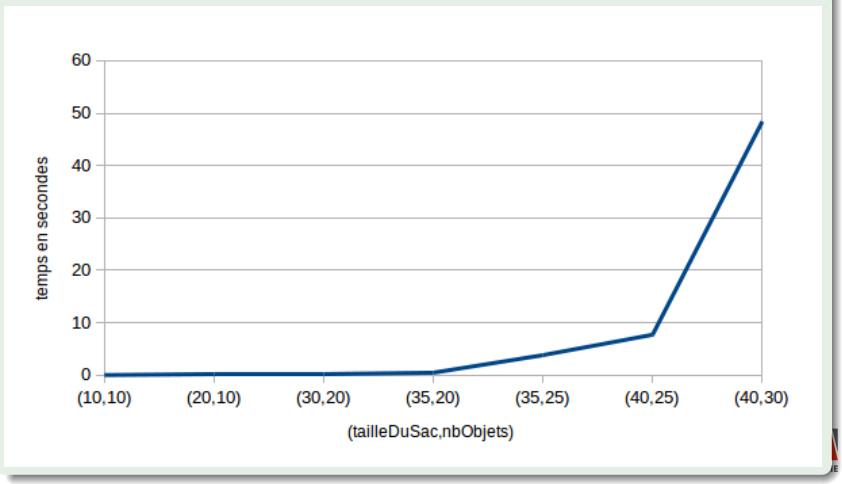
Résolution en force brute

```
fonction resoudreSacADosR (tailleDuSac : NaturelNonNul, objetsChoisis, objetsRestants : Ensemble<NaturelNonNul>,
valeurs, poids : Tableau[1..MAX_OBJETS] de Naturel) : Ensemble<NaturelNonNul>
    Déclaration   temp1,temp2,objetsChoisisAvecEl : Ensemble<NaturelNonNul>
                  el : NaturelNonNul
debut
    si somme(objetsChoisis,poids)>tailleDuSac alors
        retourner ensemble()
    sinon
        si estVide(objetsRestants) alors
            retourner objetsChoisis
        sinon
            obtenirSupprimerUnElement(objetsRestants,el)
            objetsChoisisAvecEl ← objetsChoisis
            ajouter(objetsChoisisAvecEl,el)
            temp1 ← resoudreSacADosR(tailleDuSac,objetsChoisis,objetsRestants,valeurs,poids)
            temp2 ← resoudreSacADosR(tailleDuSac,objetsChoisisAvecEl,objetsRestants,valeurs,poids)
            si somme(temp1,valeurs)>somme(temp2,valeurs) alors
                retourner objetsChoisis
            sinon
                retourner objetsChoisisAvecEl
            finsi
        finsi
    finsi
fin
```

$O(2^n)$

Problème du sac à dos 6 / 15

Temps d'exécution



Problème du sac à dos 7 / 15

Programmation dynamique : analyse du problème

- Soit $V_{i,j}$ la somme des valeurs des objets retenus parmi les i premiers objets pour un sac à dos de contenance maximale j.
  Résoudre le problème du sac à dos pour n objets avec un sac de contenance maximale W revient à calculer $V_{n,W}$
  Déterminons une relation récursive de $V_{i,j}$ en s'inspirant d'une démonstration par récurrence :
  - Mettre aucun objet quelque soit le sac donne la valeur 0, donc $V_{0,j} = 0$
  - On ne peut mettre aucun objet dans un sac de taille O, donc $V_{i,0} = 0$
  - Supposons que $V_{i-1,0..j}$ donne les valeurs maximales recherchées pour les $i-1$ premiers objets pour les sacs à dos de taille $0..j$. Lorsque l'on essaye d'ajouter le ième objet deux cas se présentent :
    1. il est plus lourd que le sac à dos ($w_i > j$), on ne peut donc pas l'ajouter, $V_{i,j} \leftarrow V_{i-1,j}$
    2. il est plus léger (ou égal) au sac à dos ($w_i \leq j$). Dans ce cas on ne retient ce ième objet que si sa valeur additionnée à la valeur d'un sac de poids maximal $j - w_i$ ($v_i + V_{i-1,j-w_i}$) est plus grande que la valeur précédemment calculée pour un sac de même taille avec les $i-1$ objets ($V_{i-1,j}$)

Problème du sac à dos 8 / 15

Exemple [Reb05]

- Données du problème :
  - Taille du sac : 11
  - Caractéristiques des objets :

objets	1	2	3	4	5
valeurs (v_i)	1	6	18	22	28
poids (w_i)	1	2	5	6	7

- Calcul de V (ne pas oublier que les $V_{i,j}$ sont sommes de v_k) :

Poids maximal du sac à dos (j)

i	w_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	0	1	6	7	7	7	7	7	7	7	7	7
3	5	0	1	6	7	7	18	19	24	25	25	25	25
4	6	0	1	6	7	7	18	22	24	28	29	29	40
5	7	0	1	6	7	7	18	22	28	29	34	35	40

Objets

Cas n°1 : 5 > 3
$V_{3,3} \leftarrow V_{2,3}$

Cas n°2 : 5 < 7
$j - w_i = 7 - 5 = 2$, on compare donc :
$V_{2,2} + v_3 = 24$ et $V_{2,7} = 7$ donc $V_{3,7} \leftarrow 24$

Problème du sac à dos 9 / 15

Quels objets retenir ?

- Il faut partir de $V_{n,W}$ ($i \leftarrow n$ et $j \leftarrow W$) et remonter les lignes ($i \leftarrow i-1$) jusqu'à la première ($i = 1$) ou s'arrêter lorsqu'il n'y a plus de place dans le sac à dos ($j = 0$)
- À chaque itération, deux cas se présentent :
  1. Si $V_{i,j} \neq V_{i-1,j}$ alors il faut garder le ième objet et se positionner sur un sac plus petit (colonne $j - w_i$)
  2. Sinon ne pas garder le ième objet et rester sur la même contenance du sac (même colonne j)

Poids maximal du sac à dos (j)

i	w_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	0	1	6	7	7	7	7	7	7	7	7	7
3	5	0	1	6	7	7	18	19	24	25	25	25	25
4	6	0	1	6	7	7	18	22	24	28	29	29	40
5	7	0	1	6	7	7	18	22	28	29	34	35	40

Objets

objets retenus = {}

Problème du sac à dos 10 / 15

Quels objets retenir ?

- Il faut partir de $V_{n,W}$ ($i \leftarrow n$ et $j \leftarrow W$) et remonter les lignes ($i \leftarrow i-1$) jusqu'à la première ($i = 1$) ou s'arrêter lorsqu'il n'y a plus de place dans le sac à dos ($j = 0$)
- À chaque itération, deux cas se présentent :
  1. Si $V_{i,j} \neq V_{i-1,j}$ alors il faut garder le ième objet et se positionner sur un sac plus petit (colonne $j - w_i$)
  2. Sinon ne pas garder le ième objet et rester sur la même contenance du sac (même colonne j)

Poids maximal du sac à dos (j)

i	w_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	0	1	6	7	7	7	7	7	7	7	7	7
3	5	0	1	6	7	7	18	19	24	25	25	25	25
4	6	0	1	6	7	7	18	22	24	28	29	29	40
5	7	0	1	6	7	7	18	22	28	29	34	35	40

Objets

objets retenus = {4}

Problème du sac à dos 11 / 15

Quels objets retenir ?

- Il faut partir de $V_{n,W}$ ($i \leftarrow n$ et $j \leftarrow W$) et remonter les lignes ($i \leftarrow i-1$) jusqu'à la première ($i = 1$) ou s'arrêter lorsqu'il n'y a plus de place dans le sac à dos ($j = 0$)
- À chaque itération, deux cas se présentent :
  1. Si $V_{i,j} \neq V_{i-1,j}$ alors il faut garder le ième objet et se positionner sur un sac plus petit (colonne $j - w_i$)
  2. Sinon ne pas garder le ième objet et rester sur la même contenance du sac (même colonne j)

Poids maximal du sac à dos (j)

i	w_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	0	1	6	7	7	7	7	7	7	7	7	7
3	5	0	1	6	7	7	18	19	24	25	25	25	25
4	6	0	1	6	7	7	18	22	24	28	29	29	40
5	7	0	1	6	7	7	18	22	28	29	34	35	40

Objets

objets retenus = {4,3}

Problème du sac à dos 12 / 15

Algorithme

```
fonction toutesLesValeursPossibles (tailleDuSac, nbObjets : NaturelNonNul ; valeurs, poids : Tableau[1..MAX_OBJETS] de
Naturel) : Tableau[0..MAX_OBJETS][0..TAILLE_MAX_SAC] de Naturel
    ⌊précondition(s)   nbObjets ≤ MAX_OBJETS et tailleDuSac≤TAILLE_MAX_SAC
    Déclaration   v : Tableau[0..MAX_OBJETS][0..TAILLE_MAX_SAC] de Naturel
                  i,j : Naturel
debut
    pour i ←0 à nbObjets faire
        v[i,0] ← 0
    finpour
    pour j ←0 à tailleDuSac faire
        v[0,j] ← 0
    finpour
    pour i ←1 à nbObjets faire
        pour j ←1 à tailleDuSac faire
            si poids[i]≤j alors
                v[i,j] ← max(v[i-1,j],valeurs[i]+v[i-1,j-poids[i]])
            sinon
                v[i,j] ← v[i-1,j]
            finsi
        finpour
    finpour
    retourner v
fin
```


Problème du sac à dos 13 / 15

Algorithme

```
fonction rechercherObjetsARetenir (tailleDuSac, nbObjets : NaturelNonNul ;
                                   v : Tableau[0..MAX_OBJETS][0..TAILLE_MAX_SAC] de Naturel ;
                                   poids : Tableau[1..MAX_OBJETS] de Naturel ) : Ensemble<NaturelNonNul>
    ⌊précondition(s)   nbObjets ≤ MAX_OBJETS et tailleDuSac≤TAILLE_MAX_SAC
    Déclaration   i,j : Naturel
                  resultat : Ensemble<NaturelNonNul>
debut
    resultat ← ensemble()
    i ← nbObjets
    j ← tailleDuSac
    tant que i > 0 et j > 0 faire
        si v[i,j]≠v[i-1,j] alors
            ajouter(resultat,i)
            j ← j-poids[i]
        finsi
        i ← i-1
    fintantque
    retourner resultat
fin
```

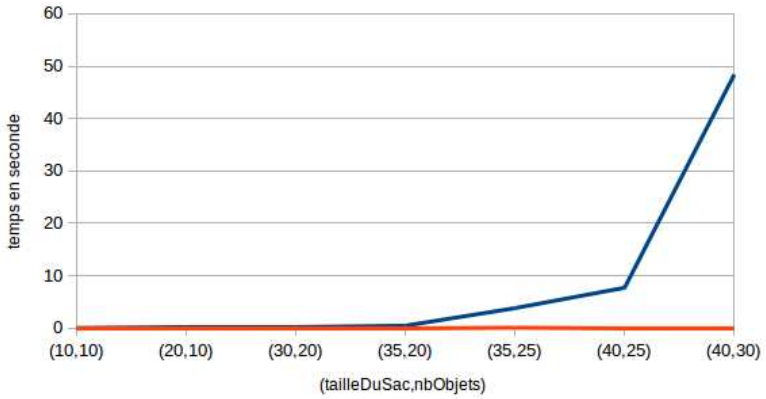

Problème du sac à dos 14 / 15

Algorithme

```
fonction resoudreSacADos (tailleDuSac, nbObjets : NaturelNonNul ;
                          valeurs, poids : Tableau[1..MAX_OBJETS] de Naturel) : Ensemble<NaturelNonNul>
    ⌊précondition(s)   nbObjets ≤ MAX_OBJETS et tailleDuSac≤TAILLE_MAX_SAC
debut
    retourner rechercherObjetsARetenir(tailleDuSac,
                                       nbObjets,
                                       toutesLesValeursPossibles(tailleDuSac, nbObjets, valeurs, poids),
                                       poids)
fin
```


Problème du sac à dos 15 / 15

Temps d'exécution



Conclusion 1 / 3

- Utiliser la programmation dynamique lorsque :
  - besoin d'une solution exacte
  - il y a une résolution « récursive » du problème mais que l'algorithme « naïf » est d'une grande complexité (car un même calcul est réalisé plusieurs fois)
- Attention : peut être difficile à concevoir
- Certains langages proposent des outils (par exemple des décorateurs) permettant de faciliter le développement de ce type d'algorithme

Conclusion 2 / 3

Exemple de problèmes pouvant nécessiter la programmation dynamique

- Distance de Levenshtein : distance entre chaînes de caractères fondée sur le coût de trois opérations (insertion, suppression, substitution)
- Problème de rendu de monnaie
- Problème du voyageur de commerce : plus court chemin qui permet de passer par n sommets d'un graphe ($O(n!) \rightarrow O(n^2 2^n)$ cf. Wikipédia)

n	1	...	8	9	10	11	12	13	...
$n!$	1	...	40320	362880	3628800	39916800	479001600	6227020800	...
$n^2 \times 2^n$	2	...	16384	41472	102400	247808	589824	1384448	...

- Multiplications chaînées de matrices
  - ex : $|A_1| = (10, 100)$, $|A_2| = (100, 5)$ et $|A_3| = (5, 50)$, Nombre d'opérations pour $(A_1 A_2)A_3$ et $A_1(A_2 A_3)$?

Conclusion 3 / 3

Remarques

- « Martelli a démontré en 1976 que tout algorithme de programmation dynamique pouvait se ramener à la recherche du plus court chemin dans un graphe. Or, les techniques de recherche heuristique basées sur l'algorithme A* permettent d'exploiter les propriétés spécifiques d'un problème pour gagner en temps de calcul. Autrement dit, il est souvent plus avantageux d'exploiter un A* que d'utiliser la programmation dynamique. » (Wikipédia)
- Lorsque la recherche d'une solution exacte est trop coûteuse, on peut essayer de trouver des solutions approchées :
  - algorithmes glouton
  - algorithme du recuit simulé
  - algorithme tabou
  - etc.

Références I

[CLR94] Thomas Cormen, Charles Leiserson, and Ronald Rivest.

Introduction à l'algorithmique.

Dunod, 1994.

[Reb05] Djamal Rebaïne.

Analyse et conception d'algorithme, chapitre 5.

http://www.uqac.ca/rebaine/8INF806/Chapitre5propreprogrammationdynamique.pdf, 2005.