Les arbres-B

Nicolas Delestre, Géraldine Del Mondo

Fondé sur le cours de Michel Mainguenaud

Plan...

1. Définition
2. Recherche dans un Arbre-B
3. Insertion dans un Arbre-B
4. Suppression dans un Arbre-B

Contexte

L'arbre-B (où *B-Tree* en anglais et *B* pour *balanced*) est un type de donnée utilisé dans les domaines des :

- systèmes de gestion de fichiers : ReiserFS (version modifiée des arbres-B) ou Btrfs (*B-Tree file system*)
- bases de données : gestion des index

L'arbre-B reprend le concept d'ABR équilibré mais en stockant dans un nœud k valeurs (nommées clés dans le contexte des arbres-B) et en référençant $k+1$ sous arbres :

- « minimise la taille de l'arbre et réduit le nombre d'opérations d'équilibrage » (Wikipédia)
- utile pour un stockage sur une unité de masse

Arbre-B

Définition Arbre-B

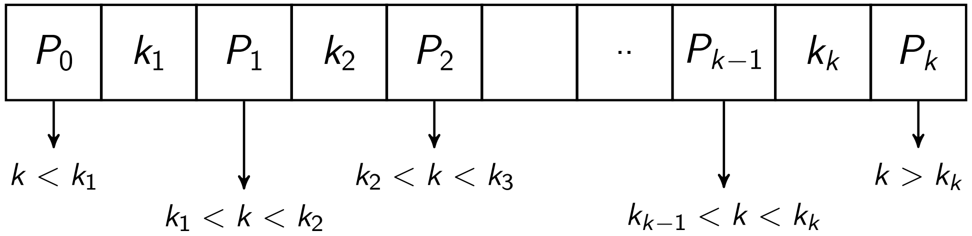
Un arbre-B d'ordre m est un arbre tel que :

1. Chaque nœud contient k clés triées avec : $m \leq k \leq 2m$ (nœud non racine) et $1 \leq k \leq 2m$ (nœud racine).
2. Chaque chemin de la racine à une feuille est de même longueur
3. Un nœud est :
   - Soit terminal (feuille)
   - Soit possède $(k+1)$ fils tels que les clés du ième fils ont des valeurs comprises entre les valeurs du $(i-1)$ème et $i$ème clés du père

Structure d'un nœud

Définition NŒUD

- k clés triées
- $k+1$ références (pointeur mémoire, indice d'un cluster, etc. avec une valeur particulière, noté ici NIL, pour dénoter l'absence de référencement) tels que :
  - Tous sont différents de NIL si le nœud n'est pas une feuille
  - Tous à NIL si le nœud est une feuille



Capacité

- **Nombre de clés**

  Arbre-B d'ordre m et de hauteur h :

  → Nombre de clé(s) minimal $= 2*(m+1)^h - 1$

  → Nombre de clés maximal $= (2*m+1)^{h+1} - 1$

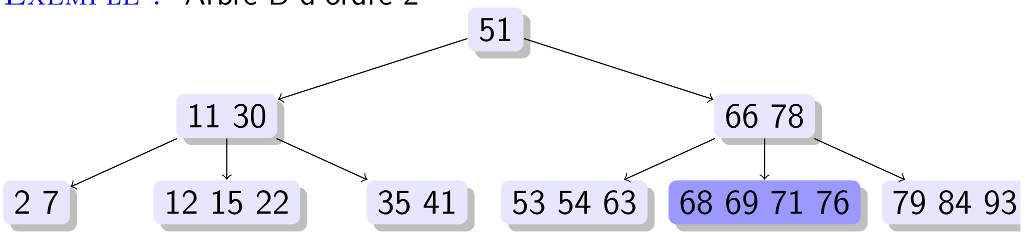
  EXEMPLE : $m = 100$, $h = 2$: Nombre maximal de clés $\approx 8\ 000\ 000$

- **Stockage sur disque**

  → Un noeud = Un bloc ou *cluster* (= ensemble de secteurs)

Exemple

EXEMPLE : Arbre-B d'ordre 2



- Chaque nœud, sauf la racine contient k clés avec $2 \leq k \leq 4$
- La racine contient k clé(s) avec $1 \leq k \leq 4$

Analyse

TAD

Nom : ArbreB
Paramètre : Cle (Possede un ordre total)
Opérations :
arbreB: **NaturelNonNul** → ArbreB
ordre: ArbreB → **NaturelNonNul**
estPresent: ArbreB × Cle → **Booleen**
inserer: ArbreB × Cle ↛ ArbreB
supprimer: ArbreB × Cle → ArbreB
Préconditions : inserer(a,c): non estPresent(a,c)
Axiomes :
- ordre(arbreB(n))=n
- estPresent(inserer(a,c),c)
- non estPresent(supprimer(a,c),c)

Conception 1 / 3

Conception préliminaire

- **fonction** arbreB **(**ordre : **NaturelNonNul) :** ArbreB
- **fonction** ordre **(**a : ArbreB**) : NaturelNonNul**
- **fonction** estPresent **(**a : ArbreB**) : Booleen**
- **procédure** inserer **(E/S** a : ArbreB, **E** c : Cle**)**
  ⌊**précondition(s)** non estPresent(a,c)
- **procédure** supprimer **(E/S** a : ArbreB, **E** c : Cle**)**

Conception 2 / 3

Exemple de conception détaillée en mémoire

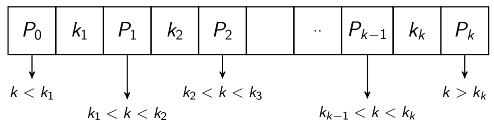
Type ArbreB **=** ^Noeud
Type Noeud **= Structure**
nbCles : **NaturelNonNul**
cles : **Tableau[**1..MAX**] de** Cle
sousArbres : **Tableau[**0..MAX**] de** ArbreB
finstructure

Conception 3 / 3

Pour s'abstraire de l'implantation

- **fonction** feuille **(**cles : Liste<Cle>, ordre : **NaturelNonNul) :** ArbreB
  ⌊**précondition(s)** 1≤longueur(cles)≤2*ordre
- **fonction** noeud **(**cles : Liste<Cle>, sousArbres : Liste<ArbreB>, ordre : **NaturelNonNul) :** ArbreB
  ⌊**précondition(s)** 1≤longueur(cles)≤2*ordre
  logueur(sousArbres)=longueur(cles)+1
  ∀ a∈sousArbres, ordre≤nbCles(a)≤2*ordre
- **fonction** estUneFeuille **(**a : ArbreB**) : Booleen**
- **fonction** ordre **(**a : ArbreB**) : NaturelNonNul**
- **fonction** nbCles **(**a : ArbreB**) : NaturelNonNul**
- **fonction** cles **(**a : ArbreB**) :** Liste<Cle>
- **fonction** sousArbres **(**a : ArbreB**) :** Liste<ArbreB>
- **fonction** cle **(**a : ArbreB, pos : **NaturelNonNul) :** Cle
  ⌊**précondition(s)** pos≤nbCles(a)
- **fonction** sousArbre **(**a : ArbreB, pos : **Naturel) :** ArbreB
  ⌊**précondition(s)** pos<nbCles(a)
- **procédure** changerCle **(E/S** a : ArbreB, **E** pos : **NaturelNonNul**, c : Cle**)**
  ⌊**précondition(s)** pos≤nbCles(a)
- **procédure** changerSousArbre **(E/S** a : ArbreB, **E** pos : **Naturel**, ssa : ArbreB**)**
  ⌊**précondition(s)** pos≤nbCles(a)

Recherche d'un élément de clé c 1 / 3



Principe

À partir de la racine, pour chaque nœud examiné :

- La clé C est présente (recherche qui peut être dichotomique) $\rightarrow$ succès
- $C < k_1 \rightarrow$ recherche dans le sous-arbre le plus à gauche (via le pointeur P_0)
- $C > k_k \rightarrow$ recherche dans le sous-arbre le plus à droite (via le pointeur P_k)
- $k_i < C < k_{i+1}$ (recherche qui peut être dichotomique) $\rightarrow$ recherche dans le sous-arbre (via le pointeur P_i)
- Si l'arbre est vide (pointeur vaut NIL) $\rightarrow$ échec

Recherche d'un élément de clé *c* 2 / 3

```
fonction estPresent (a : ArbreB, c : Cle) : Booleen
debut
    si estVide(a) alors
        retourner FAUX
    sinon
        present, filsPossible ← estPresentDansRacine(a,c)
        si present alors
            retourner VRAI
        sinon
            si estUneFeuille(a) alors
                retourner FAUX
            sinon
                retourner estPresent(filsPossible, c)
            finsi
        finsi
    finsi
fin
```

Recherche d'un élément de clé *c* 3 / 3

```
fonction estPresentDansRacine (a : ArbreB, c : Valeur) : Booleen, ArbreB
    Déclaration g,d,m : NaturelNonNul
debut
    g ← 1
    d ← nbCle(a)
    tant que g≠d faire
        m ← (g+d) div 2
        si cle(a,m)≥c alors
            d ← m
        sinon
            g ← m+1
        finsi
    fintantque
    si cle(a,g)=c alors
        retourner VRAI, arbreB(ordre(a))
    sinon
        retourner FAUX, sousArbre(a,g-1)
    finsi
fin
```

Remarque

g et *d* référencent la position de l'élément supérieur ou égal à la valeur recherchée

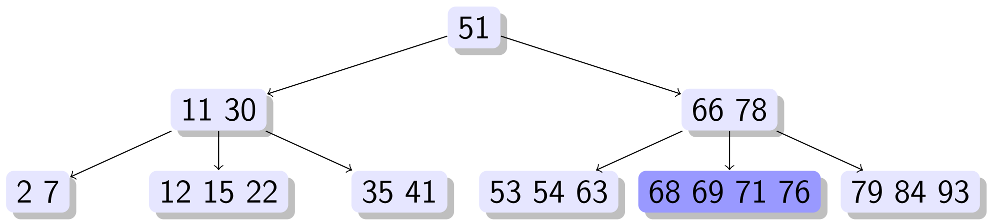
Insertion dans un arbre-B d'ordre *m*

Principe

1. L'insertion se fait récursivement au niveau des feuilles
2. Si un nœud a alors plus $2m+1$ clés, il y a éclatement du nœud et remontée (grâce à la récursivité) de la clé médiane au niveau du père
3. Il y a augmentation de la hauteur de l'arbre lorsque la racine se retrouve avec $2m+1$ clés
   $\hookrightarrow$ l'augmentation de la hauteur de l'arbre se fait donc au niveau de la racine !

Exemple : cas d'un nœud plein 1 / 2

Exemple : Insertion de **75** ?



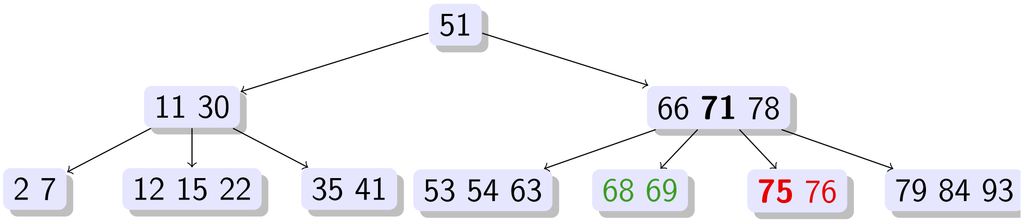
Rappel : ici nombre de clés par nœud ≤ 4

Méthode

1. Eclatement du nœud en deux :
   - Les (deux) plus petites clés restent dans le nœud
   - Les (deux) plus grandes clés sont insérées dans un nouveau nœud
2. Remontée de la clé médiane dans le nœud père (e.g. ici **71**)

Exemple : cas d'un nœud plein 2 / 2

EXEMPLE : Insertion de **75** ?



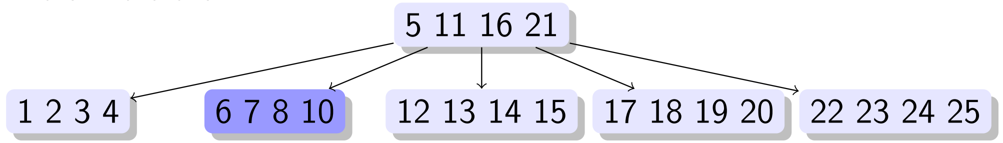
Rappel : ici nombre de clés par nœud ≤ 4

Méthode

1. Eclatement du nœud en deux :
   - Les (deux) plus petites clés restent dans le nœud
   - Les (deux) plus grandes clés sont insérées dans un nouveau nœud
2. Remontée de la clé médiane dans le nœud père (e.g. ici **71**)

Exemple : cas de l'augmentation de la hauteur 1 / 2

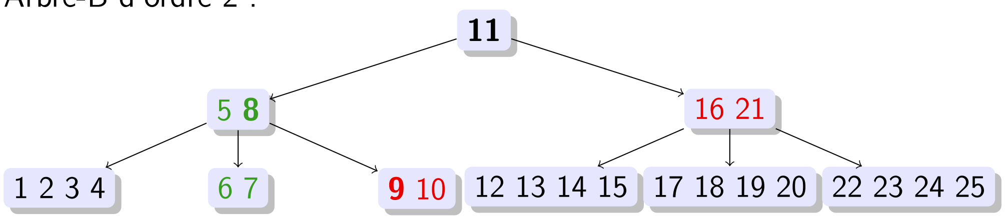
Arbre-B d'ordre 2 :



- Insertion clé **9** $\rightarrow$ Eclatement + remontée de la clé **8** au nœud père
- Remontée de la clé **8** au nœud père $\rightarrow$ Eclatement + création nouvelle racine (e.g. ici **11**)

Exemple : cas de l'augmentation de la hauteur 2 / 2

Arbre-B d'ordre 2 :



- Insertion clé **9** $\rightarrow$ Eclatement + remontée de la clé **8** au nœud père
- Remontée de la clé **8** au nœud père $\rightarrow$ Eclatement + création nouvelle racine (e.g. ici **11**)

$\hookrightarrow$ **Augmentation d'une unité de la hauteur**

Algorithme 1 / 2

Prérequis

On suppose posséder les fonctions/procédures suivantes :

- **procédure** eclater **(E/S** a : ArbreB**)**
  |**précondition(s)** nbCles(a)=2*ordre(a)+1
- **fonction** positionDInsertion **(**a : ArbreB, c : Cle**) : NaturelNonNul**
- **procédure** insererCleDansFeuille **(E/S** a : ArbreB, **E** c : Cle, pos : **NaturelNonNul)**
  |**précondition(s)** estUneFeuille(a)
- **procédure** insererRacineDeTailleUnDansNoeud **(E/S** a : ArbreB, **E** racine : ArbreB, pos : **NaturelNonNul)**
  |**précondition(s)** nbCles(racine)=1

Algorithme 2 / 2

```
procédure inserer (E/S a : ArbreB, E c : Cle, ordre : NaturelNonNul)
    ⌊précondition(s)  2*ordre<MAX
    Déclaration  ...
debut
    si estVide(a) alors
        l ← liste()
        inserer(l,1,c)
        a ← feuille(l)
    sinon
        pos ← positionDInsertion(a,c)
        si estUneFeuille(a) alors
            insererCleDansFeuille(a,c,pos)
            si nbCles(a)>2*ordre(a) alors
                eclater(a)
            finsi
        sinon
            ssArbre ← sousArbre(a,pos-1)
            inserer(ssArbre,c)
            si nbCles(ssArbre)=1 alors
                insererRacineDeTailleUnDansNoeud(a,ssArbre,pos)
                si nbCles(a)>2*ordre(a) alors
                    eclater(a)
                finsi
            finsi
        finsi
    finsi
fin
```


Supression dans un arbre-B d'ordre m

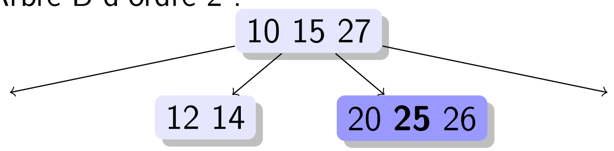
Principe

1. La suppression se fait toujours au niveau des feuilles
   ↪ Si la clé à supprimer n'est pas dans une feuille, alors la remplacer par la plus grande valeur des plus petites (ou plus petite valeur des plus grandes) et supprimer cette dernière
2. Si la suppression de la clé d'une feuille (récursivement d'un nœud) amène à avoir moins de m clés :
   1. Combinaison avec un nœud voisin (avant ou après)
   2. Descente de la clé associant ces deux nœuds (éclatement du nœud si nécessaire et donc remonté d'une nouvelle clé)

   ↪ la récursivité de ce principe peut ammener à diminuer la hauteur de l'arbre (par le haut)

Ex. cas 1 : très simple

Arbre-B d'ordre 2 :



Rappel : ici nombre de clés par nœud non racine > 1

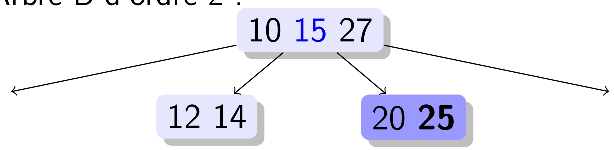
↪ Exemple : Suppression de la clé **25** ?

Méthode

1. Suppression de la valeur (décalage des valeurs dans le tableau)

Ex. cas 2 : simple 1 / 2

Arbre-B d'ordre 2 :



Rappel : ici nombre de clés par nœud non racine ≥ 2

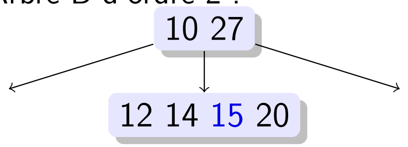
↪ Exemple : Suppression de la clé **25** ?

Méthode

1. Combinaison avec un nœud voisin
2. Descente de la clé (ici 15)
3. Suppression du nœud

Ex. cas 2 : simple 2 / 2

Arbre-B d'ordre 2 :



Rappel : ici nombre de clés par nœud non racine ≥ 2

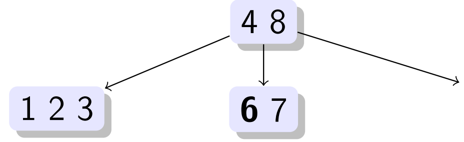
↪ Exemple : Suppression de la clé **25** ?

Méthode

1. Combinaison avec un nœud voisin ([12 14] et 20)
2. Descente de la clé médiane (ici 15)
3. Suppression du nœud

Ex. cas 3 : avec éclatement 1 / 2

Arbre-B d'ordre 2 :



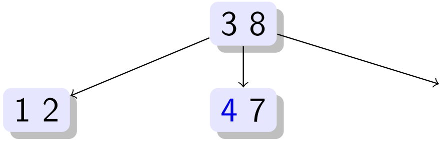
Rappel : ici nombre de clés par nœud non racine ≥ 2 et ≤ 4

↪ Exemple : Suppression de la clé **6** ?

- Suppression clé **6** → Combinaison [1 2 3] et 7 + descente de la clé 4 au nœud fils
- Descente de la clé 4 au nœud fils → Redistribution + remontée de clé médiane (e.g. ici **3**)

Ex. cas 3 : avec éclatement 2 / 2

Arbre-B d'ordre 2 :



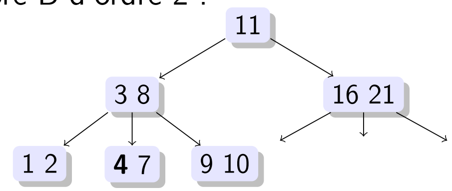
Rappel : ici nombre de clés par nœud non racine ≥ 2 et ≤ 4

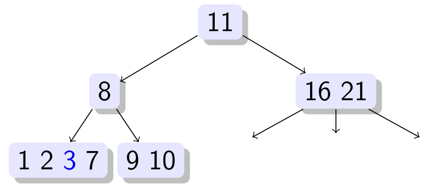
↪ Exemple : Suppression de la clé **6** ?

- Suppression clé **6** → Combinaison [1 2 3] et 7 + descente de la clé 4 au nœud fils
- Descente de la clé 4 au nœud fils → Redistribution + remontée de clé médiane (e.g. ici **3**)

Ex. cas 4 : avec un nombre de clés inférieurs à m 1 / 2

Arbre-B d'ordre 2 :



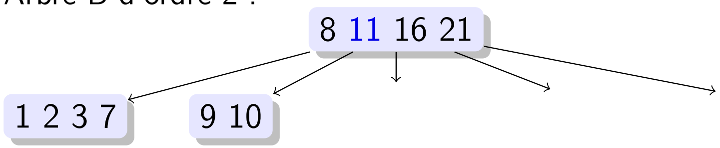


↪ Exemple : Suppression de la clé **4** ?

- Combinaison ([1 2] et 7) + descente de la clé 3

Ex. cas 4 : avec un nombre de clés inférieurs à m 2 / 2

Arbre-B d'ordre 2 :



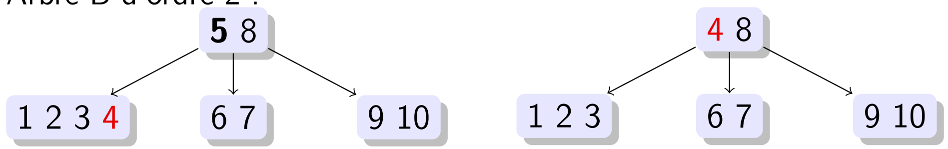
↪ Exemple : Suppression de la clé **4** ?

- Combinaison + descente de la clé 3
- Combinaison (8 et [16 21]) + descente de la clé 11

↪ **Diminution d'une unité de la hauteur**

Ex. cas 5 : suppression non feuille

Arbre-B d'ordre 2 :



↪ Exemple : Suppression de la clé **5** ?

Méthode

1. Recherche d'une clé adjacente A à la clé à supprimer → on choisit la plus grande du sous arbre gauche
2. Remplacement de la clé à supprimer par A
3. Suppression de la clé A du sous arbre gauche

Algorithme 1 / 5

Prérequis

On suppose posséder :

- Les fonctions/procédures suivantes :
  - **fonction** plusGrandeCle **(**a : ArbreB**) :** Cle
    - **précondition(s)** non estVide(a)
  - **fonction** positionCleDansNoeudRacine **(**a : ArbreB, c : Cle**) : Entier**
    - **précondition(s)** non estVide(a)

    -1 si non présent
  - **fonction** positionSsArbrePouvantContenirCle **(**a : Arbre, c : Valeur**) : Naturel**
    - **précondition(s)** non estVide(a) et positionCleDansNoeudRacine(a,c)=-1
  - **fonction** freresEtClesPeres **(**a : ArbreB, posSsArbre : **Naturel) :** ArbreB, ArbreB, Cle, Cle
    - **précondition(s)** non estVide(a) et non estVide(sousArbre(a, posSsArbre))
  - **procédure** supprimerCleDansFeuille **(E/S** a : ArbreB, **E** c : Cle**)**
    - **précondition(s)** estUneFeuille(a)
  - **procédure** fusionner **(E/S** a : ArbreB, **E** frere : ArbreB, freréGauche : **Booleen**, clePere : Cle**)**
- **Type** Fusion = {AUCUNE, GAUCHE, DROITE}

```
procédure supprimer (E/S a : ArbreB, E c : Cle)
    Déclaration   typeFusion : Fusion, uneCleGauche, uneCleDroite : Cle
debut
    supprimerR(a, c, arbreB(ordre(a)), arbreB(ordre(a)), uneCleGauche, uneCleDroite, typeFusion)
fin
```


Algorithme 2 / 5

Cas simples

```
procédure supprimerR (E/S a : ArbreB, E c : Cle, frereG, frereD : ArbreB, clePereGauche, clePereDroite : Cle, S typeFusion : Fusion)
    Déclaration   ...
debut
    typeFusion ← AUCUNE
    si non estVide(a) alors
        pos ← positionCleDansNoeudRacine(a,c)
        si estUneFeuille(a) alors
            si pos ≠ -1 alors
                si estVide(frereG) et estVide(frereD) et nbCles(a)=1 alors
                    liberer(a) // n'est possible que pour la racine
                sinon
                    Algo #1 : supprimer c dans une feuille
                finsi
            finsi
        sinon
            si pos = -1 alors
                posSsArbre ← positionSsArbrePouvantContenirCle(a,c)
            sinon
                // cas # 5 des exemples
                cleRemplacement ← plusGrandeCle(sousArbre(a,pos-1))
                changerCle(a,pos,cleRemplacement)
                c ← cleRemplacement
                posSsArbre ← pos-1
            finsi
            Algo #2 : supprimer c dans un sous-arbre de rang posSsArbre
        finsi
    finsi
fin
```

Algorithme 3 / 5

Algo #1 : supprimer c dans une feuille

supprimerCleDansFeuille(a,c)
si nbCles(a)<ordre(a) et (non estVide(frereG) ou non estVide(frereD)) **alors**
  si non estVide(frereG) **alors**
    fusionner(a, frereG, VRAI, clePereGauche)
    typeFusion ← GAUCHE
  sinon
    fusionner(a, frereD, FAUX, clePereDroite)
    typeFusion ← DROITE
  finsi
  si nbCles(a)>2*ordre(a) **alors**
    eclater(a)
  finsi
finsi

Algorithme 4 / 5

Algo #2 : supprimer c dans le sous-arbre

frereG,frereD,clePereG,clePereD ← freresEtClesPeres(a,posSsArbre)
temp ← sousArbre(a,posSsArbre)
supprimerR(temp, c, frereG, frereD, clePereG, clePereD, typeFusion)
si typeFusion ≠ AUCUN **alors**
  si nbCles(temp)=1 **alors**
    // cas #3 des exemples : il y a eu éclatement après combinaison
    changerCle(a, posSsArbre, cle(temp, 1))
    changerSousArbre(a, posSsArbre-1, sousArbre(temp,0))
    changerSousArbre(a, posSsArbre, sousArbre(temp,1))
    liberer(temp)
  sinon
    si typeFusion = GAUCHE **alors**
      supprimerCleA(a, posSsArbre)
      supprimerSousArbreA(a, posSsArbre-1)
    sinon
      supprimerCleA(a, 1)
      supprimerSousArbreA(a, 1)
    finsi
    si nbCles(a)<ordre(a) **alors**
      // Cas #4
    finsi
  finsi
finsi

Algorithme 5 / 5

Fin Algo #2 : supprimer c dans le sous-arbre, cas #4

si non estVide(frereG) ou non estVide(frereD) **alors**
  si non estVide(frereG) **alors**
    fusionner(a, frereG, VRAI, clePereGauche)
    typeFusion ← GAUCHE
  sinon
    fusionner(a, frereD, FAUX, clePereDroite)
    typeFusion ← DROITE
  finsi
  si nbCles(a)>2*ordre(a) **alors**
    eclater(a)
  finsi
finsi

Conclusion

Comparaison AVL vs Arbre-B

AVL

- **Structure** : arbres binaires de recherche équilibrés, différence de hauteur entre les sous-arbres gauche et droit limitée à 1
- **Équilibre** : maintenu en réajustant la hauteur des sous-arbres lors des opérations d'insertion et de suppression, à l'aide de simple et double rotation
- **Recherche** : temps de recherche logarithmiques
- **Utilisation** : mémoire

Arbre-B

- **Structure** : arbres équilibrés généraux pouvant avoir plusieurs clés par nœud et plusieurs enfants
- **Équilibre** : maintenu en redistribuant les clés entre les nœuds lors des opérations d'insertion et de suppression, conçus pour minimiser le nombre de mouvements nécessaires
- **Recherche** : temps de recherche logarithmiques
- **Utilisation** : systèmes de gestion de bases de données (SGBD) et les systèmes de fichiers (BTRFS, ZFS, HFS+)